В.А. ГУСЕВ
А.Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

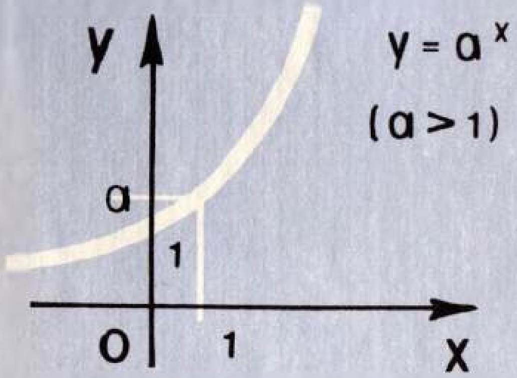
Белешмә материаллар

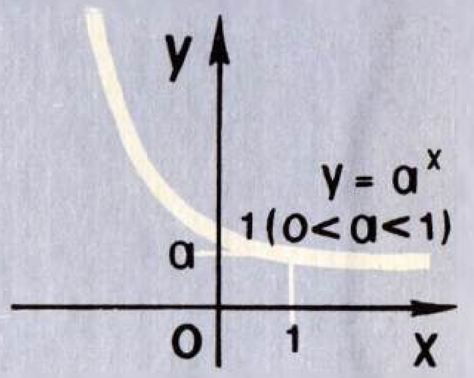
МАТЕМАТИКА

В.А. ГУСЕВ
А.Г. МОРДКОВИЧ

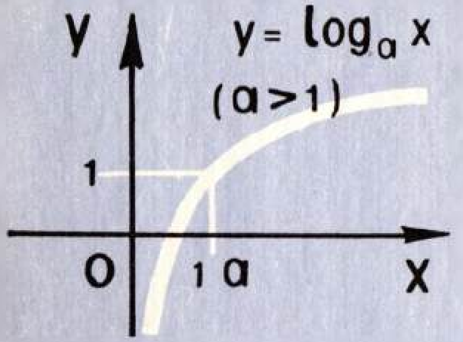
-р44-

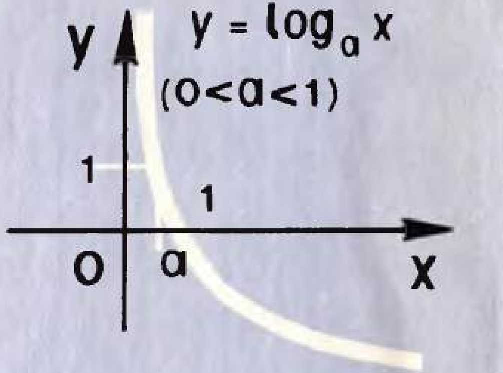
КҮРСӘТКЕЧЛЕ ФУНКЦИЯНЕҢ ГРАФИГЫ


y
$y = a^x$
$(a > 1)$
a
1
O
1
x

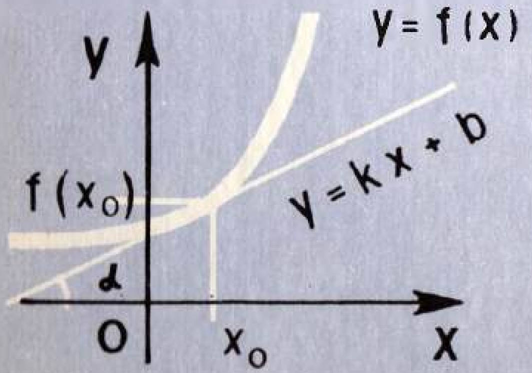

y
$y = a^x$
$1 (0 < a < 1)$
a
O
1
x

ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯНЕҢ ГРАФИГЫ


y
$y = \log_a x$
$(a > 1)$
1
O
1 a
x

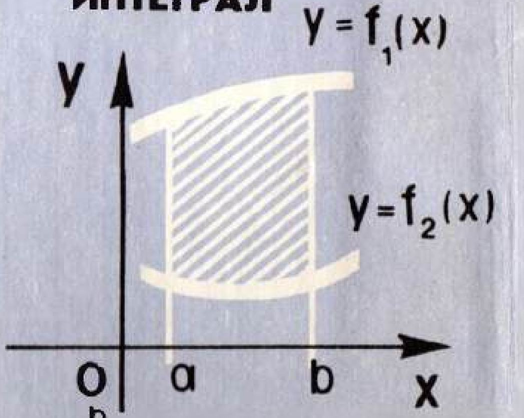

y
$y = \log_a x$
$(0 < a < 1)$
1
1
O
a
x

ЧЫГАРЫЛМА


y
$y = f(x)$
$y = kx + b$
$f(x_0)$
α
O
x_0
x

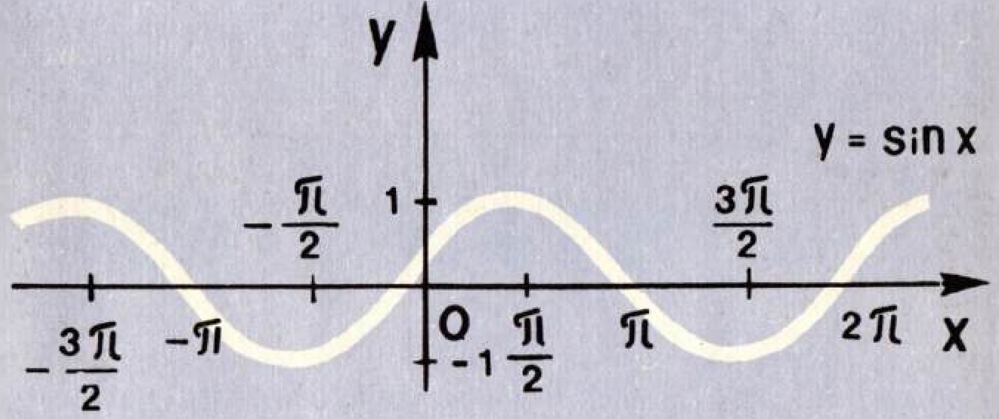
$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

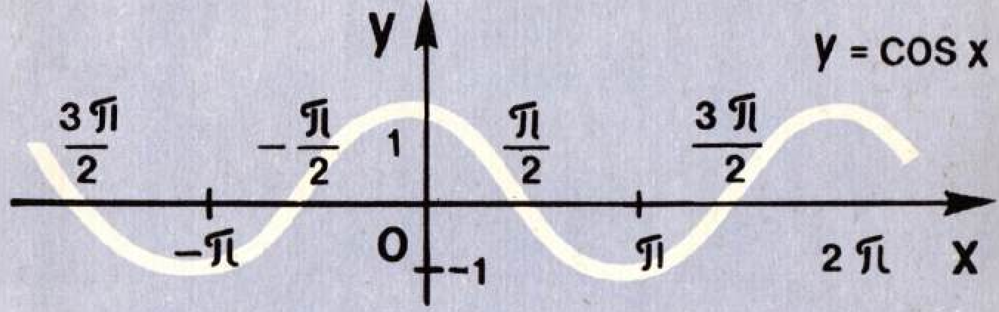
ИНТЕГРАЛ

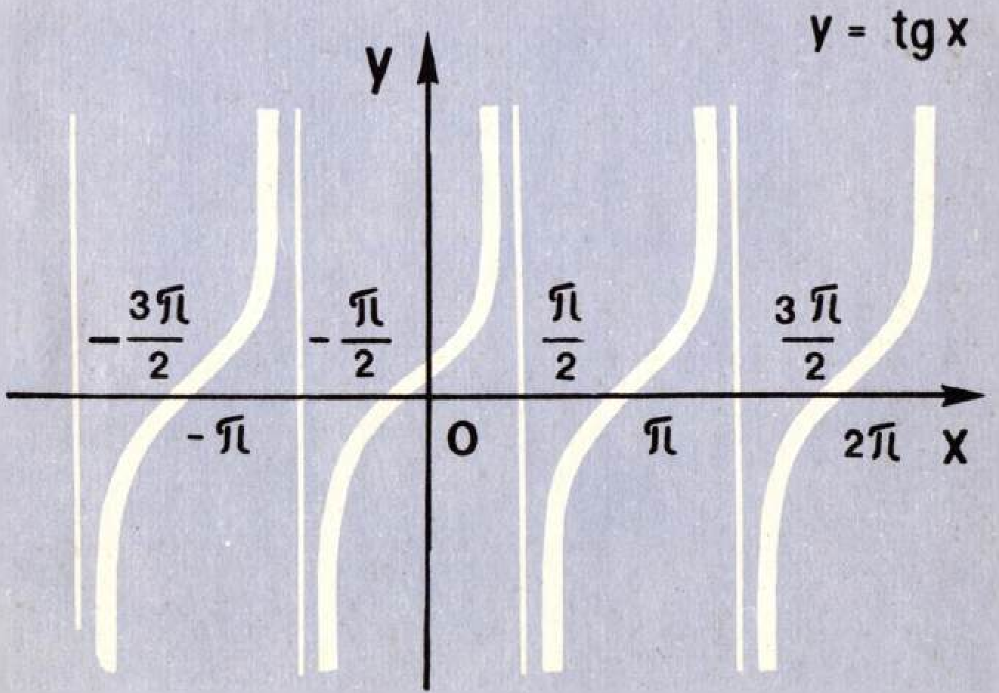

$y = f_1(x)$
y
$y = f_2(x)$
O
a
b
x

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛӘРНЕҢ ГРАФИКЛАРЫ


y
$y = \sin x$
$-\frac{\pi}{2}$
1
$\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
O
-1
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
x


y
$y = \cos x$
$\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
1
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
O
-1
π
2π
x


$y = \operatorname{tg} x$
y
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
O
π
2π
x

В.А. ГУСЕВ
А.Г. МОРДКОВИЧ

МАТЕМАТИКА

Белешмә материаллар

АЛГЕБРА
ҺӘМ АНАЛИЗ
БАШЛАНГЫЧЛАРЫ

ГЕОМЕТРИЯ

КУШЫМТАЛАР

КАЗАН
«МӘГАРИФ»
1993

ББК 22.1я.2я72
Г89

Гусев В. А., Мордкович А. Г.

Г 96 Математика: Справ. материалы: кн. для учащихся.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1990.—416 с.: ил.

«Алгебра һәм анализ башлангычлары» бүлеге А. Г. Мордкович, «Геометрия» бүлеге В. А. Гусев тарафыннан язылган.

Гусев В. А., Мордкович А. Г.

Г 89 Математика: Белешмә материаллар: Укучылар өчен ярдәмлек/Русчадан Р. И. Раскулова, Ә. М. Зарипова, Л. Х. Мөхәммәтҗанова, Ф. М. Хафизова тәрҗ.— Казан: Мәгариф, 1993.— 416 б. ил.
ISBN 5-7761-0162-X

Бу белешмәлектә алгебра һәм анализ башлангычларыннан, геометриядән мәктәп курсының төп бүлекләре буенча кыскача материал бирелә. Китап математикадан белемнәрне системага салуда һәм гомумиләштерүдә ярдәм итәр.

Г $\frac{4306020000-048}{\text{П } 86(03)-93}$ БЗ—58—51—91 ББК 22.1я2я72

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович
Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

Справочные материалы

ИБ № 144

Редакторлары *Р. С. Вафина, Л. Х. Мөхәммәтҗанова, Ф. М. Хафизова.* Художество редакторы *Л. С. Золондинова.* Техник редакторы *С. Г. Әхмәтҗанова.* Корректорлары *Р. С. Хәмидуллина, Д. Р. Мифтахова.* Җыярга тапшырылды 27.11.91. Басарга кул куелды 23.10.92. 60×90 1/16. 60 гр. офсет кәгазе № 2. «Школьная» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 26,0+форзац. 0,25. Шартлы буяу-оттиск 52,88. Нәшер-хисап табагы 22,06+форзац. 0,42. Тиражы 5600 экз. Заказ К-478. С-66. «Мәгариф» нәшрияты. 420111. Казан, Бауман ур., 19. Издательство «Магариф». 420111. Казань, ул. Баумана, 19. Татарстан Республикасы Информация һәм матбугат министрлыгының К. Якуб исемендәге полиграфия-производство берләшмәсе. 420111. Казан, Бауман ур., 19.

ISBN 5-7761-0162-X

© Гусев В. А., Мордкович А. Г., 1988
© Раскулова Р. И. һ. б., 1993

УКУЧЫЛАРГА БЕРНИЧӘ СҮЗ

1. Бу белешмәлек нindирәк соң?

Белешмәлектә сез математика буенча мәктәп курсының барлык бүлекләренең төп материалын, ягъни математик төшенчәләр, билгеләмәләр, аксиома, теорема, үзлекләр һ. б. ш. табарсыз. Моннан тыш, белешмәлектә җентекләп тикшерелгән бик күп мәсьәлә һәм мисаллар бар. Әмма шунысын әйтергә кирәк, кайчак аларның чишелешендә мисал яисә мәсьәлә кергән пункт материалы гына түгел, башка бүлек материаллары да файдаланыла. Күп очракта теоремаларның исбатлаулары юк — аларны сез хәзер укый торган яисә түбәнрәк классларда укыган дәреслекләрегездән таба аласыз. Мәктәп дәреслекләрендә булмаган өчен, яисә теге яки бу мөһим фикерләүләрнең үрнәге буларак кайбер исбатлауларны бирәбез.

Белешмәлектә теге яки бу төшенчәгә караган барлык материал бергә туплап, бер бүлектә бирелә (мәктәп кулланмаларында исә гел алай түгел). Бу сезне кызыксындырган төшенчә турындагы бөтен кирәкле мәгълүматны тиз генә табарга ярдәм итәр.

Белешмәлекнең кайбер пунктларында урта мәктәптә математика курсы программасына кермәгән өстәмә материал бирәбез — ул материал сезгә мәгълүм булган кайбер төшенчәләр турындагы күзаллауларыгызны киңәйтер. Мондый пунктлар * тамгасы белән билгеләнде.

2. Математика белешмәлеге нигә кирәк?

Белешмәлек сезгә:

1) математиканың мәктәп курсыннан теге яки бу төшенчә, теорема турында кирәкле мәгълүматны табарга;

2) дәрескә, контроль эшкә, имтиханга әзерләнгәндә кирәкле материалны кабатларга;

3) математика буенча мәктәп курсының типик мәсьәлә һәм мисалларының чишелешен искә төшерергә;

4) математика буенча вуз, техникум һәм башка уку йортларына кабул итү имтиханнарына, яисә әңгәмәгә әзерләнергә ярдәм итәчәк.

3. Белешмәлектән ничек файдаланырга?

Белешмәлек өч кисәктән тора: I кисәк — алгебра һәм анализ башлангычлары, II кисәк — геометрия, III кисәк — кушымталар (төп формулалар һәм нисбәтләр, предмет күрсәткече). Беренче ике кисәк эчендә материал түбәндәгечә бүленгән: алгебра һәм анализ башлангычлары — 7 бүлек, геометрия — 6 бүлек. Бүлекләр — параграфларга, параграфлар исә вак-вак пунктларга бүленгән (кирәкле мәгълүматны эзләп табу өчен шулай уңайлырак булыр): алгебра һәм анализ башлангычларыннан — 230 пункт; геометриядән — 84 пункт. Бүлек, параграф һәм пункт номерлары һәр кисәктә яңадан башлана.

Кирәкле мәгълүмат болай эзләнә: конкрет төшенчәне — предмет күрсәткеченнән, курсның конкрет бүлеген эчтәлектән карарга була.

Предмет күрсәткеченнән файдалануга мисал китерәбез. Әйтик, сезгә санның вакланма кисәгенең билгеләмәсен табарга кирәк ди. Предмет күрсәткечендәге «С« хәрефенә башланган сүзләр арасыннан табасыз: санның вакланма өлеше — 39 (бу — тиешле билгеләмә 39 нчы биттән дигән сүз). Тагын бер мисал: сезгә чиксез унарлы периодик вакланманың билгеләмәсен табарга кирәк ди. Вакланмалар төрле типта була, алар барысы да предмет күрсәткечендә «вакланма» сүзеннән соң бирелә. Аерым алганда, ул болай бирелгән:

Вакланма
чиксез периодик унарлы вакланма — 28.

Бу — сезне кызыксындырган төшенчә 28 нче биттә дигән сүз.

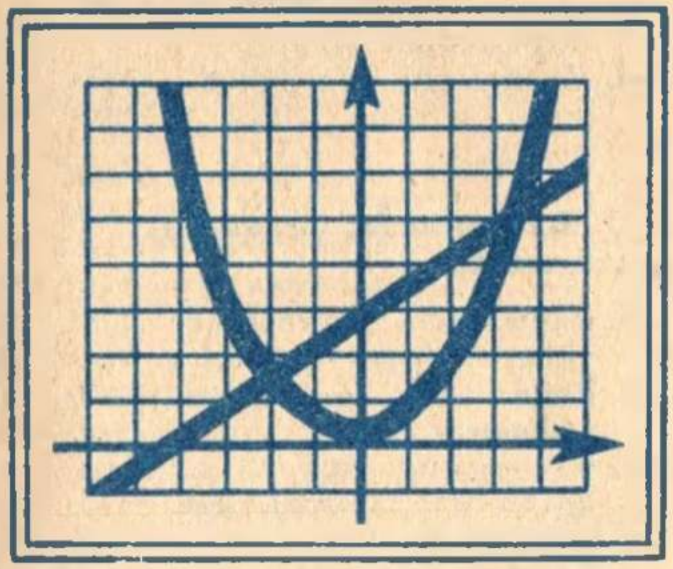
Шул рәвешле «рациональ аңлатма» терминын алфавит күрсәткечендә «Аңлатма» бүлегеннән, «туры почмак» терминын «Почмак» бүлегеннән, «модульләрнең үзлекләре» терминын «Үзлекләр» бүлегеннән табарсыз.

Теге яисә бу пунктны баштан ахырга кадәр укысагыз, шушы пунктта файдаланылган төшенчә кергән битләр яисә пунктлар номерын кайчакта текст эчендә дә табарсыз. Уңайлылык өчен аксиома һәм теоремаларның номерлары текстта аерым күрсәтелгән. Геометрия аксиомалары А. В. Погореловның «Геометрия 6—10» кулланмасында кабул ителгән тәртиптә номерланган. Белешмәлектә теоремалар болай номерлана: Т.5.3 — димәк, сүз 5 нче бүлектәге 3 нче теорема турында бара.

Сезгә уңышлар теләп, белешмәлек игелекле ярдәмчегез булыр дигән өмет белән калабыз.

Авторлар

АЛГЕБРА ҺӘМ АНАЛИЗ БАШЛАНГЫЧЛАРЫ



I БҮЛЕК. САННАР

§ 1. Натураль саннар

1. Натураль саннарны язу . . 11
2. Натураль саннар өстендә арифметик гамәлләр . . . —
3. Калдыклы бүлү 12
4. Бүленүчәнлек билгеләре . . —
5. Натураль санны гади тапкырлаучыларга таркату . . 14
6. Берничә натураль санның иң зур уртак бүлүчесе 15
7. Берничә натураль санның иң кечкенә уртак кабатлысы 16
8. Алгебрада хәрефләр куллану. Үзгәрешлеләр 17

§ 2. Рациональ саннар

9. Гади вакланмалар. Ялгыз һәм аралаш вакланмалар. Катнаш саннар 17
10. Вакланмаларның тигезлеге. Вакланманың төп үзлеге. Вакланмаларны кыскарту 18
11. Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү 19
12. Гади вакланмалар өстендә арифметик гамәлләр . . . 21
13. Унарлы вакланмалар . . . 23
14. Унарлы вакланмалар өстендә арифметик гамәлләр . . 24
15. Процентлар 26
16. Гади вакланманы чиксез унарлы вакланмага әйләндерү 27
17.* Периодик чиксез унарлы вакланманы гади вакланмага әйләндерү 29
18. Координаталар турысы . . 30
19. Рациональ саннар күплеге 31

§ 3. Реаль саннар

20. Иррациональ саннар . . . 32
21. Реаль саннар. Санлы туры 33
22. Кайбер саннар күплекләренең тамгаланышлары . . . —
23. Реаль саннарны чагыштыру —
24. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре 34
25. Санлы аралыклар 35
26. Реаль санның модуле . . . 36
27. Координаталар турысының ике ноктасы арасындагы ераклык формуласы . . . 37
28. Реаль саннар өстендә гамәлләр кагыйдәләре . . . . . —
29. Реаль саннар өстендә арифметик гамәлләрнең үзлекләре 38
30. Пропорцияләр . . . . . . —
31. Санның бөтен өлеше. Санның вакланмалы өлеше 39
32. Натураль күрсәткечле дәрәҗә . . . . —

33. Нуль күрсәткечле дәрәҗә. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗә 40
34. Уңай реаль санның стандарт рәвеше . . . . —
35. Арифметик тамырны билгеләү. Арифметик тамырның үзлекләре 41
36. Тискәре саннан так дәрәҗә тамыр . . . . —
37. Вакланма күрсәткечле дәрәҗә 42
38. Рациональ күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлекләре . . . —
39. Саннарның якынча кыйммәтләре. Абсолют һәм чагыштырма хаталар 43
40. Реаль саннарның киме һәм артыгы белән алынган унарлы якынлашулары . . 45
41.* Натураль саннан квадрат тамыр алу кагыйдәсе . . . —
42. Иррациональ күрсәткечле дәрәҗә турында төшенчә 47
43. Реаль күрсәткечле дәрәҗәләр үзлекләре . . . . . —

§ 4. Комплекслы саннар

44. Комплекслы сан турында төшенчә 48
45. Комплекслы саннар өстендә арифметик гамәлләр . . . —
46. Комплекслы санның алгебраик формасы 49
47. Тигезләмәләрнең комплекслы тамырларын табу . . . 53

II БҮЛЕК. АЛГЕБРАИК АҢЛАТМАЛАР

§ 5. Төп төшенчәләр

48. Алгебраик аңлатмаларның төрләре 53
49. Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган кыйммәтләре. Алгебраик аңлатмаларның билгеләнү өлкәсе 54
50. Аңлатмаларның бердәй рәвешүзгәртүе турында төшенчә . . . . —

§ 6. Бөтен рациональ аңлатмалар

51. Бербуыннар һәм алар өстендә гамәлләр 55
52. Күпбуыннар. Күпбуыннарны стандарт рәвешкә китерү 56
53. Кыскача тапкырлау формулалары 57
54. Күпбуынны тапкырлашучыларга таркату 58
55. Бер үзгәрешлеле күпбуыннар 60
56. Квадрат өчбуынны сызыкча тапкырлаучыларга таркату —
57. $x^n - a^n$ икебуынын тапкырлаучыларга таркату . . . 61
58. Икебуынны натураль дәрәҗәгә күтәрү (Ньютон биномы) . . . . —

§ 7. Вакланмалы рациональ аңлатмалар

59. Рациональ вакланма һәм аның төп үзлеге 62
60. Рациональ вакланмаларны кыскарту 63
61. Рациональ вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү —
62. Рациональ вакланмаларны кушу һәм алу 64
63. Рациональ вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү . . . 65
64. Рациональ вакланманы бөтен дәрәҗәгә күтәрү . . . —
65. Рациональ аңлатмаларны үзгәртү 67

§ 8. Иррациональ аңлатмалар

66. Арифметик тамырларның (радикалларның) иң гади үзгәртүләре 67
67. $\sqrt{a^2} = |a|$ бердәйлеге . . . 69
68. Иррациональ аңлатмаларны үзгәртү . . . . —

III БҮЛЕК. ФУНКЦИЯЛӘР ҺӘМ ГРАФИКЛАР

§ 9. Функцияләрнең үзлекләре

69. Функциянең билгеләмәсе 70
70. Функциянең аналитик бирелеше 71
71. Функцияне таблица ярдәмендә бирү 72
72. Санлы яссылык. Координаталар яссылыгы, координаталар күчәрләре 73
73. Аналитик ысул белән бирелгән функция графигы . . . —
74. Җөп һәм так функцияләр 74
75. Җөп функция графигы . . 75
76. Периодик функцияләр . . . 76
77. Монотон функцияләр . . . 77

§ 10. Функцияләрнең төрләре

78. Даими функция 78
79. Туры пропорциональлек . . 79
80. Сызыкча функция 80
81. Сызыкча функцияләр графикларының үзара торышлары 81
82. Кире пропорциональлек . . 82
83. $y = x^2$ функциясе 83
84. $y = x^3$ функциясе 84
85. Натураль күрсәткечле дәрәҗәле функция . . . . . . —
86. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәле функция 85
87. $y = \sqrt{x}$ функциясе 86
88. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясе 87
89. $y = \sqrt[n]{x}$ функциясе . . . . —
90. Уңай вакланма күрсәткечле дәрәҗәле функция 88
91. Тискәре вакланма күрсәткечле дәрәҗәле функция . . . —
92. $y = [x]$ функциясе 89
93. $y = \{x\}$ функциясе . . . . . —
94. Күрсәткечле функция . . . 90
95. Кире функция. Кире функциянең графигы 92
96. Логарифмик функция . . . 93
97. e саны. $y = e^x$ функциясе . . 94
98. Тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләре 95
99. Тригонометрик функцияләрнең чирекләрдәге тамгалары 97
100. Тригонометрик функцияләрне җөплеккә, таклыкка тикшерү . . . . —
101. Тригонометрик функцияләрнең периодиклыгы . . 98
102. $y = \sin x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы . . . 99
103. $y = \cos x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы . . . 100
104. $y = \mathrm{tg}\, x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы . . . —
105. $y = \mathrm{ctg}\, x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы . . . 101
106.* $y = \mathrm{acrsin}\, x$ функциясе —
107.* $y = \arccos x$ функциясе . . 102
108.* $y = \mathrm{arctg}\, x$ функциясе . . 103
109.* $y = \mathrm{arcctg}\, x$ функциясе . . 105

§ 11. Графикларны үзгәртү

110. $y = mf(x)$ функциясе графигын төзү 105
111. $y = ax^2$, $y = ax^3$ функцияләренең графиклары 106
112. $y = f(x - m) + n$ функциясенең графигын төзү . . . 108
113. Квадрат функциянең графигы 109
114. Квадрат функция графигын төзү ысуллары 110
115. $y = f(kx)$ функциясе графигын төзү 112
116. Тригонометрик функцияләр графикларын кысу һәм сузу 114
117. $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ гармоник тирбәнешенең графигы . . 115

IV БҮЛЕК. ТРАНСЦЕНДЕНТ АҢЛАТМАЛАР

§ 12. Үзгәрешлесе логарифм тамгасы астында булган аңлатмаларны рәвешүзгәртү

118. Трансцендент аңлатма төшенчәсе 117
119. Бирелгән нигез буенча уңай санның логарифмын билгеләү 118
120. Логарифмнарның үзлекләре . . . . —
121. Логарифмның яңа нигезенә күчү 119
122. Логарифмлау һәм потенцирлау 120
123. Унарлы логарифм. Унарлы логарифмның характеристикасы һәм мантиссасы 121

§ 13. Тригонометрик формулалар һәм аларны тригонометрик аңлатмаларның рәвешен үзгәртүдә куллану.

124. Тригонометрик аңлатмалар 122
125. Аргументларны кушу һәм алу формулалары . . . . —
126. Китерү формулалары . . 124
127. Бер үк аргументның тригонометрик функцияләре арасында бәйләнешләр . . . 125
128. Икеләтелгән почмак формулалары 126
129. Дәрәҗәне төшерү формулалары 127
130. Тригонометрик функцияләр суммасын тапкырчыгышка үзгәртү 128
131. Тригонометрик функцияләр тапкырчыгышын суммага үзгәртү 129
132.* $a \cos t + b \sin t$ аңлатмасын $A \sin(t + \alpha)$ рәвешенә үзгәртү . . . . —

133.* Кире тригонометрик функцияләрне эченә алган аңлатмаларны рәвешүзгәртүгә мисаллар 130

V БҮЛЕК. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР ҺӘМ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

§ 14. Бер үзгәрешлеле тигезләмәләр

134. Тигезләмәнең билгеләмәсе. Тигезләмәнең тамырлары 131
135. Тигезләмәләрнең тамырдашлыгы (тигезкөчлелеге) 132
136. Сызыкча тигезләмәләр . . 133
137. Квадрат тигезләмәләр . . —
138. Тулы булмаган квадрат тигезләмәләр 135
139. Виет теоремасы . . . . . —
140. Тигезләмәләр системалары һәм җыелмалары 136
141. Үзгәрешлесе модуль тамгасы астында булган тигезләмәләр 137
142. Тигезләмәнең нәтиҗәсе. Чит тамырлар 138
143. Ваклаучысында үзгәрешле булган тигезләмәләр . . . 139
144. Тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе 140
145. Рациональ тигезләмәләр 141
146. $p(x)=0$ тигезләмәсен аның сул кисәген тапкырлаучыларга таркату юлы белән чишү 142
147. Тигезләмәләрне яңа үзгәрешле кертеп чишү . . . 143
148. Биквадрат тигезләмәләр 144
149. Тигезләмәләр төзеп мәсьәләләр чишү . . . . . . —
150. Иррациональ тигезләмәләр 147
151. Күрсәткечле тигезләмәләр 149
152. Логарифмик тигезләмәләр 150
153. Күрсәткечле — логарифмик тигезләмәләр чишүгә мисаллар 151
154. Иң гади тригонометрик тигезләмәләр 152
155. Тригонометрик тигезләмәләр чишүнең методлары . . 154
156.* Универсаль алыштырып кую (тригонометрик тигезләмәләр өчен) 156
157.* Ярдәмче аргумент кертү методы (тригонометрик тигезләмәләр өчен) 157
158. Тигезләмәләрне график юл белән чишү 158
159.* Параметрлы тигезләмәләр 161

§ 15. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр

160. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләрне чишү 163
161. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләрнең графиклары . . —
162. Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә һәм аның графигы 164

§ 16. Тигезләмәләр системалары

163. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системалары 165
164. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын алыштырып кую юлы белән чишү 166
165. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын кушу юлы белән чишү . . . . . . —
166. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын яңа үзгәрешләр кертү юлы белән чишү 167
167. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын график юл белән чишү 169
168. Ике үзгәрешлеле сызыкча ике тигезләмә системасын тикшерү 170
169.* Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын тапкырлау һәм бүлү методлары белән чишү 171
170. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр системалары 173
171.* Ике үзгәрешлеле тригонометрик тигезләмәләр системалары 174
172. Өч үзгәрешлеле өч тигезләмәләр системалары . . . 175
173. Мәсьәләләрне тигезләмәләр системасы төзү ярдәмендә чишү 176

VI БҮЛЕК. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

§ 17. Үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү

174. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү белән бәйләнгән төп төшенчәләр . . 178

175. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне график юл белән чишү 179
176. Бер үзгәрешлеле сызыкча тигезсезлекләр 180
177. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр системалары . . . —
178. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр җыелмасы 182
179. Вакланмалы сызыкча тигезсезлекләр . . . . . . —
180. Икенче дәрәҗә тигезсезлекләр 184
181. Икенче дәрәҗә тигезсезлекләрне график юл белән чишү 185
182. Модульләр белән бирелгән тигезсезлекләр 187
183. Рациональ тигезсезлекләрне аралыклар методы белән чишү 189
184. Күрсәткечле тигезсезлекләр 191
185. Логарифмик тигезсезлекләр 192
186.* Иррациональ тигезсезлекләр 193
187. Тригонометрик тигезсезлекләрне чишү 195
188. Тигезсезлекләр һәм ике үзгәрешлеле тигезсезлекләрнең системалары 197

§ 18. Тигезсезлекләрне исбатлау

189. Аерма тамгасын бәяләү методы 199
190. Тигезсезлекләрне исбатлауның синтетик методы . . . 200
191. Тигезсезлекләрне каршы куеп исбат итү 200
192.* Тигезләмәләр чишкәндә тигезсезлекләрне куллану 201

VII БҮЛЕК. МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

§ 19. Санлы эзлеклелекләр

193. Эзлеклелекнең билгеләмәсе 202
194. Эзлеклелекне бирү ысуллары 202
195. Эзлеклелекнең үсүе һәм кимүе 203
196. Арифметик прогрессиянең билгеләмәсе 203
197. Арифметик прогрессиянең үзлекләре 204
198. Геометрик прогрессиянең билгеләмәсе 205
199. Геометрик прогрессиянең үзлекләре 206
200. Эзлеклелекнең чикләмәсе турында төшенчә 208
201. Эзлеклелекләрнең чикләмәләрен исәпләү 209
202. $|q|<1$ булганда чиксез геометрик прогрессиянең суммасы 210

§ 20. Функциянең чикләмәсе

203. $x \ \infty$ кә омтылганда $y=f(x)$ функциясенең чикләмәсе. Горизонталь асимптота . 211
204. $x \ \infty$ кә омтылганда функцияләрнең чикләмәләрен исәпләү 213
205. Ноктада функция чикләмәсе. Өзлексез функцияләр 214
206. Вертикаль асимптота . . . 215
207. Ноктада функциянең чикләмәләрен исәпләү 217

§ 21. Чыгарылма һәм аның кулланылышы

208. Аргументның үсемтәсе. Функциянең үсемтәсе 218
209. Чыгарылманың билгеләнмәсе 219
210. Дифференциаллау формулалары. Чыгарылмалар таблицасы 220
211. Сумманы, тапкырчыгышны, өлешне дифференциаллау 221
212. Катлаулы функция һәм аны дифференциаллау . . 223
213. Чыгарылманың физик мәгънәсе 223
214. Икенче чыгарылма һәм аның физик мәгънәсе . . . 224
215. Функция графигына орынма 224
216. Чыгарылманы функциянең монотонлыгына тикшерүдә куллану 228
217. Чыгарылманы функцияне экстремумга тикшергәндә куллану 229
218. Кисемтәдә өзлексез функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен эзләү 232
219.* Йомык булмаган аралыкта өзлексез функциянең иң зур яки иң кечкенә кыйммәтен эзләү 233
220. Зурлыкларның иң зур яки иң кечкенә кыйммәтләрен эзләүгә мәсьәләләр . . . 235

221. Чыгарылманы бердәйлекләрне исбатлау өчен куллану 239
222. Чыгарылманы тигезсезлекләрне исбатлау өчен куллану 240
223. Функция графигын төзүнең гомуми схемасы 241

§ 22. Башлангыч функция һәм интеграл

224. Башлангыч функция . . . 244
225. Башлангыч функцияләрнең таблицасы 245
226. Башлангыч функцияләрне исәпләү кагыйдәләре . . . 246
227. Интеграл 248
228. Интеграл белән башлангыч функция арасындагы бәйләнеш 250
229. Интегралларны исәпләү кагыйдәләре 251
230. Интегралны яссы фигураларның мәйданнарын исәпләү өчен куллану 252

I БҮЛЕК. САННАР

§ 1. Натураль саннар

1. Натураль саннарны язу. Предметларны санау яисә бериш предметлар арасындагы теге яки бу предметның тәртип номерын күрсәтү өчен файдаланыла торган 1, 2, 3, 4, 5, ... саннары натураль саннар дип атала. Унарлы санау системасында теләсә кайсы натураль сан 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрлары ярдәмендә языла. Мәсәлән, 2457 язуында 2 — меңнәр, 4 — йөзләр, 5 — дистәләр һәм 7 — берәмлекләр цифрын белдерә, ягъни $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Гомумән, әгәр a — меңнәр, b — йөзләр, c — дистәләр һәм d — берәмлекләр цифры булса, $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$ була. Шулай ук кыскача язма $\overline{abcd}$ да кулланыла ($abcd$ дип язарга ярамый, чөнки андый язма математикада кабул ителгән килешү буенча a, b, c, d саннарының тапкырчыгышы дигән сүз). Димәк, $\overline{abcde}$ язмасы $a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$ санын белдерә ($a \neq 0$).

2. Натураль саннар өстендә арифметик гамәлләр. Ике натураль санны кушу яисә тапкырлауның нәтиҗәсе һәрвакыт натураль сан була: әгәр m, n — натураль саннар булса, $p = m + n$ натураль сан, m һәм n — ***кушылучылар***, p — ***сумма;*** $p = mn$ шулай ук натураль сан, m, n — ***тапкырлаучылар***, p — ***тапкырчыгыш.***

Натураль саннарны кушу һәм тапкырлауның түбәндәге үзлекләре бар:

1^0. $a + b = b + a$ (кушуның *урын алыштыру* үзлеге).

2^0. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (кушуның *оештыру* үзлеге).

3^0. $ab = ba$ (тапкырлауның *урын алыштыру* үзлеге).

4^0. $(ab)c = a(bc)$ (тапкырлауның *оештыру* үзлеге).

5^0. $a(b + c) = ab + ac$ (тапкырлауның кушуга карата *тарату* үзлеге).

Натураль саннарны алу яисә бүлүнең нәтиҗәсе һәрвакыт натураль сан була алмый: мәсәлән, $7 - 4 = 3$ — натураль сан, ә $4 - 7 = -3$ — натураль булмаган сан; $21 : 7 = 3$ — натураль сан, ә $11 : 2 = 5{,}5$ — натураль булмаган сан.

Әгәр m, n, k — натураль сан булсалар, $m - n = k$ булганда m — ***кимүче***, n — ***киметүче***, k — ***аерма*** диләр; $m : n = k$ булганда, m — ***бүленүче***, n — ***бүлүче***, k — ***өлеш*** диләр, m санын шулай ук n санының *кабатлысы*, ә n санын m санының *бүлүчесе* дип тә әйтәләр. Әгәр m n санына кабатлы булса, $m=kn$ булырдай натураль k саны бар.

Саннардан арифметик гамәлләрнең тамгалары һәм җәяләр ярдәмендә *санлы аңлатмалар* төзелә. Кабул ителгән тәртиптә санлы аңлатмаларда күрсәтелгән гамәлләрне эшләсәк, *аңлатманың кыйммәте* дип аталучы сан килеп чыгар.

Санлы аңлатмада арифметик гамәлләрнең тәртибен искә төшерик: иң элек җәя эчендәге гамәлләр башкарыла; теләсә кайсы җәяләр эчендә дә башта — тапкырлау һәм бүлү, аннары кушу һәм алу эшләнә. Мәсәлән,

$$(28\cdot 93+(1927-1873)\cdot 31):6-710$$

аңлатмасының кыйммәтен табарга кирәк булса, гамәлләр тәртибе мондый була:

$$(28\overset{1}{\cdot}93\overset{4}{+}(1927\overset{2}{-}1873)\overset{3}{\cdot}31)\overset{5}{:}6\overset{6}{-}710$$

3. Калдыклы бүлү. Натураль m саны натураль n санына бүленмәсә, ягъни $m=nk$ булырдай натураль k саны табылмаса, калдыклы бүлү башкарыла. Мәсәлән, 43 санын 18 санына бүлгәндә өлештә 2 һәм калдыкта 7 килеп чыга, ягъни $43=18\cdot 2+7$. Гомумән, әгәр m — *бүленүче*, n — *бүлүче* ($m>n$), p — *өлеш* һәм r — *калдык* булса,

$$m=np+r$$

була, монда $r<n$. Биредә m, n, p, r — натураль саннар (m n га калдыксыз бүленгән очтакта гына $r=0$ була). Мәсәлән, әгәр $n=3$, ә $r=2$ булса, $m=3p+2$ килеп чыга. Бу 3 кә бүлгәндә 2 калдык бирүче саннар формуласы.

Мисал. 36 421 санын 25 санына бүлүдән өлеш һәм калдыкны табарга.

Чишү. «Баганалап» бүләбез:

$$\begin{array}{r|l}
36421 & 25 \\ \cline{2-2}
-\underline{25} & 1456 \\
114 & \\
-\underline{100} & \\
142 & \\
-\underline{125} & \\
171 & \\
-\underline{150} & \\
21 &
\end{array}$$

димәк, өлеш 1456, ә калдык 21. (1) тигезлегеннән файдаланып, яза алабыз: $36\,421=25\cdot 1456+21$.

4. Бүленүчәнлек билгеләре. Кайбер очракларда, натураль m санын натураль n санына бүлмичә дә, m n га калдыксыз бүленәме, юкмы, дигән сорауга җавап биреп була. Бу сорауга җавапны төрле бүленүчәнлек билгеләре ярдәмендә табарга була.

Т.1.1. Әгәр һәрбер кушылучы ниндидер бер санга бүленсә, сумма да шул санга бүленә *(сумманың бүленүчәнлеге турында теорема).*

Әмма сумманың һәрбер кушылучысы ниндидер санга бүленмәсә, сумма да шул санга бүленми дип уйларга ярамый. Мәсәлән, 37 дә, 19 да 4 санына бүленми, ә $37+19$ ның суммасы 4 кә бүленә. Әмма шунысын да әйтеп китик, кушылучыларның берсеннән башка барысы да ниндидер санга бүленсә дә, сумма ул санга бүленми.

Т.1.2. Әгәр тапкырчыгышның бер генә тапкырлашучысы булса да ниндидер бер санга бүленсә, тапкырчыгыш үзе дә бу санга бүленә *(тапкырчыгышның бүленүчәнлеге турында теорема).*

Мәсәлән, тапкырлау гамәлләрен эшләмичә дә, $105\cdot48\cdot93\times54$ тапкырчыгышы 5 кә бүленә дип расларга була, чөнки 105 5 кә бүленә.

Т.1.3. Әгәр натураль санның соңгы цифры 2 гә бүленсә һәм бары тик шул чагында гына натураль сан үзе дә 2 гә бүленә *(2 гә бүленүчәнлек билгесе).*

Т.1.4. Әгәр натураль сан 0 яки 5 цифрына тәмамланса һәм бары тик шул чагында гына натураль сан үзе дә 5 кә бүленә *(5 кә бүленүчәнлек билгесе).*

Т.1.5. Әгәр натураль санның соңгы цифры 0 булса һәм бары тик шул чагында гына натураль сан үзе дә 10 га бүленә *(10 га бүленүчәнлек билгесе).*

Т.1.6. Кимендә 3 цифры булган натураль сан шул санның соңгы ике цифрыннан ясалган икеурынлы сан 4 кә бүленсә һәм бары тик шул чагында гына 4 кә бүленә *(4 кә бүленүчәнлек билгесе).*

Исбатлауны бишурынлы сан $\overline{abcde}$ өчен үткәрик. $\overline{abcde}=a\cdot10\,000+b\cdot1000+c\cdot100+d\cdot10+e$. 100, 1000 һәм 10 000 4 кә бүленгәнлектән, $10\,000a+1000b+100c$ суммасы да 4 кә бүленә. Димәк, әгәр икеурынлы $d\cdot10+e$ саны 4 кә бүленсә, $\overline{abcde}$ да 4 кә бүленә; әгәр инде $10d+e$ 4 кә бүленмәсә, $\overline{abcde}$ да 4 кә бүленми.

Мәсәлән, 15 436 саны 4 кә бүленә, чөнки 36 саны 4 кә бүленә. 372 514 саны 4 кә бүленми, чөнки 14 4 кә бүленми.

Т.1,7. Әгәр натураль санның цифрлары суммасы 3 кә бүленсә һәм бары тик шул чагында гына натураль сан үзе дә 3 кә бүленә *(3 кә бүленүчәнлек билгесе).*

Исбатлауны дүртурынлы сан $\overline{abcd}$ өчен үткәрик. $\overline{abcd}=1000a+100b+$ $+10c+d=(999a+a)+(99b+b)+(9c+c)+d=(999a+99b+9c)+$ $=(a+b+c+d)$.

9, 99, 999 3 кә бүленә, шуңа күрә $999a+99b+9c$ 3 кә бүленә, һәм $a+b+c+d$ цифрлары суммасы 3 кә бүленсә һәм бары тик шул чагында гына сумма үзе дә $(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$ 3 кә бүленер.

Мәсәлән, 2742 саны 3 кә бүленә, чөнки бу санның цифрлары суммасы $2+7+4+2=15$ 3 кә бүленә. 17 941 саны 3 кә бүленми, чөнки бу санның цифрлары суммасы 22 гә тигез, ә 22 3 кә бүленми.

Т.1.8. Әгәр натураль санның цифрлары суммасы 9 га бүленсә һәм бары тик шунда гына натураль сан үзе дә 9 га бүленә *(9 га бүленүчәнлек билгесе).*

5. Натураль санны гади тапкырлаучыларга таркату. Әгәр санның ике генә бүлүчесе булса (сан үзе һәм берәмлек), ул *гади* сан дип атала; әгәр санның икедән күбрәк бүлүчесе булса, ул *тезмә* сан дип атала.

Мәсәлән, 19 саны — гади сан, чөнки аның ике генә бүлүчесе бар: 1 һәм 19; 35 саны тезмә сан, аның дүрт бүлүчесе бар: 1, 5, 7, 35. Гади сан 19 ны ике натураль санның тапкырчыгышы рәвешендә бер генә ысул белән, тапкырлашучыларның тәртибен исәпкә алмый гына күз алдына китерергә мөмкин: $19=1\cdot19$; тезмә сан 35 не ике натураль санның тапкырчыгышы рәвешендә бердән артыграк ысул белән күз алдына китерергә мөмкин: $35=1\cdot35=5\cdot7$.

Шунысын искәртик, 1 саны гади санга да, тезмә санга да керми.

Т.1.9. Теләсә кайсы тезмә натураль санны гади тапкырлаучыларга таркатырга һәм бер генә ысул белән таркатырга мөмкин.

Саннарны гади тапкырлаучыларга таркатканда бүленүчәнлек билгеләреннән файдаланалар һәм баганалап язу кулланалар. Бу вакытта бүлүче — вертикаль сызыктан уңда, ә өлеш бүленүченең астына языла. Мәсәлән, 360 саны өчен бу язу түбәндәгечә булыр:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Әгәр санны гади тапкырлаучыларга таркатканда бер үк a тапкырлаучысы n тапкыр очраса, аны кыскача болай язалар: a^n, ягъни $\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{тапкырлаучы}}=a^n$.

a^n аңлатмасы — *дәрәҗә*, a — *дәрәҗәнең нигезе*, n — *дәрәҗә күрсәткече.*

Шуңа күрә язарга була: $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5$.

6. Берничә натураль санның иң зур уртак бүлүчесе. 72 һәм 96 саннары бирелгән булсын. 72 нең барлык бүлүчеләрен язып чыгыйк:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

96 санының барлык бүлүчеләрен язып чыгыйк:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Язылган саннар арасында бертөрлеләре бар:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Шушы саннар — 72 һәм 96 саннарының *уртак бүлүчеләре,* ә арада иң зурысы *иң зур уртак бүлүчесе* дип атала.

Бирелгән теләсә нинди a һәм b натураль саннарының иң зур уртак бүлүчесен табарга була. Ул Б(a, b) дип билгеләнә («a, b дан Б» дип укыла). Әгәр a һәм b саннары өчен Б$(a, b)=1$ булса, a һәм b саннары *үзара гади саннар* дип атала.

Мәсәлән, һәрберсе аерым-аерым тезмә сан булсалар да, 72 һәм 35 саннары үзара гади саннар.

Берничә санның иң зур уртак бүлүчесен табу өчен, бу саннарны гади тапкырлаучыларга таркатырга һәм, аларның һәрберсен иң кечкенә күрсәткече белән алып, гомуми гади тапкырлаучыларның тапкырчыгышын табарга кирәк.

1 нче мисал. Б(48, 60, 72) ны табарга.

Чишү. $48=2\cdot3$; $60=2^2\cdot3\cdot5$; $72=2^3\cdot3^2$. Димәк, Б$(48, 60, 72)=2^2\cdot3$.

Җавап: Б$(48, 60, 72)=12$.

2 нче мисал. Б(3780, 7056) ны табарга.

Чишү. Тапкырлаучыларга таркатыйк:

3780	2	7056	2
1890	2	3528	2
945	3	1764	2
315	3	882	2
105	3	441	3
35	5	147	3
7	7	49	7
1		7	7
		1	

$$3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7 \qquad 7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$$

Ул чагында Б(3780, 7056)$=2^2\cdot 3^2\cdot 7$; 3780 санының таркалашына да, 7056 санының таркалышына да кергән гади тапкырлаучылар алынды.

Җавап: Б(3780, 7056)=252.

7. Берничә натураль санның иң кечкенә уртак кабатлысы.

12 һәм 18 саннары бирелгән булсын. 12 нең кабатлысы булган саннарны языйк:

12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

18 нең кабатлысы булган саннарны языйк:

18, 36, 54, 72, ...

Язылган саннар арасында бертөрлеләре бар:

36, 76, ...

Бу саннарның барысын да 12 һәм 18 саннарының *уртак кабатлылары* диләр, ә арада иң кечкенә санны — 36 санын — 12, 18 саннарының *иң кечкенә уртак кабатлысы* диләр.

a һәм b ирекле натураль саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы да шулай билгеләнә, ул К(a, b) дип языла («a, b дан К» дип укыла). a һәм b саннарының теләсә нинди уртак кабатлысы К(a, b) га бүленә.

Берничә санның иң кечкенә уртак кабатлысын табу өчен, ул саннарны гади тапкырлаучыларга таркатырга һәм, һәрберсен иң зур күрсәткече белән алып, килеп чыккан барлык гади тапкырлаучыларның тапкырчыгышын табарга кирәк.

Мисал. К(3780, 7056) ны табарга.

Чишү. $3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$; $7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$ (6 нчы пунктны карагыз).

Ул чагында К(3780, 7056)$=2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2$, ягъни 3780 һәм 7056 саннарының берсенең генә булса да таркалышына кергән барлык гади тапкырлаучылар алынган.

Димәк, $К(3780, 7056) = 105\,840$.

Теләсә нинди натураль a һәм b өчен

$Б(a, b) \cdot К(a, b) = ab$ тигезлеге дөрес. Әгәр, аерым алганда, a һәм b саннары үзара гади булсалар, ягъни $Б(a, b) = 1$ булса, $К(a, b) = ab$ була. Бу *үзара гади ике санның иң кечкенә уртак кабатлысы шушы саннарның тапкырчыгышына тигез* дигән сүз.

8. Алгебрада хәрефләр куллану. Үзгәрешлеләр. Алгебрада еш кына саннарның конкрет үзлекләрен хәрефләр ярдәмендә язалар. Мәсәлән, кушуның урын алыштыру үзлеген (кушылучыларның урынын алыштырудан сумма үзгәрми) болай язалар: $a + b = b + a$, биредә a һәм b урынына теләсә нинди сан куярга була: $3 + 5 = 5 + 3$; $100 + 3501 = 3501 + 100$ һ. б. ш. Хәреф урынына куела торган санны *хәрефнең кыйммәте* диләр. Кайбер очракларда (мәсәлән, тигезләмәләрдә), язылган тигезлек дөрес булсын өчен, хәреф урынына билгеле бер саннарны гына куярга ярый. Мәсәлән, $7 + x = 10$ бары тик $x = 3$ булганда гына дөрес тигезлеккә әверелә. Алгебрада кулланыла торган хәрефләрне *үзгәрешлеләр* диләр; мондый атаманың мәгънәсе шунда, хәрефнең санлы кыйммәтен үзгәртергә мөмкин, мәсәлән, $a + b = b + a$ тигезләмәсе $a = 3$, $b = 5$ өчен дә, $a = 5$, $b = 19$ һ. б. ш. өчен дә дөрес булачак. $7 + x = 10$ тигезлегендә $x = 3$ дип куярга да, $x = 5$ дип куярга да була; аерма шунда, беренче очракта санлы тигезлек дөрес булыр, ә икенче очракта дөрес булмас. $Б(a, b) = 1$ тигезлеге (6 нчы пунктны карагыз) a һәм b үзгәрешлеләренең түбәндәге кыйммәтләре өчен дөрес:

$$a = 18,\ b = 25;\ a = 100,\ b = 99;\ a = 13,\ b = 1000 \text{ һ. б.}$$

Бу тигезлек үзгәрешлеләрнең түбәндәге кыйммәтләре өчен дөрес түгел.

$$a = 8,\ b = 6;\ a = 25,\ b = 150;\ a = 7,\ b = 777 \text{ һ. б. ш.}$$

§ 2. Рациональ саннар

9. Гади вакланмалар. Ялгыз һәм аралаш вакланмалар. Катнаш саннар. *Гади вакланма* — $\frac{m}{n}$ рәвешендәге сан ул, биредә m һәм n — натураль саннар, мәсәлән, $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8} \cdot m$ саны *вакланманың санаучысы*, n саны *вакланманың ваклаучысы* дип атала. Аерым алганда, $n = 1$ булырга мөмкин, бу очракта вакланма $\frac{m}{1}$ рәвешен ала һәм аны m дип кенә язалар. Бу *теләсә нинди натураль санны ваклаучысы 1 булган гади вак-*

ланма рәвешенә китерергә мөмкин дигән сүз. $\frac{m}{n}$ — $m:n$ язылышының икенче варианты.

Гади вакланмалар ялгыз һәм аралаш вакланмаларга аерыла. Әгәр $\frac{m}{n}$ вакланмасының санаучысы ваклаучысыннан кечерәк булса, ул — *ялгыз вакланма* дип, ә санаучысы ваклаучысыннан зуррак яки аңа тигез булса, *аралаш вакланма* дип атала.

Теләсә нинди аралаш вакланманы натураль сан һәм ялгыз вакланманың суммасы рәвешендә күрсәтергә мөмкин (яисә, әгәр $\frac{m}{n}$ вакланмасында m n санына кабатлы булса, натураль сан рәвешендә күрсәтергә мөмкин, мәсәлән, $\frac{16}{4}=4$).

Мисал: Аралаш вакланманы натураль сан һәм ялгыз вакланма суммасы рәвешенә китерергә кирәк: а) $\frac{28}{5}$; б) $\frac{43}{13}$.

Чишү. а) $\frac{28}{5}+\frac{25+3}{5}=\frac{25}{5}+\frac{3}{5}=5+\frac{3}{5}$;

б) $\frac{43}{13}=\frac{39+4}{13}=\frac{39}{13}+\frac{4}{13}=3+\frac{4}{13}$.

Натураль сан һәм ялгыз вакланманың суммасын кушу тамгасыннан башка гына язу кабул ителгән, ягъни $5+\frac{3}{5}$ урынына $5\frac{3}{5}$, ә $3+\frac{4}{13}$ урынына $3\frac{4}{13}$ дип язалар. Шушылай язылган сан *катнаш сан* дип атала. Ул ике кисәктән: бөтеннән һәм вакланмадан тора. Мәсәлән, $3\frac{4}{13}$ санының бөтен өлеше — 3 кә, ә вакланма өлеше $\frac{4}{13}$ кә тигез. Һәрбер аралаш вакланманы *катнаш сан* (яисә натураль сан) рәвешендә язарга мөмкин. Киресенчә дә дөрес: һәрбер катнаш яки натураль санны аралаш вакланма рәвешендә язарга мөмкин. Мәсәлән, $4\frac{1}{3}=$ $=4+\frac{1}{3}=\frac{12}{3}+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}\cdot 3=\frac{3}{1}$.

10. Вакланмаларның тигезлеге. Вакланманың төп үзлеге. Вакланмаларны кыскарту. $\frac{a}{b}$ һәм $\frac{c}{d}$ вакланмалары $ad=bc$ булганда *тигез* булалар. Мәсәлән, $\frac{3}{5}$ һәм $\frac{9}{15}$ вакланмалары тигез (чөнки $3\cdot 15=5\cdot 9$); $\frac{12}{7}$ һәм $\frac{24}{14}$ вакланмалары тигез (чөнки $12\cdot 14=7\cdot 24$).

Вакланмалар тигезлеге билгеләмәсеннән $\frac{a}{b}$ һәм $\frac{am}{bm}$ вакланмалары тигез икәнлеге килеп чыга, чөнки $a(bm)=b(am)$; биредә без натураль саннарны тапкырлауның оештыру һәм урын алыштыру үзлекләрен файдаланабыз (2 нче пунктны карагыз). Димәк, $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, ягъни *әгәр бирелгән вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын бер үк натураль санга тапкырласак яки бүлсәк, бирелгән вакланмага тигез вакланма килеп чыгар.* Бу үзлек вакланманың төп үзлеге дип атала.

Вакланманың төп үзлегеннән файдаланып, кайчакта бирелгән вакланманы икенче, бирелгән вакланмага тигез, ләкин санаучысы да, ваклаучысы да кечерәк булган вакланма белән алыштырырга мөмкин. Мондый алыштыруны вакланманы кыскарту диләр. Мәсәлән, $\frac{45}{60}=\frac{15}{20}$ (санаучы һәм ваклаучының икесен дә бер үк 3 санына бүлдек); килеп чыккан вакланманы, санаучысын һәм ваклаучысын 5 кә бүлеп, яңадан кыскартырга мөмкин, ягъни $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

Гомумән, әгәр санаучысы белән ваклаучысы үзара гади саннар булмасалар, вакланманы кыскартырга мөмкин (6 нчы пунктны карагыз); әгәр инде санаучы белән ваклаучы үзара гади саннар булсалар, бу *кыскартылмас вакланма* була; мәсәлән, $\frac{3}{4}$ — кыскартылмас вакланма. Вакланманы кыскартуның төп максаты — бирелгән вакланманы аңа тигез кыскартылмас вакланма белән алыштыру.

11. Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү. Ике вакланма — $\frac{2}{3}$ һәм $\frac{15}{8}$ бирелгән булсын. Аларның ваклаучылары төрле: 3 һәм 8, ләкин, вакланманың төп үзлегеннән файдаланып (10 нчы пунктны карагыз), бу вакланманы аларга тигез, ләкин ваклаучылары бертөрле булган икенче вакланмалар белән алыштырырга мөмкин. Болай үзгәртү *вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү* дип атала. $\frac{2}{3}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да 8 гә тапкырласак, $\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{16}{24}$ килеп чыгар; $\frac{15}{8}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да 3 кә тапкырласак, $\frac{15\cdot 3}{3\cdot 8}=\frac{45}{24}$ килеп чыгар. Шулай итеп, $\frac{2}{3}$ һәм $\frac{15}{8}$ вакланмалары уртак ваклаучыга китерелде:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24};\quad \frac{15}{8}=\frac{45}{24}.$$

Әйтергә кирәк, бу бирелгән мәсьәләнең бердәнбер чишелеше түгел. Мәсәлән, вакланмаларны 48 уртак ваклаучысына китерергә мөмкин:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot16}{3\cdot16}=\frac{32}{48},\quad \frac{15}{8}=\frac{15\cdot6}{8\cdot6}=\frac{90}{48};$$

шулай ук 72 уртак ваклаучысына да китерергә мөмкин:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot24}{3\cdot24}=\frac{48}{72};\quad \frac{15}{8}=\frac{15\cdot9}{8\cdot9}=\frac{135}{72},$$

һәм гомумән, бер үк вакытта 3 кә дә, 8 гә дә бүленүче теләсә нинди ваклаучыга китерергә мөмкин иде.

Шул рәвешле, вакланмаларны уртак ваклаучыга төрле юллар, ысуллар белән китерергә мөмкин, ләкин гадәттә вакланмаларны ваклаучыларның *иң кечкенә уртак кабатлысына* тигез булган иң кечкенә уртак ваклаучыга китерергә тырышалар.

Мисал. $\frac{7}{24}$ һәм $\frac{11}{30}$ вакланмаларын иң кечкенә уртак ваклаучыга китерергә.

Чишү. 24 һәм 30 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысын табабыз, ягъни К(24, 30) = 120 (7 нче пунктны карагыз). 120 : 24 = 5 була, димәк, $\frac{7}{24}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да 5 кә тапкырларга кирәк.

$$\frac{7}{24}\cdot5=\frac{7\cdot5}{24\cdot5}=\frac{35}{120}.$$

120 : 30 = 4 булганлыктан, $\frac{11}{30}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да 4 кә тапкырларга кирәк:

$$\frac{11}{30}=\frac{11\cdot4}{30\cdot4}=\frac{44}{120}.$$

Вакланмалар уртак ваклаучыга китерелде:

$$\frac{7}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{44}{120}.$$

5 һәм 4 саннарын беренче һәм икенче вакланма өчен *өстәмә тапкырлаучылар* дип атыйлар. Түбәндәгечә язу файдаланыла:

$$\frac{7}{24}=\frac{7^{5}}{24}=\frac{35}{120};\quad \frac{11}{30}=\frac{11^{4}}{30}=\frac{44}{120}.$$

Димәк, вакланмаларны иң кечкенә уртак ваклаучыга китерү өчен, түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) ваклаучыларның иң кечкенә уртак кабатлысын табарга;

2) иң кечкенә уртак кабатлыны һәрбер ваклаучыга бүлеп өстәмә тапкырлаучыларны исәпләп чыгарырга;

3) һәрбер вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын тиешле өстәмә тапкырлаучыга тапкырларга.

12. Гади вакланмалар өстендә арифметик гамәлләр. Гади вакланмаларны *кушу* болай эшләнә:

а) вакланмаларның ваклаучылары бертөрле булса, беренче вакланманың санаучысына икенче вакланманың санаучысын кушалар һәм шул ук ваклаучыны калдыралар, ягъни, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

б) вакланмаларының ваклаучылары төрле булса, вакланмаларны башка уртак ваклаучыга китерәләр (иң кечкенә уртак ваклаучыга китерү уңышлырак була), аннары а) кагыйдәсен кулланалар.

1 нче мисал. $\frac{7}{24}$ һәм $\frac{11}{30}$ вакланмаларын кушарга.

Чишү. Табыгыз:

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^5}{24}+\frac{11^4}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$$

Гади вакланмаларны *алу* түбәндәгечә башкарыла;

а) вакланмаларның ваклаучылары бертөрле булса,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \text{ була;}$$

б) ваклаучылар төрле булса, башта вакланмаларны уртак ваклаучыга китерәләр, аннары а) кагыйдәсен кулланалар.

Гади вакланмаларны *тапкырлау* түбәндәгечә башкарыла:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

ягъни санаучыларны — аерым, ваклаучыларны аерым тапкырлыйлар, беренче тапкырчыгышны — санаучы, икенче тапкырчыгышны ваклаучы итәләр.

Мәсәлән, $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

Гади вакланмаларны *бүлү* түбәндәгечә башкарыла:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

ягъни бүленүче $\frac{a}{b}$ ны $\frac{c}{d}$ бүлүчесенең киресе булган $\frac{c}{d}$ вакланмасына тапкырлыйлар.

Мәсәлән, $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}$.

2 нче мисал. Санлы аңлатманың кыйммәтен табарга:
$\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}$.

Чишү. 1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4\cdot12}{9\cdot5}$. Санаучыны һәм ваклаучыны 3 кә кыскартып (моны санаучыда һәм ваклаучыда тапкырлау гамәлен башкарганчы эшләү файдалы), $\frac{4\cdot4}{3\cdot5}$ не табарбыз, ягъни $\frac{16}{15}$.

Димәк, $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{16}{15}$.

2) $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7\cdot6}{8\cdot5}=\frac{7\cdot3}{4\cdot5}=\frac{21}{20}$.

3) $\frac{16}{15}+\frac{21}{20}-\frac{11}{30}$ аңлатмасының кыйммәтен тапканда кушу һәм алу гамәлләрен берьюлы башкарырга мөмкин. 15, 20, 30 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы 60 саны була. Өстәмә тапкырлаучылар файдаланып, барлык өч вакланманы да 60 ваклаучысына китерик: беренче вакланма өчен өстәмә тапкырлаучы — 4, икенчесе өчен — 3, өченчесе өчен — 2. Табабыз:

$$\frac{16^4}{15}+\frac{21^3}{20}-\frac{11^2}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$$

Мисал. Гамәлләрне эшләргә: а) $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}$; б) $1\frac{2}{5}\cdot2\frac{1}{7}$.

Чишү. а) **Беренче ысул.** Бирелгән катнаш саннарның һәрберсен аралаш вакланмага әйләндерик, аннары кушуны эшлик:

$$2\frac{1}{7}=2+\frac{1}{7}=\frac{14}{7}+\frac{1}{7}=\frac{15}{7};\quad 3\frac{2}{3}=3+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}+\frac{2}{3}=\frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{7}+\frac{11}{3}=\frac{15^3}{7}+\frac{11^7}{3}=\frac{45}{21}+\frac{77}{21}=\frac{122}{21}.$$

Хәзер $\frac{22}{21}$ аралаш вакланмасын катнаш санга әйләндерик:

$$\frac{122}{21}=\frac{105+17}{21}=\frac{105}{21}+\frac{17}{21}=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}.$$

Икенче ысул. Табабыз: $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{3}=\left(2+\frac{1}{7}\right)+\left(3+\frac{2}{3}\right)=(2+3)+\left(\frac{1^3}{7}+\frac{2^7}{3}\right)=5+\left(\frac{3}{21}+\frac{14}{21}\right)=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}$.

б) Катнаш саннарны тапкырлаганда һәм бүлгәндә һәрвакыт аралаш вакланмаларга күчәләр:

$$1\frac{2}{5}=\frac{7}{5};\quad 2\frac{1}{7}=\frac{15}{7}.$$

Димәк, $1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{7}=\frac{7}{5}\cdot\frac{15}{7}=\frac{7\cdot 15}{5\cdot 7}=3.$

13. Унарлы вакланмалар. Ваклаучысы 10 га, 100 гә, 1000 гә һәм гомумән 10^n га тигез ялгыз вакланманы унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин. Мәсәлән, $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{48}{100}=0{,}48$; $\frac{21}{1000}=0{,}021$. Катнаш санны яисә ваклаучысы югарыда күрсәтелгән аралаш вакланманы да (аны башта катнаш санга әйләндереп) шул рәвешле язарга мөмкин. Мәсәлән, $2\frac{3}{10}=2{,}3$; $\frac{317}{100}=3\frac{17}{100}=3{,}17$. Мондый очракларда катнаш санның бөтен өлешен вакланма өлешенең санаучысыннан өтер белән аералар. Шулай итеп, унарлы вакланма — 10^n ваклаучылы вакланма язылышының башка формасы ул.

Ваклаучысы 10 санының нindидер дәрәҗәсенең бүлүчесе булган теләсә нинди гади вакланманы унарлы вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Мәсәлән, 4 — 100 санының бүлүчесе, шуңа күрә $\frac{3}{4}$ вакланмасын унарлы вакланма рәвешенә китерергә мөмкин: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$;

125 — 1000 санының бүлүчесе, шуңа күрә $\frac{196}{125}$ вакланмасын унарлы вакланма рәвешенә китерергә мөмкин:

$$\frac{196}{125}=\frac{196\cdot 8}{125\cdot 8}=\frac{1568}{1000}=1{,}568.$$

Гади вакланманы унарлы вакланма рәвешенә китерү турында гомуми нәтиҗә ясыйк: әгәр вакланманың ваклаучысын гади тапкырлаучыларга таркатканда 2 һәм 5 саннары гына булса, бу вакланманы унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин, әгәр инде вакланма кыскармый торган булып, аның ваклаучысын гади тапкырлаучыларга таркатканда, 2 һәм 5 саннарыннан кала, башка гади тапкырлаучылар да керсә, бу вакланманы унарлы вакланма рәвешендә язып булмый.

7,234 унарлы вакланмасын тикшерик:

$$7{,}234=7\frac{234}{1000}=7+\frac{200+30+4}{1000}=7+\frac{200}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{4}{1000}=$$

$$=7+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}.$$

Димәк, 7,234 вакланмасында 7 берәмлек, 2 унынчы, 3 йөзенче һәм 4 меңенче өлеш бар. Гомумән, унарлы вакланмада өтердән соң теләсә никадәр разряд: унынчы, йөзенче, меңенче, ун меңенче һ. б. ш. өлешләр разряды була ала.

7,234 вакланмасын болай язып була:

$$7{,}234=7\,\frac{234}{1000}=7\,\frac{2340}{10\,000}=7\,\frac{23\,400}{100\,000},\ \text{ләкин}\ 7\,\frac{2340}{10000}=7{,}2340,$$

$$\text{ә}\ 7\,\frac{23\,400}{100\,000}=7{,}23400.$$

Димәк, 7,234 = 7,2340 = 7,23400. Шул рәвешле, *әгәр унарлы вакланманың уң ягына бер яки берничә нуль өстәп язсаң, шуңа тигез вакланма килеп чыгар. Әгәр унарлы вакланма бер яки берничә нульгә бетсә, бу нульләрне алып ташларга була — шуңа тигез вакланма килеп чыгар.*

Унарлы вакланмалар өчен санның кыйммәте булган цифр төшенчәсе кертелә. Санның *кыйммәте булган* цифрлар дип аның баштагы нульләреннән кала барлык цифрларын әйтәләр. Мәсәлән, 234009 санында кыйммәте булган алты цифр; 0,1023 санында кыйммәте булган дүрт цифр: 1, 0, 2, 3, 0,0004 санында кыйммәте булган бер цифр: 4.

14. Унарлы вакланмалар өстендә арифметик гамәлләр. Унарлы вакланмаларны *кушу өчен* бер төрле разрядлар берсе астына икенчесе, бер өтер астына икенче өтер туры килерлек итеп аларны берсе астына икенчесен язарга һәм вакланмаларны натураль саннарны кушкан кебек кушарга кирәк. Мәсәлән, 12,7 һәм 3,442 вакланмаларын кушыйк. Беренче вакланманың өтердән соң бер, ә икенчесенең өч цифры бар. Кушу өчен беренче вакланманы өтердән соң өч цифр булырлык итеп үзгәртәбез:

12,7 = 12,700, ул чагында:

$$\begin{array}{r} +\,12{,}700 \\ 3{,}442 \\ \hline 16{,}142 \end{array}$$

Бер унарлы вакланмадан икенчесен *алу* да шулай эшләнә. 13,1 һәм 0,37 саннарының аермасын табыйк:

$$\begin{array}{r} -\,13{,}10 \\ 0{,}37 \\ \hline 12{,}73 \end{array}$$

Унарлы вакланмаларны *тапкырлаганда,* бирелгән саннарны, өтерләргә игътибар итмичә, натураль саннар кебек тапкырлыйлар, аннары тапкырлаучыларның икесендә бергә өтердән соң ничә цифр булса, тапкырчыгышта шулкадәр цифрны, уңнан сулга таба санап, өтер белән аералар.

Мәсәлән, 2,7 не 1,3 кә тапкырлыйк. Табабыз: $27\cdot 13=351$. Уңнан ике цифрны өтер белән аерыйк (тапкырлаучыларның өтердән соңгы цифрлары саны икегә тигез). Нәтиҗәдә $2{,}7\cdot 1{,}3=3{,}51$ була.

Әгәр тапкырчыгышта өтер белән аерырга кирәк булганнан кимрәк цифр чыкса, җитмәгән нульләрне алга язалар, мәсәлән:

$$\begin{array}{r} 2{,}12 \\ \times\ 0{,}13 \\ \hline 636 \\ 212 \\ \hline 0{,}2756 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3{,}43 \\ \times\ 0{,}0002 \\ \hline 0.000686 \end{array}$$

Унарлы вакланмаларны 10, 100, 1000 һ. б. га тапкырлауны карыйк. 12,733 вакланмасын 10 га тапкырларга кирәк булсын ди. Табабыз: $12\,733\cdot 10=127\,330$. Уң яктан өч цифрны өтер белән аерабыз: $12{,}733\cdot 10=127{,}330$. Ләкин $127{,}330=127{,}33$. Димәк, $12{,}733\cdot 10=127{,}33$. Шул рәвешле, унарлы вакланманы 10 га тапкырлау — өтерне уң якка бер цифрга күчерү булып чыга.

Гомумән, *унарлы вакланманы 10, 100, 1000 гә тапкырлау өчен, бу вакланмадагы өтерне 1, 2, 3 цифрга уңга күчерергә кирәк (әгәр кирәк булса, вакланмага билгеле санда уңнан нульләр өстәп языла)*. Мәсәлән, $1{,}47\cdot 10\,000=14\,700$.

Унарлы вакланманы натураль санга *бүлү* натураль санны натураль санга бүлгән кебек үк эшләнә, ә өлештәге өтерне бөтен өлешне бүлү тәгәлләнгәч куялар. 22,1 не 13 кә бүләргә кирәк булсын ди:

$$\begin{array}{r|l} 22{,}1 & 13 \\ \cline{2-2} -13 & 1{,}7 \\ \cline{1-1} 91 & \\ -91 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Әгәр бүленүченең бөтен өлеше бүленүчедән кечкенәрәк булса, җавапта нуль бөтен килеп чыга, мәсәлән:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}221 & 13 \\ \cline{2-2} -13 & 0{,}017 \\ \cline{1-1} 91 & \\ -91 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Хәзер унарлы вакланманы унарлы вакланмага *бүлүне* карыйк. 2,576 ны 1,12 гә бүләргә кирәк булсын ди. Моның өчен, бүлүчедә өтердән соң ничә цифр булса, бүленүчедә дә, бүлүчедә дә өтерне шул кадәрле цифрга уңга күчерәбез (бу мисалда — икегә). Башкача әйткәндә, бүленүчене дә, бүлүчене дә

100 гә тапкырлыйбыз — аңа карап өлеш үзгәрми. Ул чагында 257,6 вакланмасын натураль сан 112 гә бүләбез, ягъни инде карап кителгән очрактагыча эшлибез:

$$
\begin{array}{r|l}
-257{,}6 & 112 \\ \cline{2-2}
\underline{224} & 2{,}3 \\
-336 & \\
\underline{336} & \\
0 &
\end{array}
$$

Унарлы вакланманы 10^n нә бүлү өчен, бу вакланмадагы өтерне n цифрга сулга күчерергә кирәк (монда кирәк очракта сул якка кирәк кадәр санда нульләр языла). Мәсәлән, $27{,}344 : 10^4 = 0{,}0027344$.

Натураль саннарны һәрчак бүлеп булмаган кебек, унарлы вакланмалар өчен дә аны һәрчак башкарып булмый. Мисал өчен 2,8 не 0,09 га бүлик:

$$
\begin{array}{r|l}
-280 & 9 \\ \cline{2-2}
\underline{27} & 31{,}11\ldots \\
-10 & \\
\underline{9} & \\
-10 & \\
\underline{9} & \\
1\ldots &
\end{array}
$$

Нәтиҗәдә чиксез унарлы вакланма барлыкка килә. Мондый очракларда гади вакланмалар аша күрсәтәләр:

$$2{,}8 : 0{,}09 = \frac{28}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28 \cdot 100}{10 \cdot 9} = \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}.$$

Кайбер саннар гади вакланмалар, икенчеләре — катнаш саннар, өченчеләре — унарлы вакланмалар рәвешендә бирелүләре мөмкин. Мондый саннар өстендә гамәлләр башкарганда төрлечә эшләргә: яки унарлы вакланмаларны гади вакланмалар аша күрсәтергә һәм гади вакланмалар өстендә гамәлләр эшләү кагыйдәләрен кулланырга, яки гади вакланмаларны һәм катнаш саннарны (әгәр мөмкин булса) унарлы вакланмалар аша күрсәтергә һәм унарлы вакланмалар өстендә гамәлләр эшләү кагыйдәләрен кулланырга мөмкин.

15. Процентлар. Унарлы вакланмалар арасыннан 0,01 вакланмасы практикада бик еш кулланыла, ул *процент* дип атала һәм 1% = 0,01, 2% = 0,02, 45% = 0,45, 350% = 3,5 һ. б. Хуҗалык һәм статистик исәпләүләрдә, фәннең күп кенә тармакларында зурлыкларның өлешләрен процентларда күрсәтү кабул ителгән. Мәсәлән, 60 кг ның 23% ын табу өчен, 60 кг ны 0,23 кә тапкырларга кирәк, ягъни $60 \cdot 0{,}23 = 13{,}8$. Димәк, 60 кг ның 23% ы 13,8 кг була.

1 нче мисал. Эшче көнгә 80 деталь эшләргә тиеш иде. Эш көне ахырында аның көнлек норманы 150% ка үтәве ачыклана. Эшче ничә деталь эшләгән?

Чишү. 1) $150\% = 1{,}5$
2) $80 \cdot 1{,}5 = 120$

Җавап: 120 деталь.

2 нче мисал. Эшче көнгә 80 деталь эшләргә тиеш. Көндезге ашка кадәр ул 55 деталь эшли. Күрсәтелгән вакытка эшче планның ничә процентын үтәгән?

Чишү. Көндезге ашка кадәр планның $\frac{55}{80}$ вакланмасы белән күрсәтелүче өлеше үтәлә, аны процентларда күрсәтик:

$$\frac{55}{80} = \frac{550}{800} = \frac{550}{8} \cdot \frac{1}{100} = \frac{275}{4}\% = 68{,}75\%$$

Җавап: 68,75%.

3 нче мисал. Эшче көндезге ашка кадәр 55 деталь эшли, бу көнлек норманың 68,75% ын тәшкил итә. Эшче көнгә ничә деталь эшләргә тиеш?

Чишү. Көнлек эшләргә тиеш детальләр санын x дип билгелик. Мәсьәлә шартыннан $68{,}75\% \cdot x = 55$ икәнлеге килеп чыга, ягъни $\frac{68{,}75}{100} \cdot x = 55$, моннан $x = \frac{100 \cdot 55}{68{,}75} = 80$.

Җавап: 80 деталь.

16. Гади вакланманы чиксез унарлы вакланмага әйләндерү. 2,73 унарлы вакланмасы бирелгән булсын. Әгәр уң ягына теләсә никадәр санда нульләр язсак (п. 13 не кара), аның кыйммәте үзгәрмәс: $2{,}73 = 2{,}730 = 2{,}7300 = \ldots = 2{,}73\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{цифр}}$

2,73 вакланмасын чиксез күп нульләр белән унарлы вакланма рәвешендә язу да рөхсәт ителә, ягъни $2{,}73 = 2{,}73000\ldots$. Монда өтердән соң чиксез күп унарлы тамгалар бар. Мондый унарлы вакланма *чиксез унарлы вакланма* дип атала.

Т.1.10. Теләсә нинди гади вакланманы чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин.

Мәсәлән, $\frac{3}{14}$ санын алыйк һәм санаучыны ваклаучыга бүлик, бер-бер артлы унарлы тамгалар табарбыз. Һәр натураль санны чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин икәнлеген искәртик, ягъни $3 = 3{,}0000\ldots$

$$\begin{array}{l|l}
3{,}00000000\ldots & 14 \\ \cline{2-2}
-\underline{28} & 0{,}214285714\ldots \\
20 & \\
-\underline{14} & \\
60 & \\
-\underline{56} & \\
40 & \\
-\underline{28} & \\
120 & \\
-\underline{112} & \\
80 & \\
-\underline{70} & \\
100 & \\
-\underline{98} & \\
20 & \\
-\underline{14} & \\
60\ldots &
\end{array}$$

Шул рәвешчә, $\frac{3}{14}=0{,}214285714\ldots$

Бүлү гамәлен башкарганда барлыкка килгән калдыкларны эзлекле рәвештә күчереп языгыз:

$$2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ 2,\ 6,\ \ldots .$$

Бу калдыкларның һәркайсы бүлүчедән, ягъни 14 тән кечерәк. Моннан, бүлүнең нindидер бер адымында элек очрашкан калдыкның яңадан килеп чыгуы котылгысыз. Монда җиденче адымдагы 2 калдыгы беренче адымда бар иде инде. Моннан тыш, элек очрашкан калдыктан соң килүче калдыклар элек ничек булса, шул эзлеклелектә төзеләчәкләре ачык. Безнең мисалда 2 калдыгы артыннан 6, аннан соң 4, аннан соң 12 һ. б. калдыклары киләләр, ягъни без калдыкларның шундый эзлеклелеген табабыз:

$$2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ 2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ \ldots .$$

Калдыкларның периодик кабатланучы группалары санның унарлы язылышында тиңдәшле рәвештә кабатланучы цифрлар группасына китерәләр. Шулай итеп, безнең мисалда табабыз:

$$\frac{3}{14}=0{,}2142857142857142857\ldots .$$

Санның унарлы язылышында өтердән соң эзлекле кабатланучы саннар группасы (минималь) *период* дип, ә үзе язылышында мондый периоды булган чиксез унарлы вакланма *периодик* дип атала. Кыскалык өчен периодны түгәрәк җәяләр эченә алып, бер мәртәбә язу кабул ителгән:

$$0{,}2142857142857142857\ldots=0{,}2(142857).$$

Әгәр период өтердән соң ук башланса, вакланма *саф периодик;* әгәр өтер белән период арасында унарлы билгеләр булса, вакланма *катнаш периодик* дип атала. Шулай итеп, $2,(23)=2,2323232323...$ — саф периодик вакланма; $0,2(142857)$ — катнаш периодик вакланма, $2,73=2,73000...=$ $=2,73(0)$ — катнаш периодик вакланма.

17*. Периодик чиксез унарлы вакланманы гади вакланмага әйләндерү.

Чиксез унарлы вакланманы 10 га, 100 гә, 1000 гә һ. б. тапкырлау өчен, чикле унарлы вакланмалардагы кебек, өтерне бер, ике, өч һ. б. тамгага уңга күчерү җитә.

Мәсәлән, $0,1(23)\cdot 100=0,1232323...\ .\ 100=12,323232...=$ $=12,(32)$.

Периодик унарлы вакланманы гади вакланмага әйләндерүне мисаллар өстендә карыйк.

Мисал. а) $0,(13)$; б) $2,(273)$; в) $0,2(54)$; г) $3,254(9)$ саннарын гади вакланмага әйләндерергә.

Чишү. а) $x=0,(13)=0,131313...$ дип уйлыйк. Саф периодик x вакланмасын өтере нәкъ периоды кадәр уңга күчәрлексанга тапкырлыйк. Периодында ике цифр булганлыктан, өтерне ике цифрга уңга күчерергә кирәк, ә моның өчен x санын 100 гә тапкырлау җитә, ул чакта $100x=0,131313...\ —100=$ $=13,131313...=13,(13)$ була. $100x$ тан x ны алгач, $100x-x=$ $=13,(13)-0,(13)$ табабыз. Димәк, $99x=13$, моннан, $x=\frac{13}{99}$.

б) $x=2,(273)$ дип уйлыйк. Бу саф периодик вакланманың периодында өч цифр бар. x ны 1000 гә тапкырлап, $1000x=$ $=2273,(273)$ табабыз.

Моннан:

$$1000x-x=2273,(273)-2,(273);\ 999x=2271,$$

$$x=\frac{2271}{999}=\frac{757}{333}=2\frac{91}{333}.$$

в) $x=0,2(54)$ дип уйлыйк. Бу катнаш периодик вакланмада өтерне саф периодик вакланма барлыкка килерлек итеп, уңга күчерик. Моның өчен x ны 10 га тапкырлау җитә; $10x=2,(54)$ була.

$y=2,(54)$ дип уйлап, бу саф периодик вакланманы, алдагы мисалларда эшләгәнчә, гади вакланмага әйләндерик. $y=2,(54)$ булсын, моннан $100y=254,(54)$ була;

$$100y-y=254,(54)-2,(54);\ 99y=252;\ y=\frac{252}{99}=\frac{28}{11}.$$

Димәк, $10x=\frac{28}{11}$, моннан $x=\frac{28}{11\cdot 10}=\frac{11}{55}$ табыла.

г) $x=3{,}254(9)$ дип уйлап, $1000x=3254{,}(9)$ була. $y=1000x$ тамгаланышын кертик. Ул вакытта:

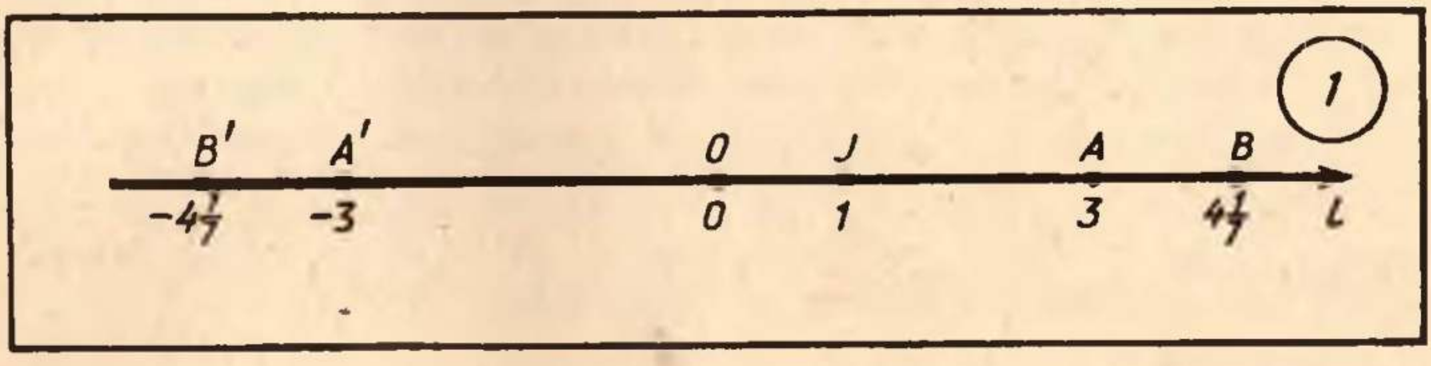
$$y=3254{,}(9), \text{ моннан } 10y=32549{,}(9);$$
$$10y-y=32549{,}(9)-3254{,}(9);\ \ 9y=29\,295;\ \ y=3255;$$
$$1000x=3255;\ \ x=\frac{3255}{1000}=3\frac{51}{200}.$$

$\frac{3255}{1000}=3{,}255=3{,}255(0)$, ягъни без чикле унарлы вакланма яки периодында нуль булган чиксез унарлы вакланма таптык дип билгеләп үтик. Димәк, $3{,}254(9)=3{,}255(0)$. Бу хәл периодында 9 саны булган теләсә нинди унарлы вакланмаларга да кагыла; андый вакланманы периодында нуль булган вакланма рәвешендә күрсәтеп була. Аның өчен период алдындагы соңгы унарлы тамганы берәмлеккә арттырырга гына кирәк. Мәсәлән, $0{,}45(9)=0{,}46(0)$; $14{,}(9)=15{,}(0)$ һ. б.

18. Координаталар турысы. l турысын сызыйк, анда O ноктасын билгелик, аны исәп башлангычы дип кабул итеп, юнәлешне һәм $[0;\ 1]$ берәмлек кисемтәсен сайлап алыйк (1 нче рәсем).

Бу очракта координаталар турысы (яки координаталы туры) бирелгән диләр. Һәр натураль санга яки вакланмага l турысының бер ноктасы тиңдәш. Мәсәлән, 3 саны бирелсен. O ноктасыннан бирелгән юнәлештә берәмлек кисемтәсен өч мәртәбә салыйк, A ноктасы килеп чыга, нәкъ бу нокта 3 санына тиңдәш була да. $4\frac{1}{7}$ санын алыйк. O ноктасыннан бирелгән юнәлештә берәмлек кисемтәне дүрт мәртәбә, ә аннан соң тагын кисемтәнең $\frac{1}{7}$ ен салыйк. B ноктасын табарбыз, ул $4\frac{1}{7}$ санына тиңдәш була.

Әгәр l турысының M ноктасы ниндидер r санына тиңдәш булса, бу сан нoктаның *координатасы* дип атала һәм $M(r)$ рәвешендә язылa. Шулай итеп, J, A, B нокталары өчен (1 нче рәсем) аларның координаталарын күрсәтергә мөмкин: $J(1)$, $A(3)$, $B\left(4\frac{1}{7}\right)$. O ноктасының координатасы нуль дип исәпләнә.



Хәзер O ноктасыннан берәмлек кисемтәне бирелгән юнәлешкә капма-каршы юнәлештә 3 мәртәбә салыйк. A' ноктасын табарбыз, ул исәп башлангычы булган O ноктасына карата A ноктасына симметрик була. A ноктасының координатасы булып 3 саны тора, ә A ноктасының координатасын -3 дип язалар һәм «Минус өч» дип укыйлар. Аналогик рәвештә 1 нче рәсемдә B ноктасына симметрик B ноктасының координатасы $-4\frac{1}{7}$ саны була. 3 һәм -3, $4\frac{1}{7}$ һәм $-4\frac{1}{7}$ саннарын *капма-каршы* саннар дип атыйлар. Координаталы туры бирелгән юнәлештә урнашкан нокталарга тиңдәш саннарны *уңай саннар* дип атыйлар; 1, 3, $4\frac{1}{7}$ саннары уңай. Уңай саннарны кайчакта «плюс» тамгасы белән язалар: $+1$, $+3$, $+4\frac{1}{7}$. Координаталар турысында бирелгән юнәлешкә капма-каршы юнәлештә урнашкан нокталарга тиңдәш саннарны *тискәре саннар* дип атыйлар: димәк, -3, $-4\frac{1}{7}$ — тискәре саннар. O саны уңай да, тискәре дә дип саналмый. O санына тиңдәш O ноктасы координаталар турысында уңай координаталы нокталарны тискәре координаталы нокталардан аерып тора.

Координаталар турысында бирелгән юнәлешне (гадәттә ул уңга бара) уңай, ә аңа капма-каршы юнәлешне — тискәре дип атыйлар.

19. Рациональ саннар күплеге. 1, 2, 3, 4, 5, ... натураль саннарны уңай бөтен саннар дип тә атыйлар. Натураль саннарның капма-каршыларын -1, -2, -3, -5, ... саннарын бөтен тискәре саннар дип атыйлар. 0 не шулай ук бөтен сан дип исәплиләр. Шулай итеп, бөтен саннар — натураль саннар, натураль саннарның капма-каршылары һәм 0 саны ул.

Бөтен саннар һәм вакланмалар (уңай һәм тискәре) барысы бергә *рациональ саннар* күплеген төзиләр.

Теләсә нинди рациональ сан $\frac{m}{n}$ чагыштырмасы рәвешендә күрсәтелә алуын билгеләп үтик, биредә m — бөтен сан, ә n — натураль сан, өстәвенә бер үк санны чагыштырма рәвешендә күптөрле юллар белән язарга мөмкин. Мәсәлән:

$$-2=\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-100}{50}; \quad 0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{300}{1000}.$$

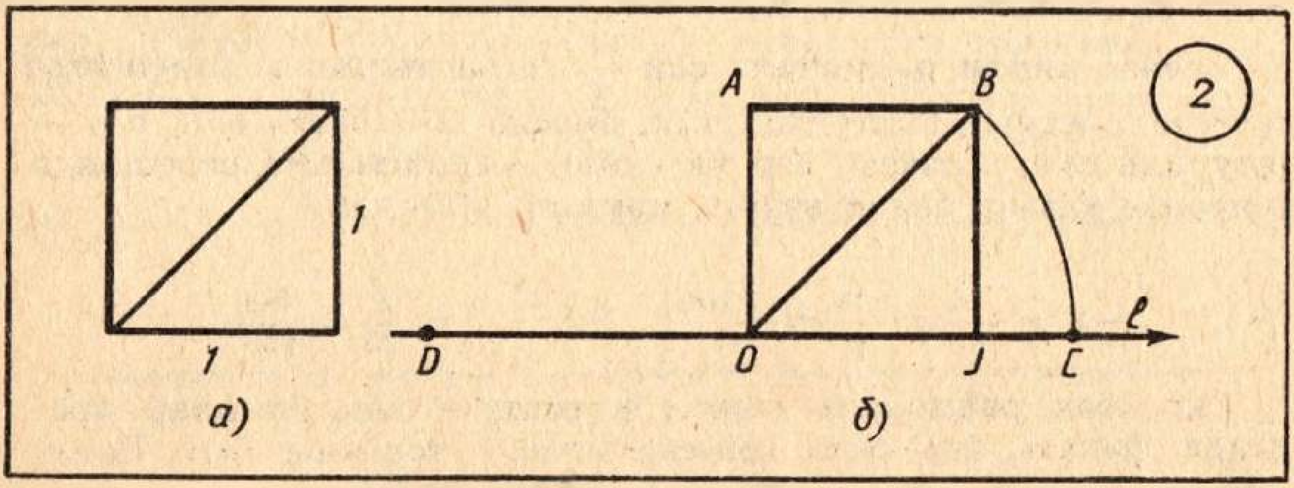
Бирелгән рациональ санны күрсәтүче вакланмалар арасында фәкать бер генә кыскартылмый торганы бар. Бөтен саннар өчен ул — ваклаучысы 1 булган вакланма.

§ 3. Реаль саннар

20. Иррациональ саннар. Үлчәү өчен рациональ саннар гына түгел, башка табигатьле саннар да, ягъни бөтен яки вакланма булмаган саннар да кулланылалар. Мондый барлык саннарны *иррациональ* саннар дип атыйлар. Мәсәлән, ягы 1 булган квадрат диагонале (2, *а* рәсем),ниндидер r уңай саны белән күрсәтелергә тиеш, ягъни $r^2=1^2+1^2$ була (Пифагор теоремасы буенча), ягъни $r=2$ булырга тиеш. r саны бөтен сан була алмый, чөнки $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$ һ. б. r саны вакланма да була алмый: әгәр $r=\frac{m}{n}$ кыскартылмый торган вакланма булса, биредә $n\neq1$, ул чакта $r^2=\frac{m^2}{n^2}$ вакланмасы да кыскартылмый, биредә $n\neq1$; димәк, $\frac{m^2}{n^2}$ бөтен сан түгел, шунлыктан 2 гә тигез була алмый. Шуңа күрә квадрат диагонале иррациональ сан белән күрсәтелә, ул $\sqrt{2}$ белән тамгалана («икедән квадрат тамыр» дип укыла) 2, *б* рәсемдә l координаталар турысы сурәтләнгән, $OABJ$ — квадрат, $OC=OB=OD$. Ул чакта C ноктасының координатасы $\sqrt{2}$ саны, ә D ноктасының координатасы $-\sqrt{2}$ саны була. C һәм D ноктачарының икесенең дә координаталары иррациональ.

Шулай ук квадраты 5 кә, 7 гә, 10 га тигез булган рациональ сан юк. Аларга тиңдәш иррациональ саннар $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ дип тамгаланалар. Бу саннарга капма-каршылары да иррациональ саннар, алары $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ дип тамгаланалар.

Иррациональ саннарның, квадраты бирелгән уңай санга тигез булган санны эзләү мәсьәләсен чишкәндә генә табылмавын әйтеп китәргә кирәк. Мәсәлән, әйләнә озынлыгының диаметрына чагыштырмасын аңлатучы π санын гади вакланма рәвешендә күрсәтергә мөмкин түгел, ул — иррациональ сан.



а) б)

Теләсә нинди рациональ санны чиксез унарлы периодик вакланма рәвешендә язып булса (п. 16 ны кара) һәм үз чиратында һәр чиксез унарлы периодик вакланма рациональ санны аңлатса (п. 17 не кара), һәр иррациональ санны периодик булмаган чиксез унарлы вакланма рәвешендә язарга мөмкин һәм үз чиратында теләсә нинди периодик булмаган чиксез унарлы вакланма — иррациональ сан ул.

21. Реаль саннар. Санлы туры. Рациональ һәм иррациональ саннар барысы бергә реаль саннар күплеген төзиләр. Һәр реаль санга координаталар турысында бердәнбер нокта тиңдәш. Координаталар турысының һәр ноктасына бердәнбер реаль сан тиңдәш (исәп башлангычыннан бу ноктага кадәр араны табу һәм табылган сан алдына бирелгән ноктаның исәп башлангычыннан уңда яки сулда ятуына бәйле рәвештә $+$ яки $-$ тамгасы кую җитә). Гадәттә кыскалык өчен «координаталар турысының a реаль санына тиңдәш ноктасы» фразасы урынына «a ноктасы» дип язалар һәм әйтәләр, ә «a саны» терминын кулланганда «реаль a саны» икәнен истә тоталар.

Реаль саннар күплеген шулай ук *санлы туры* дип атыйлар. Санлы турының геометрик моделе булып, координаталар турысы хезмәт итә.

22. Кайбер саннар күплекләренең тамгаланышлары.

$\boldsymbol{N}$ — натураль саннар күплеге,
$\boldsymbol{Z}$ — бөтен саннар күплеге,
$\boldsymbol{Q}$ — рациональ саннар күплеге,
$\boldsymbol{R}$ — реаль саннар күплеге.

$n \in N$ язылышы («n N күплегенә керә яки n N күплегенеке» дип укыла) n — натураль сан икәнен аңлата. Түбәндәге тамгаларның да мәгънәсе шундый ук: $m \in Z$ (m — бөтен сан); $r \in \boldsymbol{Q}$ (r — рациональ сан); $x \in \boldsymbol{R}$ (x — реаль сан).

23. Реаль саннарны чагыштыру. Теләсә нинди тигез булмаган a һәм b саннарының кайсы зуррак, ә кайсы кечерәк икәнен әйтеп була.

Әгәр $a-b$ аермасы *уңай* булса, a саны b санынннан зуррак диләр һәм $a > b$ дип язалар, әгәр $a-b$ аермасы *тискәре* булса, a саны b санынннан *кечерәк* диләр һәм $a < b$ дип язалар. Бу билгеләмә буенча һәр уңай сан нульдән зуррак, ә һәр тискәре сан нульдән һәм һәр уңай саннан кечерәк. Бирелгән теләсә нинди a һәм b саннары өчен $a > b$, $a < b$, $a = b$ бәйләнешләренең фәкать берсе генә дөрес.

Геометрик күзлектән караганда, $a < b$ ($a > b$) тигезсезлеге координаталар турысында a ноктасы b ноктасыннан суддарак (уңдарак) урнашуын аңлата.

$<$, $>$ тамгалары төгәл *тигезсезлек тамгалары* дип аталалар. Кайбер очракта $\geqslant$, $\leqslant$ тамгалары: төгәл булмаган тигезсезлек тамгалары кулланылалар. $a \leqslant b$ язылышы яки a саны b саныннан кечерәк, яки a саны b санына тигез дигән ике бәйләнешнең берсе дөрес икәнен аңлата. Мәсәлән, $3 \leqslant 5$, $5 \geqslant 5$ — дөрес тигезсезлекләр. $a > b$ һәм $c > d$ тигезсезлекләре бертөрле тамгалы тигезсезлекләр; $a > b$ һәм $c < d$ тигезсезлекләре ***капма-каршы тамгалы тигезсезлекләр*** дип атала. $a < b$ һәм $b < c$ бәйләнешле a, b, c саннары өчен $a < b < c$ язылышы кулланыла.

Мисал. $\frac{2}{3}$ һәм 0,67 саннарын чагыштырырга.

Чишү. $\frac{2}{3} - 0{,}67$ аермасын төзик һәм бу аерманың кыйммәтен табыйк:

$$\frac{2}{3}-0{,}67=\frac{2}{3}-\frac{67}{100}=\frac{2\cdot 100-67\cdot 3}{300}=-\frac{1}{300}.$$

Аерма тискәре, шуңа күрә $\frac{2}{3} < 0{,}67$.

24. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре. Теләсә нинди a, b, c, d реаль саннары өчен түбәндәге үзлекләр үтәләләр:

1°. Әгәр $a > b$ булса, ул вакытта $b < a$ була.

2°. Әгәр $a > b$ һәм $b > c$ булса, ул вакытта $a > c$ була. *(транзитивлык үзлеге)*

3°. Әгәр $a > b$ булса, ул вакытта $a + c > b + c$ була.

4°. Әгәр $a > b$ һәм c — уңай сан ($c > 0$) булса, ул вакытта $ac > bc$ була. Бу үзлекнең мәгънәсе түбәндәгечә: әгәр дөрес тигезсезлекнең ике кисәге дә бер үк уңай санга тапкырланса, дөрес тигезсезлек килеп чыга.

Исбатлау. $ac - bc$ аермасын карыйк. Моннан $ac - bc = c(a - b)$ була. Шарт буенча c — уңай сан, ә $a > b$ булганлыктан, $a - b$ — уңай сан. Ләкин ике уңай санның тапкырчыгышы уңай сан була, димәк, $c(a - b) > 0$. Шулай итеп, $ac - bc > 0$. Әгәр $ac - bc$ аермасы уңай булса, ул вакытта $ac > bc$ була.

5°. Әгәр $a > b$ һәм c — тискәре сан булса ($c < 0$), ул вакытта $ac < bc$ була. Бу үзлекләрнең мәгънәсе түбәндәгечә: *әгәр дөрес тигезсезлекнең ике кисәге дә бер үк тискәре санга тапкырланса һәм бирелгән тигезсезлекнең тамгасы капма-каршыга үзгәртелсә, ул вакытта дөрес тигезсезлек барлыкка килер.*

6°. Әгәр $a > b$ һәм $c > d$ булса, ул вакытта $a + c > b + d$ була *(әгәр бертөрле тамгалы дөрес ике тигезсезлек кушылса, дөрес тигезсезлек барлыкка килер).*

7°. Әгәр a, b, c, d — уңай саннар, өстәвенә $a > b$ һәм

$c > d$ булса, ул вакытта $ac > bd$ була. *(Әгәр сул һәм уң кисәкләре уңай сан булган бертөрле тамгалы дөрес тигезсезлекләр буынга буын тапкырланса, дөрес тигезсезлек барлыкка килер.*

Исбатлау. $a > b$ һәм $c > d$ булганлыктан, 4 нче үзлек буенча $ac > bc$ була, аналогия буенча $c > d$ һәм $b > 0$ булгач, $bc > bd$ була. $ac > bc$ һәм $bc > bd$ булганлыктан, 2 нче үзлеге буенча $ac > bd$ була.

8^0. Әгәр $a > b$ һәм $c < d$ булса, ул вакытта $a - c > b - d$ була.

9^0. Әгәр $a > b > 0$ булса, ул вакытта $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ була.

10^0. Әгәр $a > b > 0$ булса, ул вакытта теләсә нинди n натураль сан өчен $a^n > b^n$ тигезсезлеге үтәлә.

25. Санлы аралыклар. $a < b$ булырлык итеп, ике a һәм b саннарын алыйк һәм координаталар турысында билгелик.

a һәм b арасында ятучы ирекле x ноктасы $a < x < b$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче санга тиңдәш. Бу тигезсезлекләрне канәгатьләндерүче барлык x саннарының күплеген $(a; b)$ дип тамгалыйлар һәм *интервал* дип атыйлар.

Һәркайсы $a \leqslant x \leqslant b$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче барлык x саннары күплеген $[a; b]$ дип тамгалыйлар һәм *кисемтә* дип атыйлар.

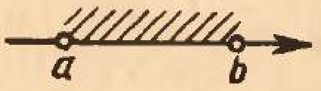
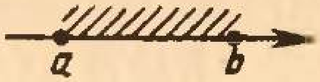
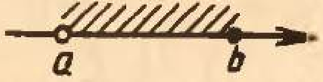
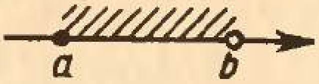
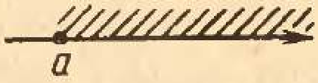
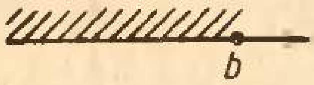
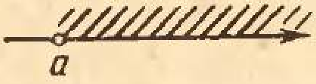
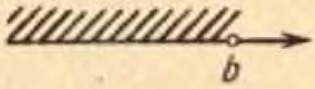
Интервал һәм кисемтә — чикле санлы аралыклар. Санлы чикле аралыклар ике төрле була: $[a; b)$ — $a \leqslant x < b$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче x саннар күплеге һәм $(a; b]$ — $a < x \leqslant b$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче x саннары күплеге. Бу аралыкларны *ярыминтерваллар* дип атыйлар.

Санлы чиксез аралыклар да була. $x \geqslant a$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x саннар күплеген $[a; +\infty)$ дип тамгалыйлар һәм *нур* дип атыйлар, ә $x > a$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x саннар күплеген $(a; +\infty)$ дип тамгалыйлар һәм *ачык нур* дип атыйлар. «$+\infty$» тамгасы «плюс чиксезлек» дип укыла.

Шулай ук $(-\infty; b]$ рәвешендәге нур ($x \leqslant b$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар) һәм $(-\infty; b)$ рәвешендәге ($x < b$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче саннар) *ачык нур* булуы мөмкин «$-\infty$» тамгасы «Минус чиксезлек» дип укыла.

Практикада «интервал», «кисемтә», «ярыминтервал», «нур» терминнарын һәрчак кулланмыйлар, аларны гомуми аталыш белән алыштырып, «санлы аралык» диләр.

Түбәндә китерелгән таблицада һәр төр санлы аралык өчен аның геометрик сурәте, тамгаланышы һәм тигезсезлекләр ярдәмендә язылышы бирелгән.

Аралыкның төре	Геометрик сурәте	Тамгаланышы	Тигезсезлекләр ярдәмендә язу
Интервал		$(a;\ b)$	$a<x<b$
Кисемтә		$[a;\ b]$	$a\leqslant x\leqslant b$
Ярыминтервал		$(a;\ b]$	$a<x\leqslant b$
Ярыминтервал		$[a;\ b)$	$a\leqslant x<b$
Нур		$[a;\ +\infty)$	$x\geqslant a$
Нур		$(-\infty;\ b]$	$x\leqslant b$
Ачык нур		$(a;\ +\infty)$	$x>a$
Ачык нур		$(-\infty;\ b)$	$x<b$

26. Реаль санның модуле. Реаль a санының *модуле (абсолют кыйммәте)* дип $a\geqslant 0$ булганда бу санның үзен, $a<0$. булганда $-a$ санны́н атыйлар. a санының модулен $|a|$ дип тамгалыйлар. Шулай итеп,

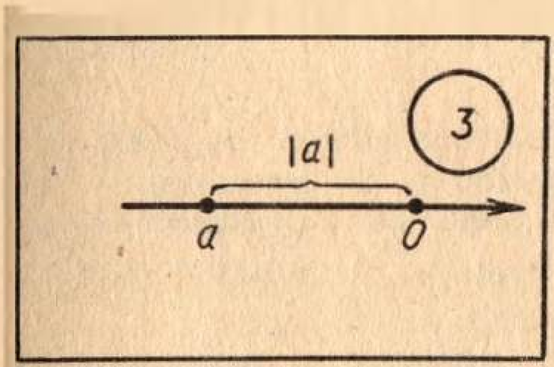
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{әгәр } a\geqslant 0 \text{ булса}, \\ -a, & \text{әгәр } a<0 \text{ булса}. \end{cases}$$

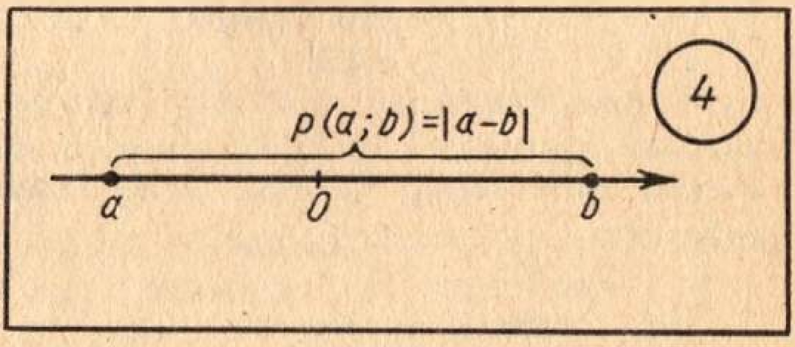
Мәсәлән, $\pi-3=\pi-3$, чөнки $\pi-3>0$, $(\pi=3{,}14\ldots)$

$$-3{,}7=-(-3{,}7)=3{,}7, \text{ чөнки } -3{,}7<0.$$

Геометрия $|a|$ ны координаталар турысында a ноктасының O ноктасыннан ераклыгы дип аңлата (3 нче рәсем).

Модульләрнең үзлекләре:





1⁰. $|a| \geqslant 0$.

2⁰. $|a| = |-a|$.

3⁰. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4⁰. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

5⁰. $|a|^2 = a^2$.

27. Координаталар турысының ике ноктасы арасындагы ераклык формуласы. Әгәр a һәм b — координаталар турысының ике ноктасы булса, алар арасындагы ераклык $\rho(a;\ b)$ ны $\rho(a;\ b) = |a - b|$ формуласы белән күрсәтәләр (4 нче рәсем). $\rho(a;\ b) = \rho(b;\ a)$ икәне ачык. Шулай итеп, $\rho(-2;\ 5) = |-2-5| = |-7| = -(-7) = 7$.

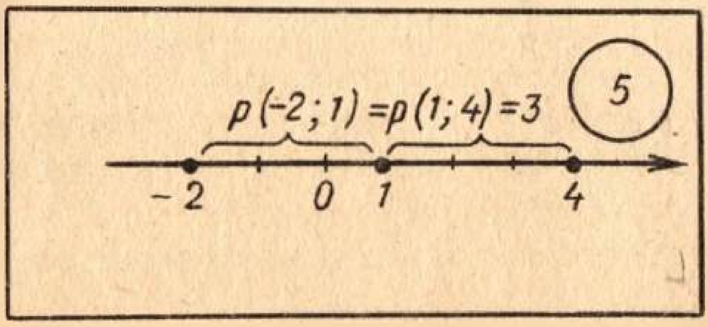
Мисал. а) $|x-1| = 3$ тигезләмәсен; б) $|x+1| \leqslant 2$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык x нокталарын табарга.

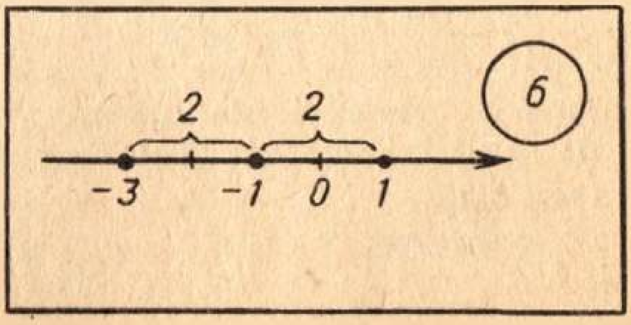
Чишү. а) Тигезләмәне 1 ноктасыннан 3 берәмлек ераклыкта ятучы x нокталары канәгатьләндерә. Бу нокталар — -2 һәм 4 (5 нче рәсем). Димәк, тигезләмәнең ике тамыры бар: -2; 4.

б) Тигезсезлекне -1 ноктасыннан 2 гә ким яки тигез ераклыкта ятучы x нокталары канәгатьләндерә. Алар $[-3;\ 1]$ кисемтәсе нокталары (6 нчы рәсем).

28. Реаль саннар өстендә гамәлләр кагыйдәләре.

Бертөрле тамгалы ике сан суммасы шул ук тамгалы сан; андый сумманың модулен табу өчен кушылучыларның мо-





дульләрен кушарга кирәк. Мәсәлән, $(+12)+(+8)=+20$; $(-12)+(-8)=-20$.

Төрле тамгалы ике сан суммасының тамгасы зуррак модульле кушылучының тамгасы кебек була, бу сумманың модулен табу өчен, зуррак модульдән кечерәген алырга кирәк. Мәсәлән, $(+12)+(-8)=+(12-8)=4$; $(-12)+(+8)=-(12-8)=-4$.

Бер саннан икенчесен алу өчен, кимүчегә киметүченең капма-каршысын кушарга кирәк. Мәсәлән, $12-(-8)=12+8=20$; $12-(+8)=12+(-8)=4$.

Бер төрле тамгалы ике санның тапкырчыгышы (өлеше) уңай, ә төрле тамгалы ике санның тапкырчыгышы (өлеше) тискәре сан була; тапкырчыгышның (өлешнең) модулен табу өчен бирелгән саннарның модульләрен тапкырларга (бүләргә) кирәк. Мәсәлән, $(-12)\cdot(-8)=+12\cdot 8=96$; $(-24):(+3)=-\frac{24}{3}=-8$.

29. Реаль саннар өстендә арифметик гамәлләрнең үзлекләре.

1^0. $a+b=b+a$.

2^0. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

3^0. $a+0=a$.

4^0. $a+(-a)=0$.

5^0. $ab=ba$.

6^0. $(ab)\cdot c=a(bc)$.

7^0. $a(b+c)=ab+bc$.

8^0. $a\cdot 1=a$.

9^0. $a\cdot\frac{1}{a}=1,\ a\neq 0$.

Кайчак бу үзлекләрне алгебраның төп законнары дип атыйлар, 1^0 һәм 5^0 үзлекләре тиңдәшле рәвештә кушуның һәм тапкырлауның урын алыштыру законын, 2^0 һәм 6^0 үзлекләре — оештыру законы, ә 7^0 үзлеге кушуга карата тапкырлауның тарату законын аңлаталар.

Бу үзлекләрдән бүтән үзлекләр чыгарыла. Мәсәлән, $a\cdot 0=0$. Чыннан да:

$$a\cdot 0=a(b+(-b))=ab+a(-b)=ab+(-ab)=0.$$

30. Пропорцияләр. a, b, c, d — нульдән үзгә реаль саннар булсыннар һәм $a:b=c:d$ тигезлеген канәгатьләндерсеннәр. Бу тигезлекне *пропорция* дип, a һәм d саннары пропорциянең кырый буыннары, ә b һәм c — урта буыннары дип атыйлар.

Пропорция өчен $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ язылышын да кулланырга мөмкин.

Мәсәлән, 2,5; -4; -5 һәм 8 саннарыннан пропорция төзеп була:

$$\frac{2{,}5}{-4}=\frac{-5}{8}.$$

Түбәндәге раслаулар дөрес:

Т.1.11. Пропорциянең кырый буыннары тапкырчыгышы аның урта буыннары тапкырчыгышына тигез.

Т.1.12. Пропорциянең кырый буыннарының урыннарын алмаштырырга мөмкин, ягъни $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ булса, ул вакытта $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ була.

Т.1.13. Пропорциянең урта буыннарының урыннарын алмаштырырга мөмкин, ягъни әгәр $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ булса, ул вакытта $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ була.

31. Санның бөтен өлеше. Санның вакланмалы өлеше. x реаль сан булсын. x тан зур булмаган иң зур бөтен сан аның *бөтен өлеше* дип атала; x санының бөтен өлеше $[x]$ дип тамгалана. x саны һәм аның бөтен өлеше арасындагы аерма аның *вакланмалы өлеше* дип атала, ягъни $x-[x]$; санның вакланмалы өлеше $\{x\}$ дип тамгалана. Димәк, $\{x\}=x-[x]$.

Мәсәлән, $[2{,}35]=2$, $\{2{,}35\}=0{,}35$, $[10]=10$; ә $\{10\}=0$; $[-0{,}85]=-1$, ә $\{-0{,}85\}=-0{,}85-(-1)=0{,}15$.

32. Натураль күрсәткечле дәрәҗә. Алда (п. 5 не кара) натураль санның натураль дәрәҗәсе төшенчәсе билгеләнде. Хәзер бу билгеләмәне дәрәҗәнең теләсә нинди реаль нигез өчен гомумиләштерик. a — реаль сан, ә n — берәмлектән зур натураль сан булсын. Һәркайсы a га тигез булган n тапкырлашучының тапкырчыгышы *a санының n нчы дәрәҗәсе* дип атала, ягъни $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{тапкырлашучы}}$. Әгәр $n=1$ булса, $a^1=a$ була, a саны — *дәрәҗәнең нигезе*, n — *дәрәҗә күрсәткече*.

Мәсәлән, $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$.

Натураль күрсәткечле дәрәҗәләр өчен түбәндәге үзлекләр дөрес:

1^0. $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$.
2^0. $a^n:a^k=a^{n-k}$, әгәр $n>k$ булса.
3^0. $(a^n)^k=a^{nk}$.

$$4^0.\ a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

$$5^0.\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0.$$

Мәсәлән, $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; $(2^3)^5 = 2^{15}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

33. Нуль күрсәткечле дәрәҗә. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗә. Билгеләмә буенча $a \neq 0$ булганда $a^0 = 1$ дип уйланыла. Мәсәлән, $(2{,}7)^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$. 0 санының 0 дәрәҗәсенең мәгънәсе юк.

$a \neq 0$ һәм n — *натураль сан булганда,* билгеләмә буенча $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ дип уйланыла.

Мәсәлән, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ тигезлеге дөрес.

34. Уңай реаль санның стандарт рәвеше. Теләсә нинди уңай a санын $a \cdot 10^n$ рәвешендә күрсәтергә мөмкин, биредә $1 \leqslant a_1 < 10$, ә n — бөтен сан.

1 нче мисал. $a = 395$ булсын, ул чакта $a = 3{,}95 \cdot 10^2$; биредә $a = 3{,}95$; $n = 2$.

2 нче мисал. $a = 4{,}13$ булсын, ул чакта $a = 4{,}13 \cdot 10^0$, биредә $a = 4{,}13$ һәм $n = 0$.

3 нче мисал. $a = 0{,}0023$ булсын, ул чакта $a = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$; биредә $a = 2{,}3$, $n = -3$.

Әгәр a уңай саны $a_1 \cdot 10^n$ рәвешендә күрсәтелсә, монда $1 \leqslant a < 10$, n — бөтен сан, a саны *стандарт рәвештә* язылган диләр, n күрсәткечен монда *санның тәртибе* диләр.

Уңай a санын стандарт рәвештә күрсәтү өчен, бөтен өлешендә бер кыйммәтле цифр булырлык итеп өтерне куярга (п. 13 не кара) һәм тапкырлау нәтиҗәсендә өтер a санында элекке урынына күчәрлек итеп, 10^n га тапкырларга кирәк. 1 нче, 2 нче, 3 нче мисалларда без шулай эшләдек.

1 нче мисалда, 395 санында, беренче кыйммәтле цифрны аерып, 3,95 санын таптык, элекке санга кайту өчен, өтерне ике цифрга уңга күчерергә кирәк, бу 10^2 тапкырлауга тиңдәш. Димәк, $395 = 3{,}95 \cdot 10^2$.

2 нче мисалда бер кыйммәтле цифр өтер белән инде аерылган, шуңа күрә $4{,}13 = 4{,}13 \cdot 10^0$.

3 нче мисалда 0,0023 санында беренче кыйммәтле цифрны өтер белән аергач, 2,3 санын таптык, бирелгән санга кайту өчен, өтерне өч цифрга сулга күчерергә кирәк — бу 10^3 бүлүгә яки 10^{-3} дәрәҗәсенә тапкырлауга тиңдәш. Димәк, $0{,}0023 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$.

35. Арифметик тамырны билгеләү. Арифметик тамырның үзлекләре. Әгәр $a \geqslant 0$ һәм n — бердән зур натураль сан булса, $x^n = a$ тигезлеге үтәлерлек, бердәнбер тискәре булмаган x саны бар. Бу x саны тискәре булмаган a санының n нчы дәрәҗә *арифметик тамыры* дип атала һәм $\sqrt[n]{a}$ дип тамгалана. a саны *тамырасты аңлатмасы*, n — *тамыр күрсәткече* дип атала. Әгәр $n = 2$ булса, гадәттә $\sqrt{a}$ (тамыр күрсәткечен төшереп) язалар һәм бу аңлатманы *квадрат тамыр* дип атыйлар. Еш кына «тамыр» термины урынына «радикал» терминын кулланалар.

Шулай итеп, билгеләмә буенча $\sqrt[n]{a} = x$ язылышы, биредә $a \geqslant 0$, беренчедән $x \geqslant 0$ һәм, икенчедән $x^n = a$, ягъни

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

икәнен аңлата.

Мәсәлән; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[18]{0} = 0$.

Әгәр $a \geqslant 0$ һәм $b \geqslant 0$ булса, түбәндәге үзлекләр дөрес:

1^0. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

1^0 үзлек теләсә никадәр сандагы тапкырлаучылар өчен дә дөрес. Мәсәлән, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Мисал. Гадиләштерергә: а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; б) $(\sqrt[5]{a^2})^2$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; г) $\sqrt[6]{a^4}$.

Чишү. а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{2}{3}$;

б) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = \sqrt[5]{(a^2)^3} = \sqrt[5]{a^6}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4 \cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$;

г) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$ (тамыр һәм тамырасты аңлатмасының күрсәткечләрен 2 гә бүлдек).

36. Тискәре саннан так дәрәҗә тамыр. $a < 0$, ә n — берәмлектән зур натураль сан булсын. Әгәр n — җөп сан булса, $x^n = a$ тигезлеге x ның бернинди кыйммәте өчен дә үтәлә алмый. Бу хәл реаль саннар өлкәсендә тискәре санның җөп дәрәҗә тамырын билгеләп булмавын аңлата. Әгәр n — так сан булса, $x^n = a$ булырлык бердәнбер реаль x саны бар. Бу санны

$\sqrt[n]{a}$ дип тамгалыйлар һәм тискәре a санынннан n нчы так дәрәҗә *тамыр* дип атыйлар.

Мәсәлән, $\sqrt[3]{-8}=-2$, чөнки $(-2)^3=-8$; $\sqrt[5]{-243}=-3$, чөнки $(-3)^5=-243$.

Тамырларның так күрсәткечләре очрагында, тамырасты аңлатмаларның тискәре булмаган кыйммәтләре өчен дөрес булган радикаллар үзлекләре (35 нче пункт), тамырасты аңлатмаларының тискәре булганнары өчен дә дөрес.

Мәсәлән, $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ теләсә нинди a һәм b өчен дөрес.

37. Вакланма күрсәткечле дәрәҗә. Әгәр $a \geqslant 0$ һәм m, n — натураль сан, $n \geqslant 2$ булса, ул чагында

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^n};$$

әгәр $a>0$ булса, ул чагында

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

дип уйлана.

Тискәре санның бөтен булмаган дәрәҗәсенең мәгънәсе юк.

Мисал. $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ не исәпләргә.

Чишү. $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2;$

$$81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\sqrt[4]{(3^4)^3}=\sqrt[4]{3^{12}}=3^3=27;$$

$$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

38. Рациональ күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлекләре. Теләсә нинди a өчен натураль дәрәҗәгә күтәрү гамәле (операциясе) билгеләнгән (п. 32 не кара), теләсә нинди $a \neq 0$ сан өчен нуль һәм бөтен тискәре дәрәҗәгә күтәрү гамәле (операциясе) билгеләнгән (п. 33 не кара), теләсә нинди $a>0$ өчен уңай вакланмалы дәрәҗә күтәрү гамәле (операциясе) билгеләнгән (п. 37 не кара), һәм, ниһаять, теләсә нинди $a>0$ өчен, тискәре вакланмалы дәрәҗәгә күтәрү гамәле билгеләнгән (п. 37 не кара).

Мисал. Исәпләргә: $(6{,}25)^{0.5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0.25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)$.

Чишү. $(6,25)^{0,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} =$

$= \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$; $(-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$; $(0,343)^0 = 1.$

Нәтиҗәдә табабыз:

$$(6,25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} - (-4)^{-1} \cdot (0,343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1,5.$$

Әгәр $a > 0$, $b > 0$ һәм r, s — теләсә нинди рациональ саннар булса, ул вакытта түбәндәге үзлекләр дөрес:

1^0. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
2^0. $a^r : a^s = a^{r-s}$.
3^0. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4^0. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.
5^0. $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

39. Саннарның якынча кыйммәтләре. Абсолют һәм чагыштырма хаталар. Унарлы вакланманы нинди булса да разрядка кадәр түгәрәкләгәндә бу разрядтан соң килгән барлык цифрларны нульләр белән алыштыралар, әгәр алар өтердән соң торсалар, аларны ташлап калдыралар. Әгәр бу разрядтан соң килүче беренче цифр биштән зур яки аңа тигез булса, ул чакта калган соңгы цифрны 1 гә арттыралар. Әгәр разрядтан соң килгән беренче цифр биштән кимрәк булса, ул чакта калган соңгы цифрны үзгәртмиләр.

Мисал. $\alpha = 2471,05624$ санын: а) дистәләргә; б) берәмлекләргә; в) унынчы өлешләргә; г) йөзенче өлешләргә; д) меңенче өлешләргә кадәр түгәрәкләргә.

Чишү. а) Дистәләр разрядыннан соң килүче берәмлекләр цифры 1 гә тигез, ягъни 5 тән кимрәк. Димәк, дистәләргә кадәр түгәрәкләнгәч, $\alpha \approx 2470$ була. $\approx$ тамгасын *якынча тигезлек* тамгасы дип атыйлар.

б) унынчы өлеш цифрасы 0 гә тигез, димәк, берәмлеккә кадәр түгәрәкләгәч, $\alpha \approx 2471$ була.

в) йөзенче өлеш цифрасы 5 кә тигез, димәк, унынчы өлешләргә кадәр түгәрәкләгәч, $\alpha \approx 2471,1$ була.

г) меңенче өлеш цифрасы 6 га тигез, димәк, йөзенче өлешкә кадәр түгәрәкләгәч, $\alpha \approx 4271,06$ була.

д) ун меңенче өлеш цифрасы 2 гә тигез, димәк, меңенче өлешкә кадәр түгәрәкләгәч, $\alpha = 2471,056$ була.

Барлык табылган кыйммәтләр $\alpha = 2471,05624$ *санының якынча кыйммәтләре* дип аталалар.

Якынча кыйммәтләр саннарны түгәрәкләгәндә генә барлыкка килмиләр. Алар ешрак һәртөрле үлчәүләр (озынлыклар, массалар, температуралар һ. б.) башкарганда барлыкка киләләр. Шуның белән бергә, үлчәүнең нинди төгәллектә башкарылуын белү мөһим.

a — α санының якынча кыйммәте булсын. Ул чакта α һәм a саннары аермасының модуле, ягъни $|\alpha - a|$ α санының якынча кыйммәтенең *абсолют хатасы*, ә абсолют хатаның якынча кыйммәт модуле чагыштырмасы якынча кыйммәтенең *чагыштырма хатасы* дип атала. Гадәттә чагыштырма хатаны процентларда күрсәтәләр.

2 нче мисал. Массасы 24,12705 г булган детальне шкала бүленешенең кыйммәте 0,1 г лы үлчәүдә үлчәп, массаның якынча кыйммәте 54,1 г дип билгелиләр. Бу якынча кыйммәтнең абсолют һәм чагыштырма хаталарын табарга.

Чишү. Абсолют хата $54{,}12705 - 54{,}1 = 0{,}02705$ кә тигез.

Чагыштырма хата $\frac{0{,}02705}{54{,}1} \cdot 100\% = 0{,}05\%$.

Кагыйдә буларак, үлчәүләр башкарганда зурлыкларның төгәл кыйммәтләре билгеле булмый, шуңа күрә якынча кыйммәтләрнең абсолют хаталары турындагы белешмәләр бик мөһим. Мисал өчен, әгәр деталь массасын шкала бүленешенең кыйммәте 0,1 г булган үлчәүдә үлчәсәләр, ул чакта үлчәүнең абсолют хатасы 0,1 г нан артмавы ачык. Димәк, детальне үлчәп, 54,1 г икәнен табалар икән, ул чакта массаның төгәл кыйммәте 54,1 дән теге яки бу якка 0,1 дән зурракка тайпыла алмый, ягъни $54{,}1 - 0{,}1 \leqslant m \leqslant 54{,}1 + 0{,}1$. Моны кыскача болай язалар: $m = 54{,}1 \pm 0{,}1$.

Гомумән, әгәр безне кызыксындыручы α санының табылган якынча кыйммәтенең абсолют хатасы ниндидер h саннан артмаса, аны $\alpha = a \pm h$ дип язалар; a — α санының *h төгәллегендәге якынча кыйммәте* диләр.

3 нче мисал. $\alpha = 2471{,}05624$ санының 0,01 гә кадәр төгәллек белән якынча кыйммәтен табарга.

Чишү. α санын 0,01 гә кадәр түгәрәкләп (1 нче г мисалын кара), $\alpha = 2471{,}06$ табабыз.

Бу якынча кыйммәтнең абсолют хатасы $|2471{,}05624 - 2471{,}06| = 0{,}00376 < 0{,}01$. Димәк, $2471{,}06$ — α санының 0,01 гә кадәр төгәллек белән алынган якынча кыйммәте.

Математик таблицаларда гадәттә зурлыкларның якынча кыйммәтләре бирелә. Шуның белән бергә, абсолют хата соңгы разряд берәмлегенең яртысыннан артмый дип исәплиләр. Мәсәлән, таблицадан 2 санының 1,4141 кыйммәтен табып, без аның 0,0001 гә кадәр төгәллек белән алган якынча кыйммәте икәнен аңларга тиешбез, ягъни аның абсолют хатасы 0,00005 тән артмый: $\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 0{,}00005$.

40. Реаль саннарның киме һәм артыгы белән алынган унарлы якынлашулары. $\sqrt{2}$ иррациональ санын алыйк.

$$\begin{array}{cc}
1^2<2<2^2 & 1<\sqrt{2}<2 \\
1{,}4^2<2<1{,}5^2 & 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5 \\
1{,}41^2<2<1{,}42^2 & 1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42 \\
1{,}414^2<2<1{,}415^2 & 1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415 \\
1{,}4142^2<2<1{,}4143^2 & 1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143
\end{array}$$

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 саннары $\sqrt{2}$ санының тиңдәшле рәвештә 1 гә, 0,1 гә, 0,01 гә, 0,001 гә, 0,0001 гә кадәр төгәллектә *киме белән алынган унарлы якынлашулары* дип аталалар. 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 саннары $\sqrt{2}$ санының тиңдәшле төгәллектәге артыгы белән алынган унарлы якынлашулары дип атала.

$\sqrt{2}$ саны өчен чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтү кулланыла: $\sqrt{2}=1{,}4142...$ Гомумән, *һәр реаль санны чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була; өстәвенә, әгәр сан рациональ* (16 нчы пункт) *булса, периодик, әгәр сан иррациональ булса, периодик булмаган чиксез унарлы вакланма рәвешендә күрсәтелә.*

Мәсәлән, $\frac{14}{55}=0{,}2(54)=0{,}2545454...$ (п. 17 не кара). $\frac{14}{55}$ санының 0,001 гә кадәр киме белән алынган унарлы якынлашуы 0,254, ә артыгы белән алынганы 0,255 була.

π саны түбәндәгечә языла: $\pi=3{,}1415926...$. π санының 0,0001 гә кадәр төгәллектә киме белән алынган унарлы якынлашуы 3,1415, ә артыгы белән — 3,1416 була.

41*. Натураль саннан квадрат тамыр алу кагыйдәсе. m натураль саныннан квадрат тамыр алырга кирәк булсын, өстәвенә тамыр алынуы билгеле. Нәтиҗәне табу өчен, кайчак түбәндәге кагыйдәне куллану уңай.

1. m санын кырларга бүлик (уңнан сулга, соңгы цифрдан башлап), һәр кырга янәшә торган икешәр цифрны кертик. Шуның белән бергә, әгәр m саны җөп сандагы цифрлардан торса, беренче (сулдан) кырда ике цифр; әгәр m саны так сандагы цифрлардан торса, беренче кырда бер цифр булыр. Кырларның саны нәтиҗәнең цифрлары санын күрсәтә.

2. Квадраты беренче кырдагы саннан артмаган иң зур цифрны сайлыйбыз, ул нәтиҗәнең беренче цифры булачак.

3. Нәтиҗәнең беренче цифрын квадратка күтәреп, аны беренче кырдан алыйк, аерма янына уң ягына икенче кырны язып куйыйк. Нindидер A саны барлыкка килер. Нәтиҗәнең булган өлешен икеләтеп a санын табарбыз. Хәзер ax санының

x санына тапкырчыгышы A саныннан артмаслык иң зур x санын табыйк. x цифры — нәтиҗәнең икенче цифры.

4. ax санының x ка тапкырчыгышын A саныннан алыйк, табылган аерманың уң ягына өченче кырны язып куйыйк, нәтиҗәдә B саны барлыкка килер. Нәтиҗәнең булган өлешен икеләтеп, b санын табарбыз. Хәзер by санының y ка тапкырчыгышы B саныннан артмаслык, иң зур y цифрын табыйк. y цифры нәтиҗәнең өченче цифры.

Кагыйдәнең алдагы адымы 4 нче адымны кабатлый. Соңгы кыр кулланылганчы, шулай дәвам итә.

1 нче мисал. $\sqrt{138384}$ не исәпләргә.

Чишү. Санны кырларга бүлик: 13′83′84 — алар өчәү, димәк, нәтиҗәдә өчурынлы сан табылырга тиеш. Нәтиҗәнең беренче цифры 3, чөнки $3^2<13$, ә $4^2>13$. 13 тән 9 ны алып, 4 не табабыз. 4 янына икенче кырны язып куябыз. Нәтиҗәнең булган өлешен, ягъни 3 не икегә тапкырлап, $a=6$ табабыз. ax икеурынлы санның x ка тапкырчыгышы 483 тән кимрәк булырлык итеп, иң зур x цифрын табыйк. Ул 7 цифры булыр, чөнки $67\cdot7=469$ — ул 483 тән ким, ә $68\cdot8=544$ — монысы 483 тән зур. Димәк, нәтиҗәнең икенче цифры 7.

483 тән 469 ны алып, 14 не табабыз. Аның уң ягына соңгы кырны язып куеп, $b=1484$ не табабыз. Нәтиҗәнең булган өлешен, ягъни 37 санын, икегә тапкырлап, $B=74$ не табабыз. Бу by өчурынлы санның y га тапкырчыгышы 1484 тән артмаслык итеп зур y цифрын табыйк. Ул цифр 2 була, чөнки $742\cdot2=1484$. 2 цифры — нәтиҗәнең соңгы цифры, җавапта 372 не таптык.

$$\begin{array}{rr|l}
 & & -\sqrt{13'83'84}=372\\
 & & \;\;9\\ \hline
\times & 67 & -483\\
 & 7 & \;\;469\\ \hline
\times & 742 & -1484\\
 & 2 & \;\;1484\\ \hline
 & & \;\;0
\end{array}$$

2 нче мисал. $\sqrt{45369}$ исәпләргә.

Чишү. $\sqrt{4'53'69}=213$

$$\begin{array}{rr|l}
 & & 4\\ \hline
\times & 41 & -53\\
 & 1 & \;\;41\\ \hline
\times & 423 & -1269\\
 & 3 & \;\;1269\\ \hline
 & & \;\;0
\end{array}$$

Әгәр тамыр алынмаса, бирелгән санның соңгы цифры артыннан өтер куялар, һәркайсы 00 рәвешендә яңа кырлар төзиләр. Бу очракта тамыр алу процессы чиксез, ул теләгән төгәллеккә ирешкәч кенә төгәлләнә.

3 нче мисал. $\sqrt{7}$ не 0,01 төгәллек белән исәпләргә.

Чишү. $\sqrt{7'00'00\ldots}=2{,}645\ldots$

$$\begin{array}{r|r}
 & 4 \\ \hline
\times\begin{array}{r}46\\6\end{array} & -\begin{array}{r}300\\276\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}524\\4\end{array} & -\begin{array}{r}2400\\2096\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}5285\\5\end{array} & -\begin{array}{r}30400\\26425\end{array} \\ \hline
 & 3975 \\
 & \ldots\ldots
\end{array}$$

Димәк, 0,01 гә кадәр төгәллектә $\sqrt{7}=2{,}65$ була.

42. Иррациональ күрсәткечле дәрәҗә турында төшенчә. α — иррациональ сан булсын. a^{α} язылышына нинди мәгънә бирелә, биредә a — уңай сан? Өч очракны карап үтик: $a=1$, $a>1$, $0<a<1$.

1) Әгәр $a=1$ булса, $1^{\alpha}=1$ дип алына.

2) $a>1$ булсын. $r_1<\alpha$ һәм $r_2>\alpha$ булырлык теләсә нинди r_1, r_2 рациональ саннарын алыйк. Ул вакытта $r_1<r_2$ һәм $a^{r_1}>a^{r_2}$ була. Бу очракта a^{α} санын a^{r_1} һәм a^{r_2} арасында урнашкан сан буларак аңлыйлар, биредә r_1, r_2 — теләсә нинди рациональ саннар өчен $r_1<\alpha$, $r_2>\alpha$. Математикада теләсә нинди $a>1$ һәм теләсә нинди α иррациональ сан өчен андый санның булуы һәм аның бердәнберлеге исбатланган.

3) $0<a<1$ булсын. $r_1<\alpha$ һәм $r_2>\alpha$ булырлык теләсә нинди r_1, r_2 рациональ саннарын алыйк. Ул вакытта $r_1<r_2$ һәм $a^{r_1}>a^{r_2}$. Бу очракта a^{α} санын $r_1<\alpha<r_2$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче теләсә нинди r_1 һәм r_2 рациональ саннары өчен a^{r_1} һәм a^{r_2} арасында урнашкан сан дип аңлыйлар.

Математикада теләсә нинди α иррациональ саны өчен һәм $(0;\ 1)$ интервалдагы теләсә нинди a саны өчен андый санның булуы һәм аның бердәнберлеге исбатланган.

43. Реаль күрсәткечле дәрәҗәләр үзлекләре. Әгәр $a>0$, $b>0$ һәм x, y — теләсә нинди реаль саннар булса, ул вакытта түбәндәге үзлекләр дөрес:

$$1^0.\ a^x\cdot a^y=a^{x+y}.$$

$$2^0.\ a^x : a^y=a^{x-y}.$$

$3^0.\ (a^x)^y = a^{xy}.$

$4^0.\ a^x \cdot b^x = (ab)^x.$

$5^0.\ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$

§ 4. Комплекслы саннар

44. Комплекслы сан турында төшенчә. Натураль саннардан реаль саннарга кадәр сан төшенчәсенең үсү процессы практика ихтыяҗлары белән дә, шулай ук математиканың үз мохтаҗлыклары белән дә бәйле. Башта предметларны санау өчен натураль саннардан кулланганнар. Аннан соң бүлүне башкарырга кирәклек — уңай вакланмалы саннар төшенчәсенә, соңрак алу гамәлен башкарырга кирәклек — нуль һәм тискәре саннар төшенчәләренә һәм, ниһаять, уңай саннардан тамыр алу кирәклек — иррациональ саннар төшенчәсенә китерә. Санап үткән гамәлләр реаль саннар күплегендә башкарыла алалар. Ләкин бу күплектә башкарырга мөмкин булмаган гамәлләр дә калалар, мәсәлән, тискәре саннан квадрат тамыр алу гамәле. Димәк, сан турында төшенчәне тагын да үстерү, реаль саннардан үзгә, яңа саннар барлыкка килү ихтыяҗлыгы туа.

Реаль саннарны геометрик юл белән координаталар турысында нокталар ярдәмендә сурәтлиләр; һәр реаль санга турының бер генә ноктасы тиңдәш (реаль сан «образы») һәм киресенчә, координаталар турысының һәр ноктасы бер генә реаль санга тиңдәш. Координаталар турысы реаль саннар образлары белән тулысынча тутырылган, ягъни кинаяләп әйтсәк, «анда яңа саннар өчен урын юк». Яңа саннарның геометрик образларын турыдан түгел, ә яссылыктан эзләргә кирәк дигән фикер туа. Ләкин xy координат яссылыгында һәр M ноктасын аның координаталары белән тиңләштерергә мөмкин. Шуңа күрә яңа саннар сыйфатында — аларны комплекслы саннар дип атыйлар — реаль саннарның тәртипләштерелгән парларын кертү табигый (тәртипләштерелгән дигәне: $(a;\ b)$ һәм $(b;\ a)$ — төрле нокталар, димәк, төрле саннар мәгънәсендә.

a һәм b реаль саннарының тәртипләштерелгән $(a;\ b)$ пары *комплекслы сан* дип атала.

$a=c$ һәм $b=d$ булганда һәм бары шул вакытта гына ике комплекслы сан $(a,\ b)$ һәм $(c,\ d)$ *тигез* дип атала.

45. Комплекслы саннар өстендә арифметик гамәлләр. $z=(a;\ b)$ һәм $w=(c,\ d)$ *комплекслы саннар суммасы* дип, $(a+c;\ b+d)$ комплекслы сан атала.

Мәсәлән, $(2;\ 7)+(3;\ -4)=(2+3;\ 7-4)=(5;\ 3)$; $(-1;\ 0)+(4;\ 7)=(-1+4;\ 0+7)=(3;\ 7)$.

(0, 0) пары *комплекслы нуль* дип исәпләнә. $z=(a;\ b)$ санына капма-каршысы $(-a;\ -b)$ була, аны $-z$ дип билгеләлиләр.

z һәм w комплекслы саннар аермасы дип, гадәттә, $z=w+u$ булырлык u санын әйтәләр. Аерма һәрвакыт бар һәм ул бердәнбер. Чыннан да, $z=(a;\ b)$, $w=(c;\ d)$, $u=(x;\ y)$ булсын. Ул вакытта $(a;\ b)=(c;\ d)+(x;\ y)$, ягъни $(a;\ b)=(c+x;\ d+y)$. Бу $a=c+x$, $b=d+y$ дигән сүз, моннан $x=a-c$, $y=b-d$, ягъни $u=(x;\ y)=(a-c;\ b-d)$ табабыз.

Шулай итеп, комплекслы саннар алуның түбәндәге кагыйдәсе килеп чыга: $(a;\ b)-(c;\ d)=(a-c;\ b-d)$.

Мәсәлән, $(9;\ 10)-(8;\ 12)=(9-8;\ 10-12)=(1;\ -2)$.

$z=(a;\ b)$ һәм $w=(c;\ d)$ *комплекслы саннар тапкырчыгышы* дип, $(ac-bd;\ ad+bc)$ комплекслы сан атала.

Мәсәлән, әгәр $z=(2;\ 5)$, $w=(3;\ 1)$, ул вакытта $zw=(2\cdot 3-5\cdot 1;\ 2\cdot 1+5\cdot 3)=(1;\ 17)$.

Комплекслы саннар өстендә арифметик гамәлләр реаль саннар өстендә арифметик гамәлләр үзлекләренә ия булалар (п. 29 ны кара).

$z=(a;\ b)$, $w=(c;\ d)\neq(0;\ 0)$ булсын. $z=uw$ булырлык бердәнбер комплекслы сан $u=(x;\ y)$ бар, u санын, гадәттә z ны w га бүлүдән чыккан *өлеш* дип атыйлар.

$uw=(x;\ y)\ (c;\ d)=(xc-yd;\ xd+yc)$, $z=(a;\ b)$. $z=u\cdot w$ булганлыктан,

$$\begin{cases} cx-dy=a,\\ dx+cy=b \end{cases}$$

тигезлеге үтәлергә тиеш. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасыннан (п. 164 не кара) табабыз. $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Димәк, $u=(x;\ y)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

Әгәр $(c;\ d)\neq(0;\ 0)$ булса, комплекслы саннарны бүлүнең түбәндәге кагыйдәсе килеп чыга:

$$\frac{(a;\ b)}{(c;\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Мәсәлән,

$$\frac{(2;\ 3)}{(1;\ 4)}=\left(\frac{2\cdot 1+3\cdot 4}{1^2+4^2};\ \frac{3\cdot 1-2\cdot 4}{1^2+4^2}\right)=\left(\frac{14}{17};\ -\frac{5}{17}\right).$$

46. Комплекслы санның алгебраик формасы. 45 нче пунктта кертелгән комплекслы саннарны кушу һәм тапкырлау билгеләмәләрен кулланып, түбәндәге тигезлекләрне җиңел табарга була:

$$(0;\ 1)\cdot(0;\ 1)=(-1;\ 0), \tag{1}$$

$$(a;\ b)=(a;\ 0)+(b;\ 0)\cdot(0;\ 1), \tag{2}$$

$$(a;\ 0)+(b;\ 0)=(a+b;\ 0), \tag{3}$$

$$(a;\ 0)\cdot(b;\ 0)=(ab;\ 0). \tag{4}$$

$(a;\ 0)$ урынына a дип кенә язарга, ә $(0;\ 1)$ комплекслы санны i дип билгеләргә һәм *уйланма берәмлек* дип атарга килешик. Ул чакта (1) тигезлек $i\cdot i=-1$, ягъни

$$i^2=-1, \tag{5}$$

ә (2) тигезлек

$$(a;\ b)=a+bi \tag{6}$$

рәвешен алыр.

$a+bi$ язылышы $z=(a;\ b)$ *комплекслы санның алгебраик формасы* дип атала, шуның белән бергә a саны z комплекслы санының *реаль өлеше,* ә bi — *аның уйланма өлеше* дип атала.

Мәсәлән, $(2;\ -4)=2-4i$; $(3;\ 2)=3+2i$; $-7+\sqrt{3}i=(-7;\ \sqrt{3})$.

Әгәр, $a+bi$ комплекслы санның уйланма өлеше нуль булмаса, ул сан уйланма дип атала, әгәр $a=0$ булса, ягъни сан bi рәвешендә булса, ул *саф уйланма* дип атала; һәм, ниһаять, $a+bi$ комплекслы санның уйланма өлеше нульгә тигез булса, ул реаль сан була.

Комплекслы саннарның алгебраик формасы алар өстендә арифметик гамәлләр башкаруны сизелерлек җиңеләйтә.

1) *Кушу.* $(a;\ b)+(c;\ d)=(a+c;\ b+d)$ (7)

$a+bi$ һәм $c+di$ саннарын гадәти икебуын дип исәпләп, шул ук саннарны алгебраик формада кушып, табабыз.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \tag{8}$$

(7) һәм (8) тигезлекләрне чагыштырып, дөрес нәтиҗәгә килүебезне күрәбез.

2) *Алу.* $(a;\ b)-(c;\ d)=(a-c;\ b-d)$ (9)

икәнен беләбез. Хәзер бу саннарны алуны алгебраик формада башкарып, $a+bi$ һәм $c+di$ саннарын гадәти икебуын дип исәпләп, табабыз:

$$(a+b)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \tag{10}$$

(9) һәм (10) тигезлекләрне чагыштырып, дөрес нәтиҗәгә килүебезне күрәбез.

3) *Тапкырлау.* $(a;\ b)\cdot(c;\ d)=(ac-bd;\ ad+bc)$ (11)

икәнен беләбез.

$a+bi$ һәм $c+di$ саннарын гадәти икебуын дип исәпләп, шул ук саннарны алгебраик формада тапкырлап, табабыз:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bd\,i^2.$$

$i^2=-1$ ((5) тигезлекне кара) булуын кулланeasак, $bdi^2=-bd$ була. Нәтиҗәдә табабыз:

$$(a+b)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \qquad (12)$$

(11) һәм (12) тигезлекләрен чагыштырып, дөрес нәтиҗәгә килүебезне күрәбез.

4) *Бүлү*. Әгәр $(c;\ d)\neq(0;\ 0)$ булса,

$$\frac{(a;\ b)}{(c;\ d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \qquad (13)$$

икәнен табабыз.

$a+bi$ һәм $c+di$ саннарын гадәти икебуын, ә $\frac{a+bi}{c+di}$ ны гадәти вакланма дип исәпләп, шул ук саннарны алгебраик формада бүлик. Бу вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын $c-di$ га тапкырлап (моннан вакланма кыйммәте үзгәрмәс дип уйлап), табабыз:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Димәк,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (14)$$

(13) һәм (14) тигезлекләрне чагыштырып, дөрес нәтиҗәгә килүебезне күрәбез.

Йомгаклап, түбәндәге мөһим практик нәтиҗәгә киләбез: *алгебраик формада язылган комплекслы саннар өстендә барлык арифметик гамәлләрне гадәти икебуыннар өстендә башкарган кебек үтәргә мөмкин,* тик $i^2=-1$ икәнен генә искә алырга кирәк. $\frac{a+bi}{c+di}$ рәвешендәге вакланманы комплекслы санга үзгәртү өчен, вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да $c-di$ гә тапкырларга кирәк; $c+di$ һәм $c-di$ саннары *комплекслы иярешле* дип атала.

1 нче мисал. $(2-i)^2$ исәпләргә.

Чишү. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ формуласы кулланып, табабыз:

$$(2-i)^2=4-4i+i^2=4-4i-1=3-4i.$$

2 нче мисал. $(1+2i)i-\frac{3+2i}{1-i}$ исәпләргә.

Чишү. 1) $(1+2i)i=i+2i^2=-2+i.$

2) $\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3+5i-2}{1+1}=$

$=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$

3) $(-2+i)-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i.$

3 нче мисал. $(2x-3yi)(2x+3yi)+4xi=97+8i$ тигезлеге үтәлерлек x һәм y реаль саннарын табарга.

Чишү. $(2x-3yi)(2x+3yi)=4x^2-9y^2i^2=4x^2+9y^2$. Бирелгән тигезлекне түбәндәге рәвештә язарга мөмкин:

$$4x^2+9y^2+4xi=97+8i.$$

$a+bi$ һәм $c+di$ комплекслы саннары аларның реаль өлешләре һәм уйланма өлешләре алдындагы коэффициентлары тигез булганда һәм бары шул вакытта гына үзара тигез булганлыктан ($a=c$, $b=d$), тигезләмәләр системасы төзибез:

$$\begin{cases}4x^2+9y^2=97,\\ 4x=8.\end{cases}$$

Аны чишеп, $x_1=2$; $y_1=3$; $x_2=2$; $y_2=-3$ табабыз.

4 нче мисал. $z^2=-5+12i$ тигезлеген канәгатьләндерүче z комплекслы саннарны табарга.

Чишү. $x+yi$ рәвешендәге комплеслы санны эзләрбез.

$$(x+yi)^2=-5+12i;\quad x^2+2xyi+y^2i^2=-5+12i$$
$$x^2-y^2+2xyi=-5+12i;$$

Соңгы тигезлектән $\begin{cases}x^2-y^2=-5,\\ 2xy=12\end{cases}$

системасын төзибез. Бу системаның ике чишелеше бар: (2; 3) һәм $(-2;\ -3)$. Димәк, $z_1=2+3i$, $z_2=-2-3i$.

5 нче мисал. $(1+2i)^6$ исәпләргә.

Чишү. (п. 58 не кара) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4b^2+$

$+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^2b^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}ab^5+b^6=$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Димәк, $(1+2i)^6=1^6+6\cdot1^5\cdot(2i)+15\cdot1^4\cdot(2i)^2a+$
$+20\cdot1^3\cdot(2i)^3+15\cdot1^2\cdot(2i)^4+6\cdot1\cdot(2i)^5+(2i)^6=1+12i+60i^2+$
$+160i^3+240i^4+192i^5+64i^6$.

Аннан соң $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\times$
$\times(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$, $i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$.
Димәк, $(1+2i)^6=1+12i-60-160i+240+192i-64=$
$=117+44i$.

47. Тигезләмәләрнең комплекслы тамырларын табу. $a>0$ булсын. $(\sqrt{a}\cdot i)^2=ai=-a$ булганлыктан, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot i$ була. Моның белән без тискәре реаль саннан квадрат тамыр табу мөмкинлегенә ирешәбез. Бу безгә тигезләмәләрнең реаль тамырларын гына түгел, ә уйланма тамырларын да табарга мөмкинлек бирә.

1 нче мисал. $x^2-4x+13=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2+3i$ (п 137 не кара).

Димәк, $x_1=2+3i$, $x_2=2-3i$.

2 нче мисал. $x^3=8$ тигезләмәсеннән чишәргә.

Чишү. $x^3-8=0$; $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. Димәк, яки $x-2=0$ моннан $x=2$; яки $x^2+2x+4=0$, моннан $x=-1+\sqrt{1-4}=-1+\sqrt{3}i$. Димәк, $x_1=2$; $x_2=-1+\sqrt{3}i$, $x_3=-1-\sqrt{3}i$.

II БҮЛЕК. АЛГЕБРАИК АҢЛАТМАЛАР

§ 5. Төп төшенчәләр

48. Алгебраик аңлатмаларның төрләре. Кушу, алу, тапкырлау, бүлү, рациональ дәрәҗәгә күтәрү һәм тамыр алу тамгалары һәм җәяләр ярдәмендә саннардан һәм үзгәрешлеләрдән *алгебраик аңлатмалар* төзелә.

Алгебраик аңлатмаларның мисаллары:

1) $2a^2b-3ab^2(a+b)$; 2) $a+b+\frac{c}{5}$; 3) $\frac{3a^2+3a+1}{a-1}$;

4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3$; 5) $\sqrt{a+b}$; 6) $(\sqrt[3]{2}-x)^4$; 7) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

Әгәр алгебраик аңлатмада үзгәрешлегә бүлү һәм үзгәрешледән тамыр алуга (аерым алганда вакланма күрсәткечле дәрәҗәгә) булмаса, ул *бөтен* аңлатма дип атала. Алда язылганнардан 1, 2 һәм 6 аңлатмалары бөтен.

Әгәр санлы һәм үзгәрешлеле аңлатма кушу, алу, тапкырлау, натураль күрсәткечле дәрәҗәгә күтәрү һәм бүлү, өстәвенә үзгәрешлеле аңлатмага бүлү гамәлләре ярдәмендә төзелсә, ул *вакланмалы* дип атала. Димәк, алда язылганнардан 3 нче һәм 4 нче аңлатмалар вакланмалы.

Бөтен һәм вакланмалы аңлатмаларны рациональ аңлатмалар дип атыйлар. Шулай итеп, алда язылганнардан 1, 2, 3, 4 һәм 6 нчы аңлатмалар *рациональ аңлатмалар* булалар.

Әгәр алгебраик аңлатмада үзгәрешледән тамыр алу (яки үзгәрешлеләрне вакланмалы дәрәҗәгә күтәрү) кулланылса, андый аңлатма *иррациональ* дип атала. Алда язылганнардан 5 нче һәм 7 нче аңлатмалар иррациональ.

Димәк, алгебраик аңлатмалар рациональ һәм иррациональ була алалар. Рациональ аңлатмалар, үз чиратында, бөтен һәм вакланмалы аңлатмаларга бүленәләр.

49. Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган кыйммәтләре. Алгебраик аңлатмаларның билгеләнү өлкәсе. Алгебраик аңлатманы мәгънәле итә торган үзгәрешлеләрнең кыйммәтләре *үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган кыйммәтләре* дип аталалар. Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре күплеге *алгебраик аңлатманың билгеләнү өлкәсе* дип атала.

Бөтен аңлатманың үзгәрешлеләренең теләсә нинди кыйммәтләрендә дә мәгънәсе була. Мәсәлән, 48 нче пункттагы 1, 2, 6 бөтен аңлатмаларының үзгәрешлеләренең теләсә нинди кыйммәтләрендә мәгънәләре бар.

Вакланмалы аңлатмаларның ваклаучыны нульгә әйләндерүче үзгәрешлеләрнең кыйммәтләрендә мәгънәләре булмый. 48 нче пункттагы 3 нче вакланмалы аңлатманың $a=1$ кыйммәтеннән тыш барлык a өчен мәгънәсе бар, ә 4 нче вакланмалы аңлатманың $a=0$, $b=0$ кыйммәтләреннән тыш, a, b, c ның барлык кыйммәтләре өчен мәгънәсе бар.

Иррациональ аңлатмаларның җөп дәрәҗә тамыр яки вакланмалы дәрәҗәгә күтәрү тамгасы астындагы аңлатманы тискәре санга әйләндерүче үзгәрешлеләрнең кыйммәтләре өчен мәгънәләре булмый. Шулай итеп, 5 нче иррациональ аңлатманың $a+b\geqslant 0$, ә 7 нче иррациональ аңлатманың $a\geqslant 0$ һәм $b\geqslant 0$ була торган a һәм b өчен генә мәгънәсе бар (п. 48 не кара).

Әгәр алгебраик аңлатмада үзгәрешлеләргә мөмкин саналган кыйммәтләр бирелсә, санлы аңлатма төзелә, аның кыйммәте үзгәрешлеләрнең сайлап алынган кыйммәтләре өчен *алгебраик аңлатманың* кыйммәте дип атала.

Мисал. $a=5$, $b=2$ булганда $\frac{\sqrt{a+b}}{2a-b}$ аңлатмасының кыйммәтен табарга.

Чишү. $\frac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2}=\frac{\sqrt{27}}{10-2}=\frac{3}{8}$.

50. Аңлатманың бердәй рәвешүзгәртүе турында төшенчә. Бердәйлек. $f(x)=x^2-2x$ һәм $g(x)=4x-5$ аңлатмаларын карыйк. $x=2$ булганда $f(2)=2^2-2\cdot 2=0$; $g(2)=4\cdot 2-5=3\cdot 0$ һәм 3 саннары x^2-2x һәм $4x-5$ аңлатмаларының $x=2$ булганда *тиңдәшле кыйммәтләре* дип аталалар. Шул ук аңлатмаларның $x=1$ булганда тиңдәш кыйммәтләрен табыйк.

$$f(1)=1^2-2\cdot 1=-1;\ g(1)=4\cdot 1-5=-1;$$

$x=0$ булганда;

$$f(0)=0-2\cdot 0=0;\quad g(0)=4\cdot 0-5=-5.$$

Ике аңлатманың тиңдәш кыйммәтләре бер-берсенә тигез булуы мөмкин (әле караган мисалда $f(1)=g(1)$ тигезлеге үтәлә), шулай ук бер-берсеннән аермалы булуы да мөмкин (әле караган мисалда $f(2)\neq g(2)$ $f(0)\neq g(0)$.

Әгәр бер үк үзгәрешлеле ике аңлатманың тиңдәш кыйммәтләре барлык мөмкин саналган кыйммәтләре өчен тигез булсалар, андый аңлатмалар *бердәй тигез* дип аталалар.

Үзгәрешлеләрнең мөмкин саналган барлык кыйммәтләре өчен дөрес тигезлек *бердәйлек* дип атала.

x^5 һәм x^2x^3, $a+b+c$ һәм $c+b+a$, $(2ab)^2$ һәм $4a^2b^2$ аңлатмалары бердәй тигезләр.

Бердәйлекләр мисаллары:

$$a+b=b+a,$$
$$a+0=a,$$
$$(a+b)c=ac+bc,$$
$$a\cdot 1=a,$$
$$x^5=x^2\cdot x^3$$

$\frac{2a}{a-1}=\frac{10a}{5(a-1)}$ пропорциясе (п. 30 ны кара) $a=1$ дән башка x ның барлык кыйммәтләре өчен бердәйлек, чөнки $a=1$ булганда вакланмаларның ваклаучылары нульгә әйләнә, ягъни вакланмаларның мәгънәсе булмый. $\frac{ac}{bc}$ аңлатмасын $\frac{a}{b}$ аңлатмасы белән алыштыру (c га кыскарттык) $b\neq 0$, $c\neq 0$ чикләре булганда бердәй үзгәртү була. Димәк, $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ тигезлеге $b=0$, $c=0$ кыйммәтләреннән тыш үзгәрешлеләрнең барлык кыйммәтләре өчен бердәйлек. Дөрес санлы тигезлекләр шулай ук *бердәйлекләр* дип аталалар.

Бер аңлатманы аңа бердәй тигез икенчесе белән алыштыру *аңлатманы бердәй рәвешүзгәртү* дип атала.

§ 6. Бөтен рациональ аңлатмалар.

51. Бербуыннар һәм алар өстендә гамәлләр. Саннардан, үзгәрешлеләрнең натураль дәрәҗәләреннән һәм аларның тапкырчыгышыннан торган һәм саннар белән үзгәрешлеләр өстендә башка бернинди дә гамәлләрне эченә алмаган аңлатма *бербуын* дип атала. Мәсәлән, $3a\cdot(2{,}5a^3)$, $(5ab^2)\cdot(0{,}4c^3d)$, $x^2y\cdot(-2z)\cdot\frac{3}{4}$ — бербуыннар, ә $a+b$, $\frac{ab}{c}$ аңлатмалары бербуын түгелләр.

Һәр бербуынны стандарт рәвешкә китерергә мөмкин, ягъни беренче урынга санлы тапкырлаучы һәм төрле үзгәрешлеләрнең дәрәҗәләре тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Стандарт рәвештә язылган бербуынның санлы тапкырлаучыны *бербуынның коэффициенты* дип атыйлар. Барлык үзгәрешлеләрнең дәрәҗә күрсәткечләре суммасын *бербуынның дәрәҗәсе* дип атыйлар.

Әгәр ике бербуын арасында тапкырлау тамгасы куелса, бирелгән бербуыннан *тапкырчыгышы* дип аталучы бербуын барлыкка килә. Бербуынның натураль дәрәҗәсе шулай ук бербуын була. Гадәттә нәтиҗәне стандарт рәвешкә китерәләр. Бербуынны стандарт рәвешкә китерү, бербуыннарны тапкырлау — бердәй рәвешүзгәртүләр алар.

1 нче мисал. $3a\cdot(2{,}5a^3)$ бербуынын стандарт рәвешкә китерергә.

Чишү. $3a\cdot(2{,}5a^3)=(3\cdot 2{,}5)\cdot(a\cdot a^3)=7{,}5a^4$

2 нче мисал. $24ab^2cd^3$ һәм $\frac{1}{6}a^2b^3c$ бербуыннарын тапкырларга.

Чишү. $(24ab^2cd^3)\cdot\left(\frac{1}{6}a^2b^3c\right)=\left(24\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot(a\cdot a^2)\cdot(b^2b^3)\times$ $\times(c\cdot c)\cdot d^3=4a^3b^5c^2d^3$.

3 нче мисал. $(-3ab^2c^3)$ бербуынын дүртенче дәрәҗәгә күтәрергә.

Чишү. $(-3ab^2c^3)^4=(-3)^4\cdot a^4(b^2)^4(c^3)^4=81a^4b^8c^{12}$.

Стандарт рәвешенә китерелгән бербуыннар коэффициентлары белән генә аерылып торсалар яки бөтенләй аерылмасалар, охшаш дип аталалар. Охшаш бербуыннарны кушарга һәм алырга мөмкин, нәтиҗәдә яңадан бирелгәннәргә охшаш (кайчакта 0) бербуын барлыкка килә. Охшаш бербуыннарны кушу һәм алу охшаш буыннарны *берләштерү* дип атала.

4 нче мисал. $18x^2yz^3$ һәм $-8x^2yz^3$ бербуыннарын кушарга.

Чишү. $18x^2yz^3+(-8x^2yz^3)=(18+(-8)x^2yz^3)=10x^2yz^3$.

52. Күпбуыннар. Күпбуыннарны стандарт рәвешкә китерү.

Бербуыннар суммасы күпбуын дип атала. Әгәр күпбуынның барлык буыннарын стандарт рәвештә язып (п. 51 не кара), охшаш буыннар берләштерелсә, *стандарт рәвешендәге күпбуын* барлыкка килә.

Һәр бөтен аңлатманы стандарт рәвешендәге күпбуынга үзгәртергә мөмкин — бөтен аңлатмаларның рәвешен үзгәртү (гадиләштерү) шушы максаттан тора.

Бөтен аңлатманы стандарт рәвешендәгә күпбуынга үзгәртергә кирәк булган мисаллар китерик.

1 нче мисал. $3a\cdot 5b+3ab+2a, (-4b)+b\cdot b$

Чишү. Элек күпбуын буыннарын стандарт рәвешкә китерик. $15ab+3ab-8ab+b^2$ була. Охшаш буыннарны берләштергәч, $10ab+b^2$ стандарт рәвешендәге күпбуын табабыз.

2 нче мисал. $(3a+5b-2c)+(2a-b+4c)$

Чишү. Әгәр җәяләр алдында «плюс» тамгасы торса, җәяләр эчендәге барлык кушылучыларның тамгаларын үзгәртмичә, җәяләрне төшереп калдырырга мөмкин. Җәяләр ачуның шушы кагыйдәсен кулланып, табабыз:
$3a+5b-2c+2a-b+4c=(3a+2a)+(5b-b)+$
$+(-2c+4)=5a+4b+2c.$

3 нче мисал. $(5a^2b+ab^2)-(3a^2b-4ab^2)$.

Чишү. Әгәр җәяләр алдында «минус» тамгасы торса, җәя эчендәге һәр кушылучының тамгасын үзгәртеп, җәяләрне төшереп калдырырга мөмкин. Җәяләр ачуның шушы кагыйдәсен кулланып, табабыз:

$$5a^2b+ab^2-3a^2b+4ab^2=(5a^2b-3a^2b)+$$
$$+(ab^2+4ab^2)=2a^2b+5ab^2.$$

4 нче мисал. $4x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+3\right)$.

Чишү. Бербуынның күпбуынга тапкырчыгышы тарату законы буенча, бу бербуынны күпбуынның һәр буынына тапкырчыгышлары суммасына тигез. Моннан, $4x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+3\right)=$
$=4x^2\cdot x-4x^2\cdot\frac{1}{2}x^2+4x^2\cdot 3=4x^3-2x^4+12x^2.$

5 нче мисал. $(a+b)(a-b)$

Чишү. $(a+b)(a-b)=(a+b)a+(a+b)\cdot(-b)=a^2+ab-$
$-ab-b^2=a^2-b^2.$

6 нчы мисал. $(2x^2y+3xy^2)(2x+3y+1)$

Чишү. $2x^2y(2x+3y+1)+3xy^2(2x+3y+1)=(4x^3y+$
$+6x^2y^2+2x^2y)+(6x^2y^2+9xy^3+3xy^2)=4x^3y+6x^2y^2+2x^2y+$
$+6x^2y^2+9xy^3+3xy^2.$

Охшаш буыннарны берләштерәсе калды (аларның астына сызылган). Табабыз:

$$4x^3y+12x^2y^2+2x^2y+9xy^3+3xy^2.$$

53. Кыскача тапкырлау формулалары. Кайбер очракларда бөтен аңлатманы күпбуынның стандарт рәвешенә китерү бердәйлекләр ярдәмендә башкарыла:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (1)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (2)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (3)$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (4)$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad (5)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (6)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (7)$$

Бу бердәйлекләр *кыскача тапкырлау формулалары* дип аталалар.

Бирелгән аңлатманы стандарт рәвешендәге күпбуынга үзгәртүгә мисаллар карыйк:

1 нче мисал. $(3x^2+4y^3)(3x^2-4y^3)$

Чишү. (1)формуланы кулланып, табабыз:

$$(3x^2)^2-(4y^3)^2=9x^4-16y^6$$

2 нче мисал. $(a+b-c)(a+b+c)$.

Чишү. $(a+b-c)(a+b+c)=((a+b)-c)((a+b)+c)=$
$=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$.

3 нче мисал. $(3a^2-5b^3)^2$.

Чишү. (3) формуланы кулланып, табабыз:

$$(3a^2)^2-2\cdot 3a5b^3+(5b^3)^2=9a^4-30a^2b^3+25b^6.$$

4 нче мисал. $(3a+1)(9a^2-3a+1)$.

Чишү: (4) формуланы кулланып, табабыз:

$$(3a)^3+1=27a^3+1.$$

54. Күпбуынны тапкырлашучыларга таркату. Кайчакта күпбуынны берничә тапкырлашучыга — күпбуыннарга яки бербуыннарга — үзгәртеп була. Мондый бердәй рәвешүзгәртү *күпбуынны тапкырлашучыларга таркату* дип атала. Бу очракта күпбуын тапкырлаучыларның һәркайсына бүленә диләр.

Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатуның берничә ысулын карап үтик.

1) *Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару.* Бу рәвешүзгәртү тарату законының турыдан-туры нәтиҗәсе булып тора (тик бу законны «уңнан сулга» күчереп язарга гына кирәк).

$$ac+bc=c(a+b).$$

1 нче мисал. $28x^3-35x^4$ күпбуынын тапкырлаучыларга таркатырга:

Чишү: $28x^3-35x^4=7x^3\cdot 4-7x^3\cdot 5x=7x^3(4-5x)$.

Гадәттә, уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарганда, күпбуынның һәр буынында булган үзгәрешленең иң кечкенә дәрәҗә күрсәткечлесен чыгаралар. Әгәр күпбуынның барлык коэффициентлары бөтен сан булса, уртак тапкырлаучы коэффициенты сыйфатында күпбуынның барлык коэффициентларының модуле буенча иң зур уртак бүлүчене алалар.

2) Кыскача тапкырлау формулаларын куллану.

53 нче пункттагы (1)—(7) формулаларын «уңнан сулга» укыганда күп очракларда күпбуынны тапкырлаучыларга таркатуда ярдәм итәләр.

2 нче мисал. x^6-1 тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. $x^6-1=(x^3)^2-1^2$,(1) формуланы (квадратлар аермасы) кулланып, $(x^3+1)(x^3-1)$ табабыз. Хәзер (4) һәм (5) формулаларны (кублар суммасы, кублар аермасы) кулланып, табабыз:

$$(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Димәк,

$$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

3 нче мисал. $4a^4b^3+16a^3b^4+16a^2b^5$.

Чишү. Элек уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарыйк. Аның өчен 4, 16, 16 саннарының иң зур уртак бүлүчесен һәм бу күпбуынны төзүче бербуыннарга керүче a һәм b үзгәрешлеләренең иң кечкенә дәрәҗә күрсәткечләрен табыйк.

$$4a^2b^3(a^2+4ab+4b^2)$$

аңлатмасын табабыз. (2) формула буенча $a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$ булганлыктан, ахыргы нәтиҗә: $4a^4b^3+16a^3b^4+16a^2b^5=4a^2b^2(a+2b)^2$.

3) *Группалау ысулы*. Кушуның урыналыштыру һәм оештыру законнары күпбуын буыннарын төрле юллар белән группаларга мөмкинлек бирә, бу ысул шуңа нигезләнгән дә. Кайчак шундый группалауга ирешелә ки, уртак тапкырлаучыларны җәяләр тышына чыгаргач, һәр группада җәяләрдә бер үк төрле тапкырлаучы кала, үз чиратында ул уртак тапкырлаучы буларак, җәя тышына чыгарыла ала. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатуга мисаллар карыйк.

4 нче мисал. $x^3-3x^2+5x-15$.

Чишү. Группалауны түбәндәгечә башкарыйк:

$$(x^3-3x^2)+(5x-15).$$

Беренче группада уртак тапкырлаучы x^2 ны, икенчесендә — уртак тапкырлаучы 5 не җәя тышына чыгарыйк. $x(x-3)+5(x-3)$ була. Хәзер $(x-3)$ күпбуынын уртак тапкырлаучы буларак, җәя тышына чыгарыйк. Шулай итеп, табабыз:

$$x^3-3x^2+5x-15=(x-3)(x^2+5).$$

5 нче мисал. $20x^2+3yz-15xy-4xz$.

Чишү. $20x^2+3yz-15xy-4xz=(20x^2-15xy)+(3y-4xz)=5x(4x-3y)-z(4x-3y)=(4x-3y)(5x-z)$.

6 нчы мисал. $a^2-7ab+12b^2$.

Чишү. Монда бернинди группалау да барлык группаларда бер үк күпбуынны китереп чыгара алмас. Кайчак, мондый очракларда, күпбуынның кайсы булса да бер буынын ниндидер сумма рәвешендә күрсәтү файдалы була, шуннан соң яңадан группалау ысулын кулланып карарга кирәк. Безнең мисалда $-7ab$ ны $-3ab-4ab$ суммасы рәвешендә күрсәтү максатка ярашлы.

$$a^2-7ab+12b^2=a^2-3ab-4ab+12b^2=(a-3ab)-(4ab-12b^2)=a(a-3b)-4b(a-3b)=(a-3b)(a-4b).$$

7 нче мисал. x^4+4y^4.

Чишү. $4x^2y^2$ бербуынын кушыйк һәм алыйк. $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$.

55. Бер үзгәрешлеле күпбуыннар. $ax+b$ күпбуыны, монда a, b — саннар ($a\neq0$), ә x — үзгәрешле, *беренче дәрәҗә күпбуын* дип атала; ax^2+bx+c күпбуыны, монда a, b, c — саннар ($a\neq0$), ә x — үзгәрешле, *икенче дәрәҗә күпбуын* яки *квадрат өчбуын* дип атала; ax^3+bx^2+cx+d күпбуыны, монда a, b, c, d — саннар ($a\neq0$), ә x — үзгәрешле, *өченче дәрәҗә күпбуын* дип атала.

Гомумән, a, b, c, ..., l, m — саннар ($a\neq0$, ә x — үзгәрешле булса,

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+lx+m$$

күпбуыны *n нчы дәрәҗә күпбуын* дип атала (x ка карата), ax^n, bx^{n-1}, ..., lx, m — күпбуын буыннары, a, b, c, ..., l, m — коэффициентлар, ax^n — күпбуынның *өлкән буыны*, a — *өлкән буыны коэффициенты*, m — күпбуынның *ирекле буыны*. Гадәттә күпбуынны үзгәрешленең дәрәҗәсе кимү тәртибендә язалар, ягъни x үзгәрешлесенең дәрәҗәләре әкренләп кимиләр, аерым алганда, өлкән буын беренче урында, соңгы урында — ирекле буын тора. Күпбуын дәрәҗәсе — өлкән буын дәрәҗәсе ул.

Мәсәлән, $5x^5-2x^3+3x^2+1$ — бишенче дәрәҗә күпбуын, монда $5x^5$ — өлкән буын, 1 — күпбуынның ирекле буыны.

$P(x)$ күпбуынын нульгә әйләндерә торган x ның кыйммәте *күпбуынның тамыры* дип атала. Мәсәлән, $P(x)=x^3+2x^2-7x-2$ күпбуынның тамыры 2 гә тигез, чөнки $P(2)=2^3+2\cdot2^2-7\cdot2-2=0$.

56. Квадрат өчбуынны сызыкча тапкырлаучыларга таркату. Әгәр x_1 һәм x_2 — ax^2+bx+c квадрат өчбуынының тамырлары (ягъни $ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсенең тамырлары) булса, ул вакытта:

$$ax^2+bx+c=a(x\pm x_1)(x-x_2).$$

Бу формула *квадрат өчбуынны* тапкырлаучыларга таркату өчен кулланыла.

Мисал. $6x^2-x-2$ өчбуынын тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. Квадрат тигезләмә тамырлары формуласын (п. 137 не кара), $6x^2-x-2=0$ тигезләмәсенә кулланып, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$ табабыз. Димәк,

$$6x^2-x-2=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot3\left(x-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=(2x+1)(3x-2).$$

57. $x^n - a^n$ икебуынын тапкырлаучыларга таркату.

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a), \qquad (1)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2) \qquad (2)$$

икәне билгеле.

Әгәр $x - a$ һәм $x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$ аңлатмаларын тапкырласак, табарбыз:

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3). \qquad (3)$$

(1), (2), (3) формулаларының гомуми нәтиҗәсе булып, $x^n - a^n$ икебуынын тапкырлаучыларга таркату формуласы тора:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Әгәр аерым алганда, $a = 1$ булса, табабыз:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1).$$

Мәсәлән, $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

58. Икебуынны натураль дәрәҗәгә күтәрү (Ньютон биномы). Бу пунктта сүз $a + b$ икебуынын ничек итеп теләсә нинди натураль дәрәҗәгә күтәрү турында бара.

Әгәр $n = 1$ булса, ул вакытта $(a + b)^1 = a + b$.

Әгәр $n = 2$ булса, ул вакытта $(a + b)^2 = a^2 + 3ab + b^2$.

Әгәр $n = 3$ булса, ул вакытта $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$. $(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b)$ булуын файдаланып,

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

формуласын чыгарырга мөмкин.

Гомумән, түбәндәге формула дөрес *(Ньютон биномы):*

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n.$$

Мисал. $(a + b)^6$ өчен Ньютон биномы формуласы буенча табабыз:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{12}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5 + b^6 = a^6 + 6a^5b^2 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

§ 7. Вакланмалы рациональ аңлатмалар.

59. Рациональ вакланма аның төп үзлеге. Теләсә нинди вакланмалы аңлатманы (п. 48) $\frac{P}{Q}$ рәвешендә язарга мөмкин, монда P һәм Q — рациональ аңлатмалар, шуның өстенә Q да үзгәрешлеләр булу мәҗбүри. Шундый $\frac{P}{Q}$ вакланмасын *рациональ вакланма* дип атыйлар.

Рациональ вакланмалар мисаллары:

$$\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}, \quad \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}, \quad \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{a-b}.$$

Вакланманың төп үзлеге $\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}$ бердәйлеге белән аңлатыла, ул $P\neq 0$, $Q\neq 0$ шартларында үтәлә, монда R — бөтен рациональ аңлатма. Бу рациональ вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын нульдән үзгә бер үк бербуынга яки күпбуынга тапкырларга яки бүләргә мөмкин икәнне аңлата:

$$\text{Мәсәлән, } \frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}=\frac{12\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4x^3-6x^2+12}{3x^2+2x+6}.$$

Вакланманың төп үзлеге вакланма буыннарының тамгаларын үзгәртү өчен кулланылуы мөмкин. Әгәр $\frac{P}{Q}$ вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын -1 гә тапкырласаң, $\frac{P}{Q}=\frac{-P}{-Q}$ табабыз. Димәк, әгәр бер үк вакытта санаучының һәм ваклаучының тамгаларын үзгәртсәң, вакланма кыйммәте үзгәрмәс. Әгәр инде санаучының гына яки ваклаучының гына тамгасын үзгәртсәң, ул чакта вакланма да үз тамгасын үзгәртер: $\frac{P}{Q}=-\frac{P}{Q}$; $\frac{P}{-Q}=-\frac{P}{Q}$.

Димәк, $\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{-Q}$.

Мәсәлән, $\frac{3x-2}{3x+4}=-\frac{-(3x-2)}{3x+4}=-\frac{2-3x}{3x+4}$.

60. Рациональ вакланмаларны кыскарту. Вакланманы кыскарту — вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын уртак тапкырлаучыга бүлү дигән сүз. Мондый кыскартуның мөмкинлеге вакланманың төп үзлеге белән бәйләнгән.

Рациональ вакланманы кыскарту өчен, санаучы һәм ваклаучыны тапкырлаучыларга таркатырга кирәк. Әгәр санаучыда һәм ваклаучыда уртак тапкырлаучылар булса, ул вакытта вакланманы кыскартып була. Әгәр уртак тапкырлаучылар булмаса, ул вакытта вакланманы кыскарту ярдәмендә үзгәртеп булмый.

Мисал. $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}$ вакланмасын кыскартырга.

Чишү. $x^2-3xy=x(x-3y)$;

$$9y^2-x^2=-(x^2-9y^2)=-(x-3y)(x+3y).$$

Димәк, $\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}=\frac{x(x-3y)}{-(x-3y)(x+3y)}=-\frac{x}{x+3y}$.

Вакланманы кыскарту $x-3y\neq 0$ булганда үтәлә.

61. Иррациональ вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү. Берничә рациональ вакланманың *уртак ваклаучысы* дип, һәр вакланма ваклаучысына бүленүче бөтен рациональ сан атала. (п. 54 не кара).

Мәсәлән, $\frac{x}{x+2}$ һәм $\frac{3x-1}{x-2}$ вакланмаларының уртак ваклаучысы булып, $(x+2)(x-2)$ күпбуыны хезмәт итә, чөнки ул $x+2$ гә дә, $x-2$ гә дә бүленә; һәм $3(x+2)(x-2)$ күпбуыны да, $x(x+2)(x-2)$ күпбуыны да, $5x^2(x+2)^2(x-2)^3$ күпбуыны да һ. б. да $(x+2)(x-2)$ гә бүленә. Гадәттә уртак ваклаучының шундыен алалар, калганнарының һәркайсы аңа бүленерлек булсын. Шундый иң гади уртак ваклаучыны кайчак *иң кечкенә уртак ваклаучы* дип атыйлар.

Алда тикшерелгән мисалда уртак ваклаучы $(x+2)(x-2)$ була.

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)};\quad \frac{3x-1}{x-2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Бирелгән вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү беренче вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын $x-2$ гә, ә икенче вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын $x+2$ гә тапкырлау юлы белән ирешелде. $x-2$ һәм $x+2$ күпбуыннары тиңдәшле рәвештә беренче һәм икенче вакланма өчен *өстәмә тапкырлаучылар* дип аталалар. Бирелгән вакланма өчен өстәмә тапкырлаучы — уртак тапкырлаучыны шул вакланма ваклаучысына бүлүдән чыккан өлешкә тигез.

Берничә рациональ вакланманы уртак ваклаучыга китерү өчен, түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) һәр вакланма ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатырга;

2) 1 пунктта табылган таркатмадагы барлык тапкырлаучыларны тапкырлашучылар сыйфатында алып, уртак ваклаучы төзергә, әгәр нинди дә булса тапкырлаучы берничә таркатмада булса, ул иң зур дәрәҗә күрсәткечлесе белән алына.

3) вакланмаларның һәркайсы өчен өстәмә тапкырлаучы табарга (аның өчен уртак ваклаучыны вакланманың ваклаучысына бүләләр).

4) һәр вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын өстәмә тапкырлаучыга тапкырлап бетереп, вакланманы уртак ваклаучыга китерәләр.

Мисал. Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерергә.

$$\frac{a}{12a^2-12b^2};\quad \frac{b}{18a^3+18a^2b};\quad \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

Чишү. Ваклаучыларны тапкырлаучыларга таркатыйк:

$$12a^2-12b^2=12(a-b)(a+b);$$
$$18a^3+18a^2b=18a^2(a+b);$$
$$24a^2-24ab=24a(a-b).$$

Уртак ваклаучыга түбәндәге тапкырлаучыларны кертергә кирәк: $(a-b)$, $(a+b)$, a^2 һәм 12, 18, 24 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысын, ягъни К(12, 18, 24) = 72. Димәк, уртак ваклаучы $72a^2(a-b)(a+b)$ була.

Өстәмә тапкырлаучылар: беренче вакланма өчен $6a$, икенчесе өчен $-4(a-b)$, өченчесе өчен $-3a(a+b)$. Димәк, табабыз:

$$\frac{\overset{\frown\, 6a^2}{a}}{12a^2-12b^2}=\frac{6a^3}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{\frown\, 4(a-b)}{b}}{18a^3+18a^2b}=\frac{4b(a-b)}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{\frown\, 3a(a+b)}{a+b}}{24a^2-24ab}=\frac{3a(a+b)^2}{72a^2(a-b)(a+b)}.$$

62. Рациональ вакланмаларны кушу һәм алу. Ваклаучылары тигез булган ике (гомумән теләсә нинди чикле санда) рациональ вакланманың суммасын ваклаучысы шул ук, ә санаучысы кушылучы вакланмаларның санаучылары суммасына тигез булган вакланмага бердәй тигез:

$$\frac{P_1}{Q}+\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1+P_2}{Q}.$$

Ваклаучылары тигез булган вакланмаларны алу очрагы да шуңа охшаш була.

$$\frac{P_1}{Q}-\frac{P_2}{Q}=\frac{P_1-P_2}{Q}.$$

1 нче мисал. $\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. $\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}=\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=$
$=x^2-xy+y^2.$

Ваклаучылары төрле булган рациональ вакланмаларны кушу һәм алу өчен, иң элек уртак ваклаучыга китерергә, ә аннан соң ваклаучылары тигез булган вакланмалар өстендә гамәлләр эшләргә кирәк.

2 нче мисал. $\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x}$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. $2x^2+2x=2x(x+1)$; $\underbrace{x^2}_{x-1}-1=(x-1)\underbrace{\,}_{2x}(x+1)$.

Димәк, $\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x}=\frac{3}{2x(x+1)}+\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}-$

$$-\overbrace{\frac{2}{x}\qquad}^{2(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)+2x(2x-1)-4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{2x(x-1)}.$$

63. Рациональ вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү. Ике (гомумән теләсә никадәр чикле санда) *рациональ вакланмалар тапкырчыгышы* санаучысы тапкырланучы вакланмаларның санаучылары тапкырчыгышына, ваклаучысы — ваклаучылары тапкырчыгышына тигез булган бердәй вакланмага тигез:

$$\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2}.$$

Тапкырлау һәм бүлүнең формалаштырылган кагыйдәләрен күпбуынга тапкырлау һәм бүлү очракларына да кулланып була: бу күпбуынны ваклаучысы 1 булган вакланма рәвешендә язу җитә.

Рациональ вакланмаларны тапкырлау һәм бүлү нәтиҗәсендә барлыкка килгән рациональ вакланманы кыскарту мөмкинлеге булуын истә тотып, гадәттә бу гамәлләрне башкарганчы бирелгән вакланмаларның санаучыларын һәм ваклаучыларын тапкырлаучыларга таркатырга тырышалар.

1 нче мисал. Тапкырларга: $\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}$.

Чишү. $\frac{x^2+2x+1}{18x^3}=\frac{(x+1)^2}{18x^3}$; $\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}$.

Вакланмаларны тапкырлау кагыйдәсен кулланып, табабыз:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2\cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

2 нче мисал. Бүләргә $\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

Чишү. $\frac{a^3-2a^2}{3a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)}$; $\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}$.

Бүлү кагыйдәсен кулланып, табабыз:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)\cdot(a-2)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

64. Рациональ вакланманы бөтен дәрәҗәгә күтәрү. $\frac{P}{Q}$ рациональ вакланманы n натураль дәрәҗәгә күтәрү өчен, вакланманың санаучысын һәм ваклаучысын аерым-аерым бу дәрәҗәгә күтәрергә, беренче аңлатманы — санаучы, икенчесен ваклаучы итеп язарга кирәк.

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

1 нче мисал. $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$ дәрәҗәне вакланмага үзгәртергә.

Чишү. $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3=\frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3}=\frac{8x^6y^9}{27z^{15}}$.

Вакланманы бөтен тискәре дәрәҗәгә күтәргәндә $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n}=\left(\frac{Q}{P}\right)^n$ бердәйлеге кулланыла, бу бердәйлек $P\neq 0$ һәм $Q\neq 0$ шартын үтәүче үзгәрешленең барлык кыйммәтләре өчен дөрес.

2 нче мисал. Аңлатманы дәрәҗәгә күтәрергә

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}.$$

Чишү.

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}=\left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2(a-b)^3}\right)^5=\frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10}(a-b)^{15}}.$$

65. Рациональ аңлатмаларны үзгәртү.

Теләсә нинди рациональ аңлатманы үзгәртү рациональ аңлатмаларны кушу, алу, тапкырлау һәм бүлүгә, һәм шулай ук вакланманы натураль дәрәҗәгә күтәрүгә кайтып кала. Һәр рациональ аңлатманы санаучысы һәм ваклаучысы бөтен рациональ аңлатма булган вакланмага үзгәртеп була, кагыйдә буларак, рациональ аңлатмаларны бердәй үзгәртүнең максаты шуннан гыйбарәт.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)^{-1}+\frac{8a^2}{2a+b}.$$

Чишү.

$$1)\ \frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}=\frac{\overset{2a+b}{\frown}\!\!2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2};$$

$$2)\ \frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{\overset{2a+b}{\frown}\!\!1}{2a-b}=$$

$$=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)};$$

$$3)\ \left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)}\right)^{-1}=-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b};$$

$$4)\ \frac{2ab}{(2a+b)^2}\cdot\left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}\right)=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2}=$$

$$=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b};$$

$$5)\ \frac{2ab-4a^2}{2a+b}+\frac{8a^2}{2a+b}=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=\frac{2a(2a+b)}{2a+b}=2a.$$

§ 8. Иррациональ аңлатмалар.

66. Арифметик тамырларның (радикалларның) иң гади үзгәртүләре. Арифметик тамырларны үзгәрткәндә аларның үзлекләреннән файдаланалар (п. 35 не кара). Радикалларны иң гади үзгәртүләр өчен арифметик тамырлар үзлекләрен кулланугa берничә мисал карыйк. Шуның белән бергә, барлык үзгәртүләр тискәре булмаган кыйммәтләр генә алалар дип исәплик.

1 нче мисал. Тапкырчыгыштан тамыр алырга $\sqrt[3]{a^3b^9}$.

Чишү. 1° үзлекне кулланып, табабыз:

$\sqrt[3]{a^3b^9}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^9}=ab^3$.

2 нче мисал. Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгарырга $\sqrt{45a^5}$;

Чишү. $\sqrt{45a^5}=\sqrt{9a^45a}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{5a}=3a^2\sqrt{5a}$. Мондый үзгәртү *тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару* дип атала. Үзгәртү максаты — тамырасты аңлатмасын гадиләштерү.

3 нче мисал. Гадиләштерергә $(\sqrt[3]{(a^2)^5}$.

Чишү. 3° үзлек буенча $(\sqrt[3]{a^2})^5=\sqrt[3]{(a^2)^5}=\sqrt[3]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^9a}=a^3\times$ $\times\sqrt[3]{a}$. Димәк, $(\sqrt[3]{a^2})^5=a^3\sqrt[3]{a}$.

4 нче мисал. Гадиләштерергә $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$.

Чишү. $x^2\sqrt[3]{x}$ аңлатмасын тапкырлаучыны тамыр тамгасы астына кертеп, үзгәртик: $x^2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{|x^2|^3}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x}=$ $=\sqrt[3]{x^6\cdot x}=\sqrt[3]{x^7}\cdot$ 4° үзлек буенча $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}=\sqrt[12]{x^7}$.

5 нче мисал. Гадиләштерергә $\sqrt[30]{2^9}$.

Чишү. 5° үзлек буенча тамыр күрсәткечен һәм тамырасты аңлатмасының күрсәткечен бер үк натураль санга кыскарта алабыз. Әгәр тикшерә торган мисалда күрсәтелгән күрсәткечләрне 3 кә кыскартсак, $\sqrt[30]{2^9}=\sqrt[10]{2^3}=\sqrt[10]{8}$ була.

6 нчы мисал. Аңлатмаларны гадиләштерергә:

а) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$; в) $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}$.

Чишү. а) 1° үзлек буенча тамыр күрсәткечләре бер үк булган тамырларны тапкырлау өчен, тамырасты аңлатмаларын тапкырлау һәм нәтиҗәдән шул ук дәрәҗә тамыр алу җитә. Димәк,

$$\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5]{a\cdot a^2}=\sqrt[5]{a^3}.$$

б) Иң элек без радикалларны бертөрле күрсәткечкә китерергә тиешбез. 5° үзлек нигезендә тамыр күрсәткечен һәм тамырасты аңлатмасының дәрәҗә күрсәткечен бер үк натураль санга тапкырлый алабыз. Шуңа күрә $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$. Шуннан соң $\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^3}$. Ә хәзер тамыр күрсәткечен һәм тамырасты аңлатмасының күрсәткечен 3 кә бүлеп, $\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$ табабыз.

Димәк, $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt{a}$.

в) Радикалларны бер күрсәткечкә китерик. Аның өчен 8 һәм 12 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысын табарга кирәк. Ягъни $K(8;\ 12)=24$ була. Димәк, беренче тапкырлаучы радикалның тамыр һәм тамырасты аңлатмасының дәрәҗә күрсәткечләрен 3 кә, ә икенчесенекен 2 гә тапкырларга кирәк.

$\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}=\sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{14}}=\sqrt[24]{x^9\cdot x^{14}}=\sqrt[24]{x^{23}}$.

Практикада радикаллар өстендә гамәлләр эшләгәндә еш кына вакланмалы күрсәткечләргә күчәләр.

$\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}=x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{7}{12}}=x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}}=x^{\frac{23}{24}}=\sqrt[24]{x^{23}}$.

67. $\sqrt{a^2}=|a|$ **бердәйлеге.** $\sqrt{a^2}$ аңлатмасын гадиләштерик. Монда ике очрак булуы мөмкин: $a\geqslant 0$ яки $a<0$. Әгәр $a\geqslant 0$ булса, ул вакытта $\sqrt{a^2}=a$; мәсәлән, $\sqrt{2^2}=2$; $\sqrt{27^2}=27$; $\sqrt{0^2}=0$. Әгәр $a<0$ булса, ул вакытта $\sqrt{a}=-a$, мәсәлән, $\sqrt{(-2)^2}=-(-2)=2$.

Димәк,

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, & \text{әгәр } a\geqslant 0 \text{ булса,}\\ -a, & \text{әгәр } a<0 \text{ булса.}\end{cases}$$

Ләкин реаль санның модуле дә нәкъ шулай билгеләнә (п. 26 ны кара). Шулай итеп,

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Мәсәлән, $\sqrt{3^2}=|3|=3$; $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=-(-5)=5$. Гомумән, әгәр n — җөп сан, ягъни $n=2k$ булса,

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$.

Чишү. $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$. Бирелгән аңлатмада $\sqrt{2-x}$ кушылучысы булганлыктан, $2-x\geqslant 0$, моннан $x\leqslant 2$. Димәк, $x-3<0$, шуңа күрә $|x-3|=-(x-3)=3-x$. Һәм табабыз:

$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=3-x+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}$.

68. Иррациональ аңлатмаларны үзгәртү. Иррациональ аңлатмаларны үзгәртү өчен, радикаллар үзлекләре (п. 35 не кара) һәм рациональ күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре (п. 38 не кара) кулланылалар.

Мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\left(x^0+\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Чишү.

1) $\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^2}-1)}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{x}.$

2) $-\sqrt[4]{x}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{-\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2=\frac{1^2}{(\sqrt[4]{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$

4) $x^0+\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}.$

5) $\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$

6) $\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Димәк, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Гадәттә җавапта ваклаучыда иррациональлекне калдырмаска тырышалар. $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ вакланма ваклаучысындагы иррациональлектән котылу өчен, санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{x}-1$ гә тапкырлыйлар, ул аңлатма $\sqrt{x}+1$ аңлатмасының *иярешлесе* дип атала.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x^2})-1^2}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

III БҮЛЕК. ФУНКЦИЯЛӘР ҺӘМ ГРАФИКЛАР

§ 9. Функцияләрнең үзлекләре

69. Функция билгеләмәсе. Әгәр x ның һәр кыйммәтенә y ның бердәнбер кыйммәте тиңдәш булса, y үзгәрешлесенең x үзгәрешлесеннән бәйлелеге *функция* дип атала. x үзгәрешлесен *бәйсез үзгәрешле яки аргумент*, ә y үзгәрешлесен — *бәйле үзгәрешле* дип атыйлар. x ның бирелгән кыйммәтенә тиңдәшлә y ның кыйммәтен *функциянең кыйммәте* дип атыйлар.

$y=f(x)$ дип язалар, «Эф от x» дип укыла. f хәрефе белән бирелгән функция, ягъни x һәм y үзгәрешлеләре арасындагы функциональ бәйлелек билгеләнә; $f(x)$ — x аргументына тиңдәш функция кыйммәте. Шулай ук $f(x)$ — функциянең x *ноктасындагы* кыйммәте дип тә әйтәләр.

Бәйсез үзгәрешле ала торган барлык кыйммәтләр *функциянең билгеләнү өлкәсен* төзиләр.

$f(x)$ функциясе (билгеләнү өлкәсенә керә торган x лар өчен) ала торган барлык кыйммәтләр *функциянең кыйммәтләр өлкәсен* төзиләр.

$y=x^2$ функциясен карыйк, монда $1\leqslant x\leqslant 3$. Бу язылыш функция бирелүен һәм $[1;\ 3]$ кисемтәсендәге һәр x санына тиңдәш итеп аның квадраты куелуын аңлата. Мәсәлән, $f(1)=1^2=1$; $f(2)=2^2=4$; $f(2{,}3)=2{,}3^2=5{,}29$ һ. б. Бу очракта $f(4)$ язылышының мәгънәсе юк, чөнки 4 саны $[1;\ 3]$ кисемтәсенә керми. $[1;\ 3]$ кисемтәсе — функциянең билгеләнү өлкәсе.

70. Функциянең аналитик бирелеше. Функцияне бирү өчен, аргументның һәр кыйммәтенә функциянең тиңдәш кыйммәтен табарга мөмкинлек бирүче ысул күрсәтергә кирәк. $y=f(x)$ формуласы ярдәмендә функцияне бирү ысулы иң уңышлы кулланыла, монда $f(x)$ — x үзгәрешлесе белән ниндидер аңлатма. Мондый очракта, функция формула белән яки функция аналитик ысул белән бирелгән диләр.

1 нче мисал. $y=x^2+5x-1$, монда $x\geqslant 0$ $[0;\ \infty)$ нуры — функциянең билгеләнү өлкәсе. Бу функциянең $x\geqslant 0$ булган теләсә нинди ноктасында функция кыйммәтен табу өчен, x^2+5x-1 аңлатмасының сайланган ноктадагы санлы кыйммәтен табу җитә. Функция аналитик ысул белән бирелгән.

Аналитик ысул белән бирелгән функция өчен кайчак билгеләнү өлкәсен күрсәтмиләр. Мондый очракта $y=f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсе $f(x)$ аңлатмасының билгеләнү өлкәсе белән, ягъни $f(x)$ аңлатмасының мәгънәсе булган x ның кыйммәтләре белән туры килә дип уйлыйлар.

2 нче мисал. $y=f(x)$ функциясе аналитик ысул белән

$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+3}$ формуласы белән бирелгән.

а) $f(-x)$; б) $f(kx)$; в) $f(x+a)$; г) $f|x|$ ны табарга.

Чишү. а) $f(-x)$ ны табу өчен $f(x)$ та x урынына һәркайда $(-x)$ ны куярга кирәк.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+(-x)+1}{(-x)^4+3}=\frac{x^2-x+1}{x^4+3}.$$

Димәк,

$$f(-x)=\frac{x^2-x+1}{x^4+3}.$$

б) $f(kx)=\frac{(kx)^2+(kx)+1}{(kx)^4+3}=\frac{k^2x^2+kx+1}{k^4x^4+3}$.

в) $f(x+a)=\frac{(x+a)^2+(x+a)+1}{(x+a)^4+3}$.

г) $f(|x|)=\frac{|x|^2+|x|+1}{|x|^4+3}=\frac{x^2+|x|+1}{x^4+3}$.

3 нче мисал. $y=\frac{1}{x+2}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. $\frac{1}{x+2}$ аңлатмасы ваклаучыны нульгә әйләндерүче x ның кыйммәтеннән тыш, ул кыйммәт -2 гә тигез, барлык x лар өчен билгеләнә. Димәк, функциянең билгеләнү өлкәсе булып, $x=-2$ дән тыш барлык саннар тора.

4 нче мисал. $y=\sqrt{x-1}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. $\sqrt{x-1}$ аңлатмасы $x-1\geqslant 0$ булган барлык x лар өчен билгеләнә. Димәк, $[-1;\ \infty)$ нуры — функциянең билгеләнү өлкәсе.

Кайчак функция төрле аралыкларда төрле формулалар белән бирелә, мәсәлән,

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{әгәр } -1\leqslant x\leqslant 0 \text{ булса,}\\ x+2, & \text{әгәр } 0<x\leqslant 1 \text{ булса.}\end{cases}$$

Бу функция $[-1;\ 1]$ кисемтәсендә билгеләнгән. Функциянең кыйммәтләрен исәпләү өчен, аргументның бирелгән конкрет кыйммәте өчен кайсы формуланы кулланырга кирәклеген төгәл билгеләргә генә кирәк. Мәсәлән, әгәр $f(0{,}5)$ не исәпләргә кирәк булса, $f(x)=x+2$ тигезлеген кулланып, $f(0{,}5)=2{,}5$ икәнен табарбыз. Әгәр инде $f(-0{,}5)$ не исәпләргә кирәк булса, $f(x)=2x+3$ тигезлеген кулланып, $f(-0{,}5)=2$ не табарбыз.

71. Функцияне таблица ярдәмендә бирү. Практикада функция бирүнең *таблицалы* ысулы еш кулланыла. Бу ысулда таблицада булган аргумент кыйммәтләр өчен, функция кыйммәтләрен күрсәтүче таблица китерелә. Функцияне таблица ярдәмендә бирүгә мисаллар булып, квадратлар таблицасы, кублар таблицасы, квадрат тамырлар таблицасы тора.

Күпчелек очракларда функцияне таблица ярдәмендә бирү уңай булып чыга. Таблицада булган аргумент кыйммәтләре өчен, функция кыйммәтләрен бернинди исәпләүләрсез табарга мөмкинлек бирә. Еш кына практикада бер зурлыкның икенчесенә бәйлелеген тәҗрибә юлы белән табалар. Бу очракта бер зурлыкка анык кыйммәтләр бирәләр, ә соңыннан шундый кыйммәтләрнең һәркайсы өчен тәҗрибәдән икенче зурлыкның кыйммәтләрен (гадәттә якынча) табалар. Шулай итеп, тәҗрибә функция кыйммәтләренең ниндидер таблицасын төзергә мөмкинлек бирә. Функцияне күрсәтүче формулаларны нинди таблицада сайлап алырга мөмкинлек бирүче методлар бар (билгеле төгәллектә).

72. Санлы яссылык. Координаталар яссылыгы, координаталар күчәрләре. Реаль саннарның барлык парлар[1] күплеге *санлы яссылык* дип атала. Барлык реаль саннар күплеге өчен (яки санлы нур) геометрик модель — координаталар турысы (п. 18, 21) булган кебек, реаль саннар парлары күплеге өчен дә (санлы яссылык) геометрик модель — координаталар яссылыгы бар. xy *координаталар яссылыгы* уртак O башлангычлы һәм бер үк масштаблы үзара перпендикуляр ике координаталар турылары белән билгеләнә (7 нче рәсем). O ноктасы *координаталар башлангычы* дип атала. Горизонталь туры *абсциссалар күчәре* яки *x күчәре*, вертикаль туры — *ординаталар күчәре* яки *y күчәре* дип атала.

Әгәр координаталар яссылыгында $x = a$ абсциссалы барлык нокталарны билгеләсәк, y күчәренә параллель туры төзелер (7 нче рәсем); $x = a$ — бу турының тигезләмәсе диләр. Әгәр координаталар яссылыгында $y = b$ координаталы барлык нокталарны билгеләсәк, x күчәренә параллель туры төзелер (7 нче рәсем). $y = b$ бу турының тигезләмәсе диләр.

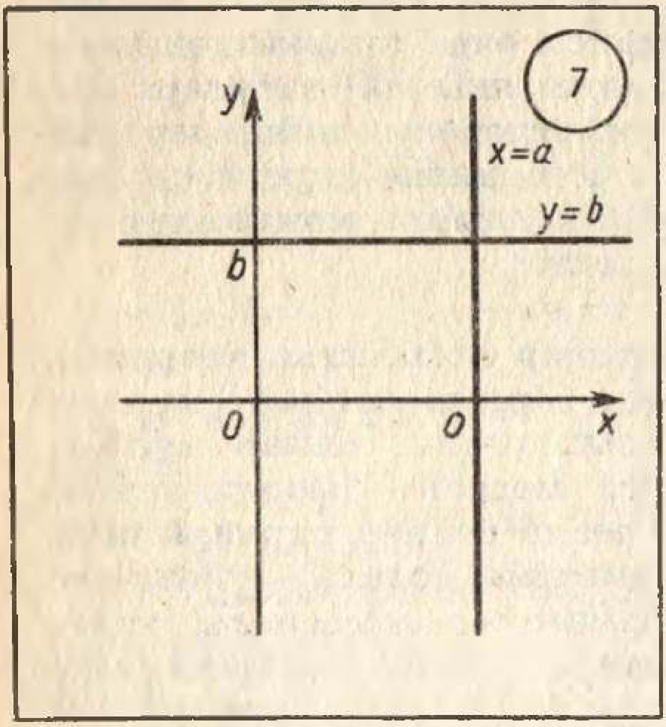
73. Аналитик ысул белән бирелгән функция графигы. Функция $y = f(x)$ формуласы ярдәмендә аналитик ысул белән бирелсен. Әгәр координаталар яссылыгында ноктаның абсциссасы функциянең билгеләнү өлкәсенә кергән, ә ординатасы функциянең тиңдәшле кыйммәтенә тигез дигән үзлеккә ия булган барлык нокталарны билгеләсәк, ул вакытта $(x, f(x))$ нокталары күплеге *функция графигы* булыр.

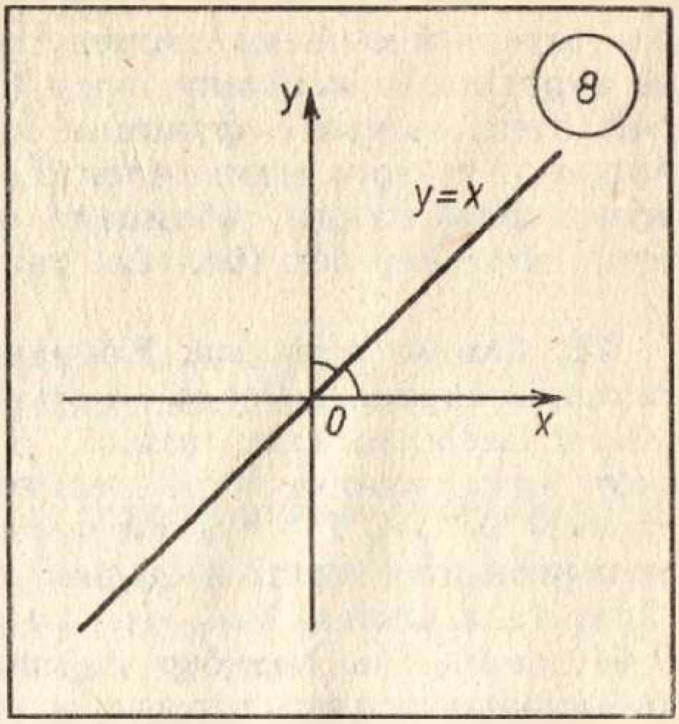
Мәсәлән, $y = x$ функциясенең графигы (x, x) рәвешендәге, ягъни координаталары тигез, нокталар күплеге була. Мондый нокталарның күплеге I һәм III координаталар почмакларының биссектрисасы була (8 нче рәсем).

Практикада функция графигын төзү өчен, аргументның кайбер кыйммәтләренә тиңдәш функция кыйммәтләре таблицасын төзиләр, яссылыкка тиңдәш нокталарны төшерәләр һәм барлыкка килгән нокталарны сызык ярдәмендә тоташтыралар. Шуның өстенә, функция графигы шома сызык дип,

---

[1] Саннар пары дип билгеләнгән тәртиптә урнашкан ике санны аңлыйлар.





ә табылган нокталар функциянең үзгәреше барышын шактый төгәл күрсәтәләр дип уйланыла.

Мисал. $y=x^2$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Функциянең кайбер кыйммәтләре таблицасын төзик.

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	$2{,}5$
y	6,25	4	1	0,25	0	0,25	1	4	6,25

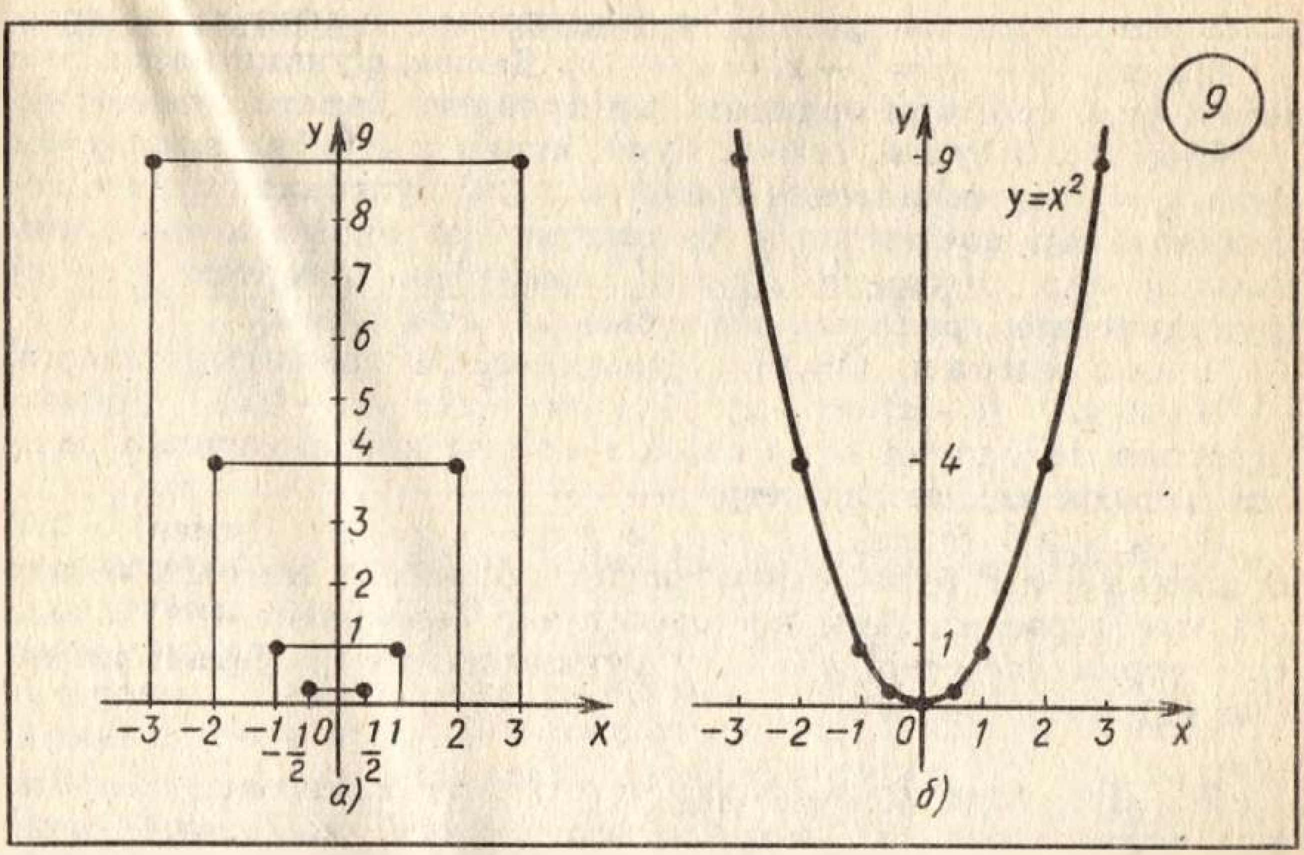
Координаталар яссылыгына табылган (0; 0); (0,5; 0,25); (−0,5; 0,25); (1; 1); (−1; 1); (2; 4); (−2; 4); (3; 9); (−3; 0) нокталарын төшерик (9 нчы рәсем). Бу нокталарны шома сызык белән тоташтырып, $y=x^2$ функциясенең графигын (төгәлрәк, график эскизын) төзербез. Бу сызык *парабола* дип атала. $y=ax^2$, монда $a\neq 0$ функциясенең графигы гомумән *парабола* дип атала (п. 111 не кара).

74. Җөп һәм так функцияләр. Әгәр билгеләнү өлкәсенә кергән теләсә нинди x өчен $f(-x)=f(x)$ тигезлеге саклanса, $y=f(x)$ функциясе *җөп* дип атала.

Әгәр билгеләнү өлкәсенә кергән теләсә нинди x өчен $f(-x)=-f(x)$ тигезлеге сакланса, $y=f(x)$ функциясе *так* дип атала.

Мәсәлән, $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$ — җөп функцияләр, ә $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^7$ — так функцияләр.

Әгәр $y=f(x)$ функциясе x һәм $-x$ кыйммәтләренең бер генә пары өчен $f(-x)\neq f(x)$, һәм x һәм $-x$ кыйммәтләренең



⑨

бер генә пары өчен $f(-x) \neq f(x)$ булып чыкса, бу функция җөп функция дә, так функция дә булмый.

Билгеләмәдән күренгәнчә, җөп функциянең дә, так функциянең дә билгеләнү өлкәсе x түбәндәге үзлеккә ия булырга тиеш: әгәр $x \in X$ булса, $-x \in X$ була (ягъни X күплеге O ноктасына карата симметрик).

Мисал. Функцияләрне җөплеккә тикшерергә.

а) $y=x^{20}$; б) $y=x^{13}$; в) $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Чишү. $f(x)=x^{20}$, $f(-x)=(-x)^{20}=x^{20}$. Димәк, барлык x лар өчен $f(-x)=f(x)$. Функция җөп.

б) $f(x)=x^{13}$, $f(-x)=(-x)^{13}=-x^{13}$. Димәк, $f(-x)=-f(x)$. Функция так.

в) $f(x)=\frac{x-4}{x^2-9}$, $f(-x)=\frac{-x-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}$.

$f(-x)\neq f(x)$ һәм $f(-x)\neq -f(x)$ булганлыктан, функция җөп тә, так та түгел.

75. Җөп функция графигы. Так функция графигы. Җөп һәм так функция графикларының түбәндәге үзенчәлекләре бар:

Әгәр функция җөп булса, аның графигы ординаталар күчәренә карата симметрик.

Әгәр функция так булса, аның графигы координаталар башлангычына карата симметрик.

1 нче мисал. $y=|x|$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $f(-x)=|-x|=x=f(x)$. Димәк, функция җөп, һәм шуңа күрә графигы ординаталар күчәренә карата симметрик.

Әгәр $x\geqslant 0$ булса, $|x|=x$ була, ягъни $x\geqslant 0$ булганда $y=x$ була. $y=x$ функциясенең графигы $x\geqslant 0$ булганда беренче координаталар почмагының биссектрисасы булып хезмәт итә. Аны y лар күчәренә карата симметрик үзгәртеп, $y=|x|$ функциясенең графигын табарбыз (10 нчы рәсем).

2 нче мисал. $y=x|x|$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $f(-x)=(-x)\cdot|-x|=-x|x|=-f(x)$. Димәк, функция так, шуңа күрә аның графигы координаталар башлангычына карата симметрик.

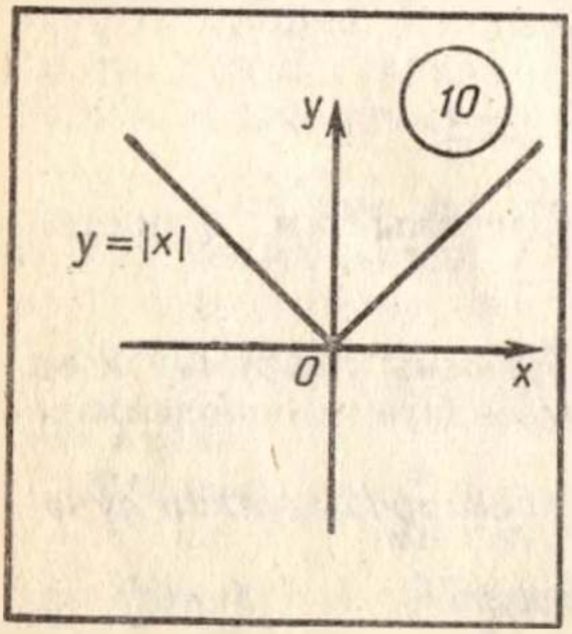
Әгәр $x\geqslant 0$ булса, $|x|=x$, ә $f(x)=x\cdot x=x^2$. Димәк, $x\geqslant 0$ булганда $y=x^2$ була. Аның графигы парабола тармагы булыр (11 нче *а* рәсем). Аны координаталар башлангычына карата симметрик үзгәртеп, $y=x|x|$ функциясенең графигын табарбыз (11 нче *б* рәсем).

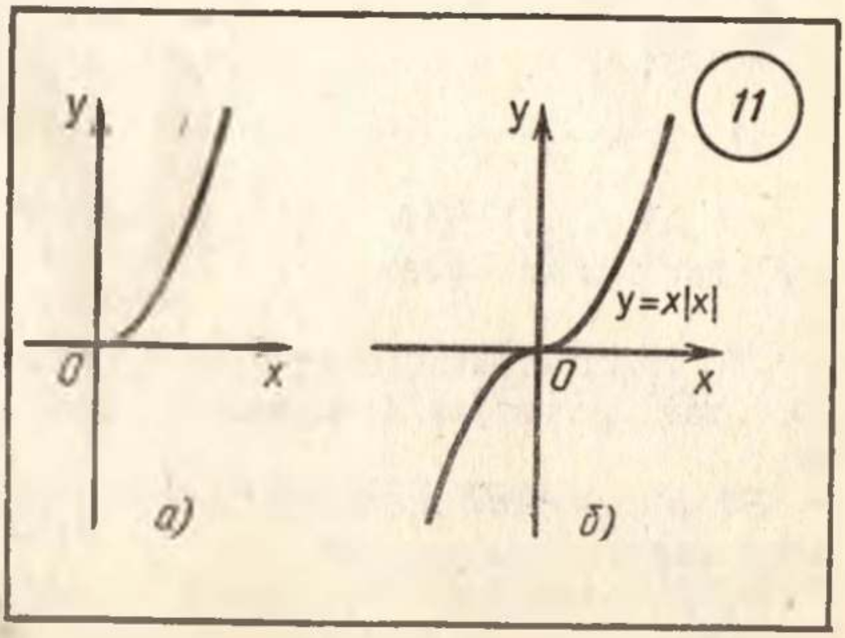
76. Периодик функцияләр. $y=f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсендәге x ның теләсә нинди кыйммәте өчен $f(x+T)=f(x)=f(k-T)$ тигезлеге сакланырлык нульдән үзг T саны булса, бу функция *периодик* дип атала.

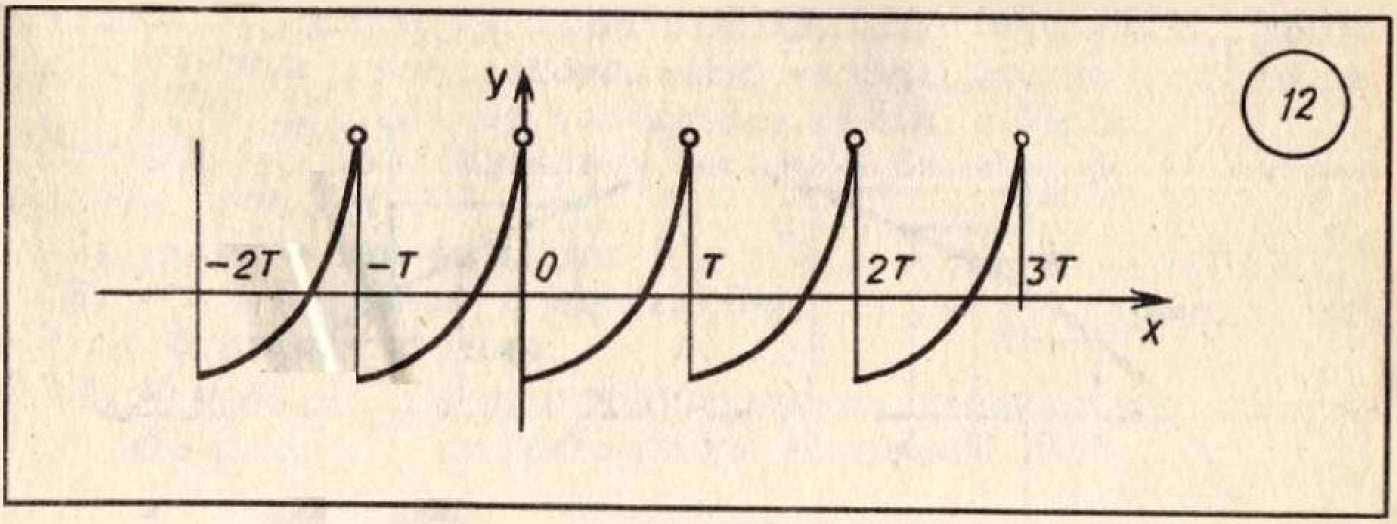
T саны $y=f(x)$ функциясенең периоды дип атала.

Әгәр T — функция периоды икән, ул чакта $2T$, $3T$, $4T$, $-T$, $-2T$, $-3T$, $-4T$ — функциянең периодлары. Димәк, периодик функциянең периодлары чиксез күп. Әгәр, мәсәлән, T — функция периоды булса, ул вакытта kT рәвешендәге сан да шулай ук функция периоды була, монда k — теләсә нинди бөтен сан.

Еш кына (ләкин һәрчак түгел) функциянең уңай периодлары күплеге арасыннан иң кечкенәсен табарга мөмкин. Аны







12

төп период дип атыйлар. Периодик функцияләр графикларының түбәндәге үзенчәлеге бар. Әгәр T $y=f(x)$ функциясенең төп периоды булса, аның графигын төзү өчен x лар күчәренең T озынлыгындагы ераклыкларның берсендә график тармагын төзү җитә, ә аннан соң x лар күчәре буенча $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... га параллель күчерергә кирәк (12 нче рәсем). Еш кына T озынлыгындагы андый аралык сыйфатында очлары $\left(-\frac{T}{2};\ 0\right)$ һәм $\left(\frac{T}{2};\ 0\right)$ яки $(T;\ 0)$ һәм $(T;\ 0)$ ноктапарында булган аралыкны саныйлар.

Периодик функцияләрнең мисаллары:

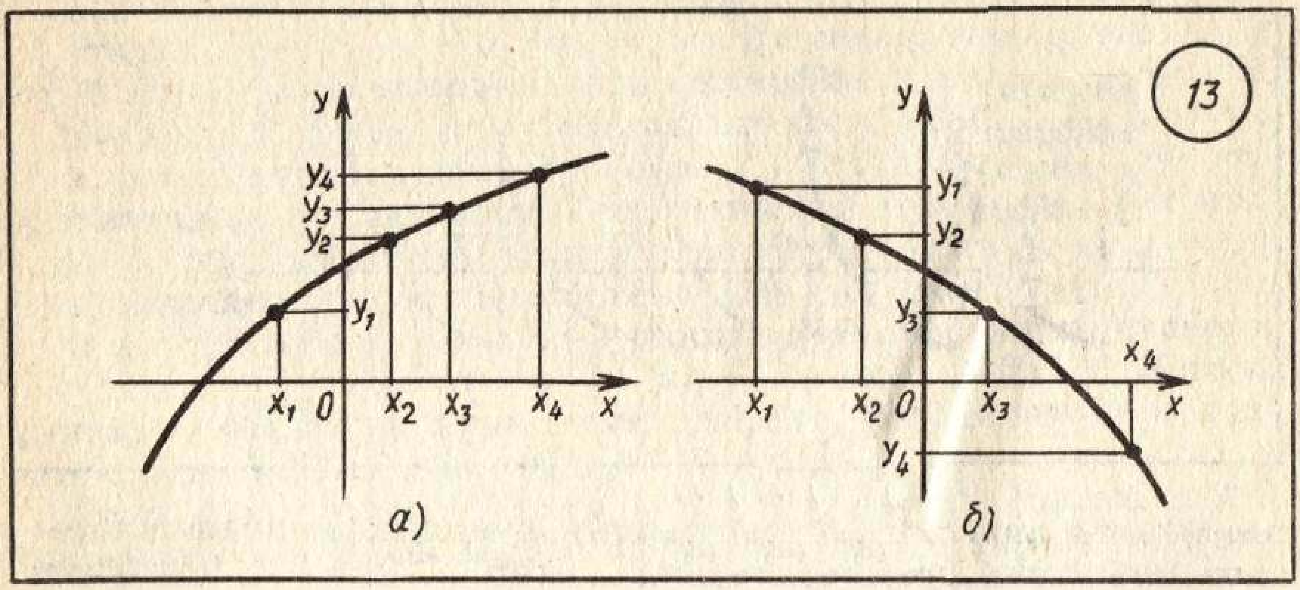
$y=\{x\}$ — төп периоды $T=1$ (п. 93 не кара),
$y=\sin x$ — төп периоды $T=2\pi$ (п. 102 не карар),
$y=\cos x$ — төп периоды $T=2\pi$ (п. 103 не кара),
$y=\operatorname{tg} x$ — төп периоды $T=\pi$ (п. 104 не кара),
$y=\operatorname{ctg} x$ — төп периоды $T=\pi$ (п. 105 не кара).

77. Монотон функцияләр. X аралыгына кергән теләсә нинди x_1 һәм x_2 өчен $x_1<x_2$ шартыннан $f(x_1)<f(x_2)$ тигезсезлеге саклanca, $y=f(x)$ функциясе *X аралыгында үсүче* дип атала (кыскача: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$). X аралыгына кергән теләсә нинди x_1, x_2 өчен $x_1<x_2$ шартыннан $f(x_1)>f(x_2)$ тигезсезлеге сакланса, $y=f(x)$ функциясе *X аралыгында кимүче* дип атала (кыскача: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$). Икенче төрле әйткәндә, X аралыгындагы аргументның теләсә нинди ике кыйммәтенең зуррагына функция кыйммәтенең зуррагы (кечерәге) тиңдәш булса, функция үсә (кими).

Абсцисса күчәре буенча сулдан уңга хәрәкәтләнгәндә үсүче функциянең ординатасы арта (13, *а*), ә кимүче функциянең ординатасы кими (13, *б*).

Үсүче һәм кимүче функцияләр «монотон функцияләр» термины белән берләштереләләр.

Мисал. $y=2x^3+3$ функциясен монотонлыкка тикшерергә.


13
y
y₄
y₃
y₂
y₁
x₁
0
x₂
x₃
x₄
x
a)
y
y₁
y₂
y₃
x₄
y₄
x₁
x₂
0
x₃
x
б)

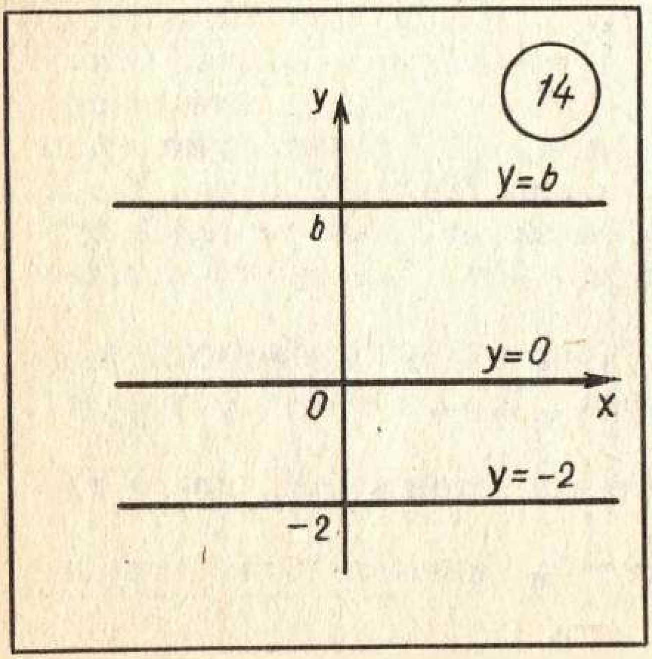
Ч и ш ү. $x_1 < x_2$ булсын. Санлы тигезсезлекләрнең үзлекләреннән чыгып (п. 24 не кара) яза алабыз: $x_1^3 < x_2^3$, $2x_1^3 < 2x_2^3$, $2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3$, ягъни $f(x_1) < f(x_2)$.

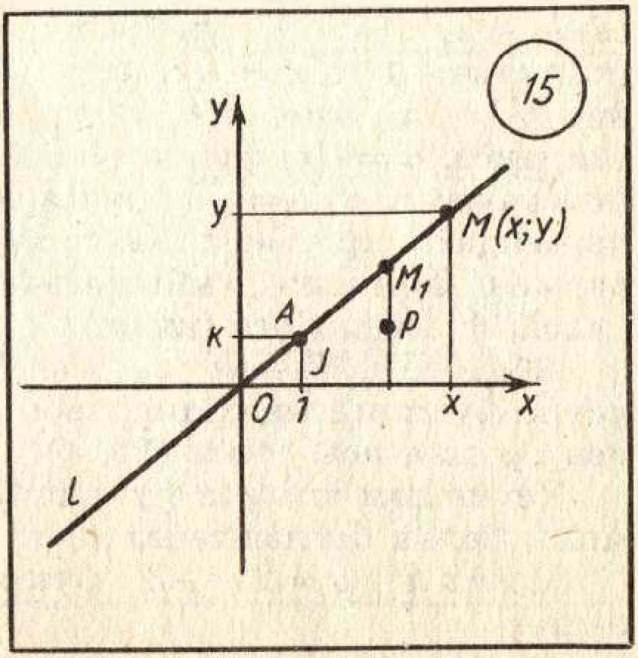
Димәк, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ булуы $y = 2x^3 + 3$ функциясенең барлык санлы турыда үсүен аңлата.

10. Функцияләрнең төрләре

78. Даими функция. $y = b$ формуласы белән бирелгән функция *даими* дип атала. Монда b — ниндидер сан.

$y = b$ даими функциясенең графигы абсциссалар күчәренә параллель һәм ордината күчәреннән (0; b) ноктасы аша үтүче туры була. 14 нче рәсемдә берничә даими функциянең графиклары сурәтләнгән. Аерым алганда, $y = 0$ функциясенең графигы булып, абсцисса күчәре тора.


14
y
y=b
b
y=0
0
x
y=-2
-2


15
y
y
M(x;y)
M₁
A
K
P
J
0
1
x
x
l

79. Туры пропорциональлек. $y=kx$ формуласы белән бирелгән функция *туры пропорциональлек* дип атала, монда $k\neq 0$. k саны *пропорциональлек коэффициенты* дип атала.

$y=kx$ функциясенең үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.

2) $y=kx$ — так функция $(f(-x)=k(-x)=kx=-f(x))$.

3) $k>0$ булганда функция барлык санлы турында үсә, ә $k<0$ булганда — кими.

Т.3.1. $y=kx$ туры пропорциональлек графигы координаталар башлангычы аша үтүче туры була.

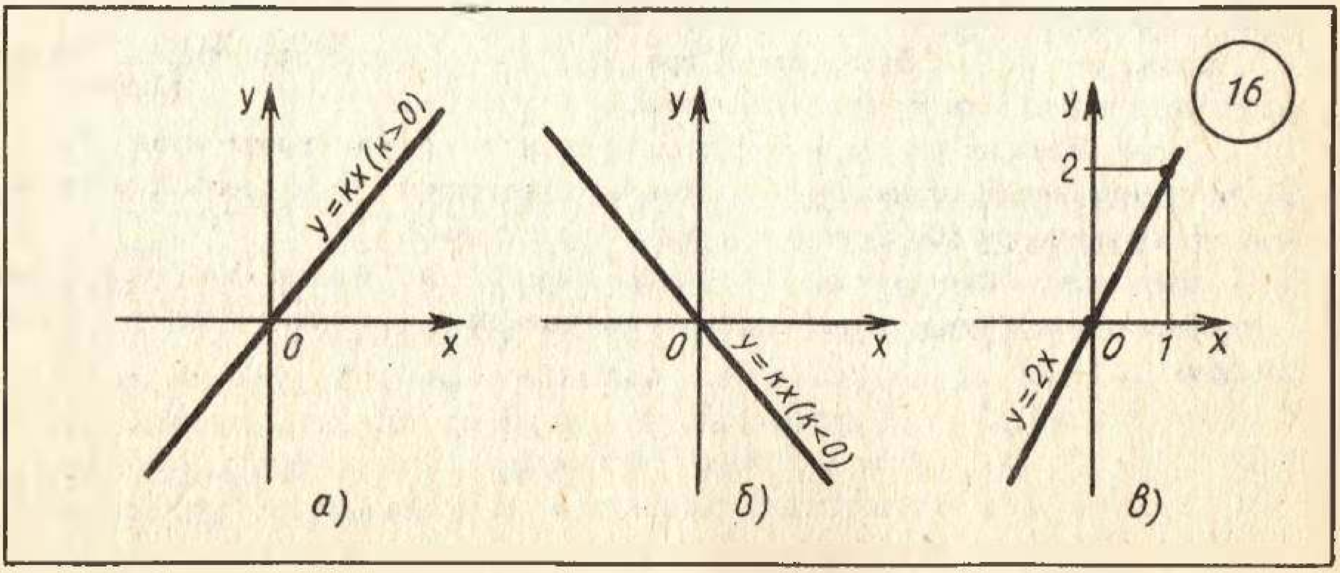
ИСБАТЛАУ

Координаталар башлангычы һәм $A(1, k)$ ноктасы аша туры үткәрик һәм аның $y=kx$ функциясе графигы икәнен исбатлыйк.

Элек $k>0$ очрагын карыйк (15 нче рәсем). l турысы өстендә теләсә нинди $M(x;\ y)$ ноктасын алыйк. OAJ һәм OMx өчпочмаклары охшашлыгыннан $\frac{Mx}{AJ}=\frac{Ox}{OJ}$, ягъни $\frac{y}{k}=\frac{x}{1}$, моннан $y=kx$ була. Хәзер l турысында ятмаучы $P(x;\ y)$ ноктасын алыйк. Ул вакытта l турысында ятучы шул ук абсциссалы M ноктасы координаталары $y=kx$ тигезләмәсен канәгатьләндерәләр, димәк, P ноктасының координаталары бу тигезләмәне канәгатьләндермиләр. Димәк, l турысының нокталары, бары тик $y=kx$ формуласын канәгатьләндерәләр, димәк, l турысы — $y=kx$ функциясенең графигы.

Хәзер $k<0$ булган очракны карыйк. Ике $y=kx$ һәм $y=-kx$ функцияләрен алыйк. x абсциссасының бер үк кыйммәте өчен бу функцияләрнең ординаталары модульләре буенча тигез, тамгалары буенча капма-каршы. Димәк, бу функцияләрнең графиклары абсцисса күчәренә карата симметрик. Ләкин $-k>0$, һәм алда исбат ителгән буенча $y=-kx$ функциясе графигы туры сызык була. Симметрик үзгәртүләрдә туры турыга күчкәнгә, $y=kx$ функциясенең графигы да туры була.

16 нчы *а* рәсемдә $k>0$ булганда $y=kx$ функциясенең, ә 16 нчы *б* рәсемдә $k<0$ булганда $y=kx$ функциясенең графигы сурәтләнгән.



Мисал. $y=2x$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. Функциянең графигы координаталар башлангычы аша үтүче туры икәнен беләбез. Аны төзү өчен, координаталар башлангычыннан тыш, тагын бер ноктасын табу һәм координаталар башлангычы һәм табылган нокта аша туры үткәрү җитә. Шундый нокта сыйфатында (1; 2) ноктасын сайлап алыйк ($x=1$ булганда $y=2\cdot1=2$). $y=2x$ функциясенең графигы 16 нчы *в* рәсемдә сурәтләнгән.

80. Сызыкча функция. $y=kx+b$ формуласы белән бирелгән функция сызыкча функция дип атала, монда k, b — реаль саннар. Аерым алганда, әгәр $k=0$ булса, $y=b$ даими функциясен, әгәр $b=0$ булса, $y=kx$ туры пропорциональлеген табабыз.

$k\neq0$, $b\neq0$ булганда, сызыкча функция үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.

2) $y=kx+b$ функциясе җөп тә, так та түгел.

3) $k>0$ булганда функция үсә, ә $k<0$ булганда функция кими.

Т.3.2. | $y=kx+b$ функциясенең графигы — туры сызык.

ИСБАТЛАУ.

Әгәр $k=0$ булса, $y=b$ даими функциясен табабыз, аның графигы — x лар күчәренә параллель туры (п. 78 не кара).

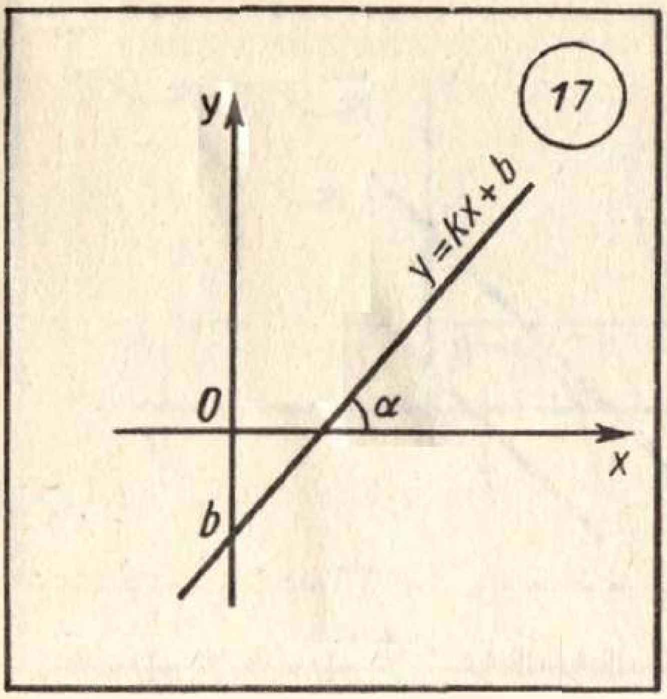
Әгәр $b=0$ булса, $y=kx$, туры пропорциональлек табабыз. аның графигы координаталар башлангычы аша үтүче туры (п. 79 ны кара).

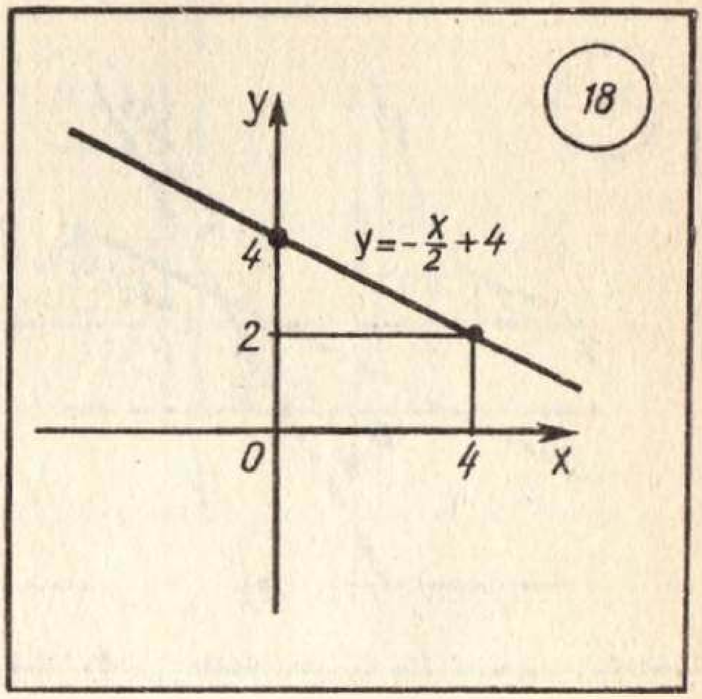
$k\neq0$, $b\neq0$ булсын. Әгәр $(x_1 y_1)$ ноктасы $y=kx$ функциясе графигы өстендә ятса (ягъни $y_1=kx_1$ тигезлеге үтәлсә), ул чакта $(x_1;\ y_1+b)$ ноктасы $y=kx+b$ функциясе графигы өстендә ята (ягъни $y_1+b=kx_1+b$ тигезлеге үтәлә). Ләкин F фигурасының ирекле $(x_1\ y_1)$ ноктасын $(x_1,\ y_1+b)$ ноктасына үзгәртүче параллель күчерү була (112 пунктны кара), ә параллель күчерүдә туры үзенә параллель булган турыга үзгәртелә.

Димәк, $y=kx+b$ функциянең графигы $y=kx$ туры пропорциональлек графигына параллель туры сызык була.

17 нче рәсемдә $y=kx+b$ функциясенең графигы сурәтләнгән. Ул — $y=kx$ функциясе графигы булып хезмәт итүче турыга параллель һәм ординаталар күчәреннән $(0;\ b)$ ноктасы аша үтүче туры.

k саны турының *почмакча коэффициенты* дип атала, ул туры һәм x күчәренең уңай нуры арасындагы α почмагының тангенсына тигез, ягъни $k=\operatorname{tg}\alpha$.


17


18

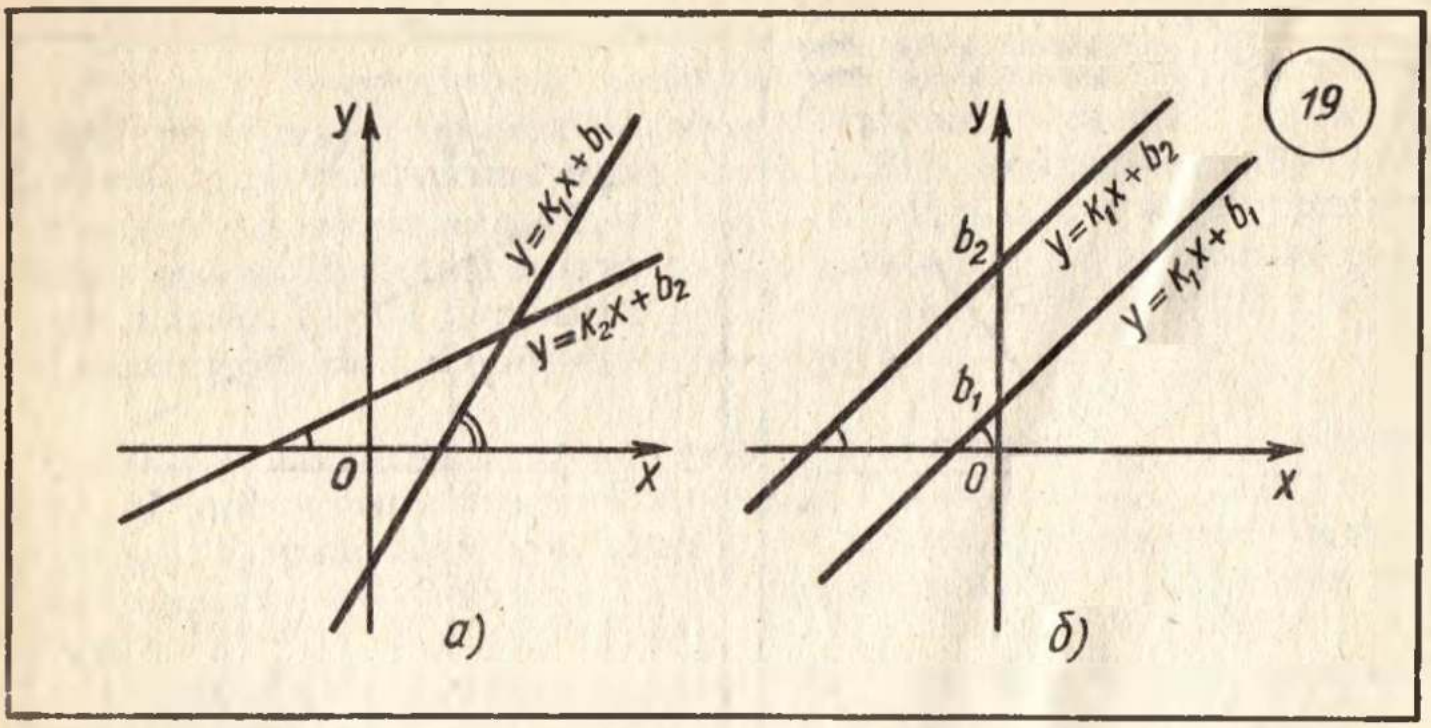
Мисал. $y=-\frac{x}{2}+4$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Сызыкча функциянең графигы — туры, ә турыны төзү өчен графикның ике ноктасын белү җитә. Таблицаны тутырыйк:

x	0	4
y	4	2

(x аргументына 0 һәм 4 кыйммәтләрен бирдек һәм $y=-\frac{x}{2}+4$ формуласы буенча y ның тиңдәшле кыйммәтләрен таптык). Координата яссылыгында (0; 4) һәм (4; 2) нокталарын билгелик һәм бу нокталар аша туры үткәрик (18 нче рәсем).

81. Сызыкча функцияләр графикларының үзара торышлары. $y=k_1x+b_1$ һәм $y=k_2x+b_2$ ике сызыкча функция бирелсен. Аларның графиклары — турылар (п. 80 нче кара), әгәр $k_1 \neq k_2$ булса, бу турылар *кисешәләр* (19 нчы *а* рәсем). Әгәр $k_1=k_2$ булса, турылар *параллельләр.* Соңгы очракны, үз чиратында, икегә бүлеп була: әгәр $k_1=k_2$ һәм $b_1=b_2$ булса, турылар *тәңгәл киләләр,* әгәр $k_1=k_2$ һәм $b_1 \neq b_2$ булса, турылар *параллель* һәм *тәңгәл килмиләр* (19 нчы *б* рәсем).



82. Кире пропорциональлек. $y=\frac{k}{x}$ формуласы белән бирелгән функция *кире пропорциональлек* дип атала, биредә $k\neq 0$. k саны *кире пропорциональлекнең коэффициенты* дип атала.

$y=\frac{k}{x}$ функциясенең үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Билгеләнү өлкәсе — нульдән тыш барлык реаль саннар күплеге.

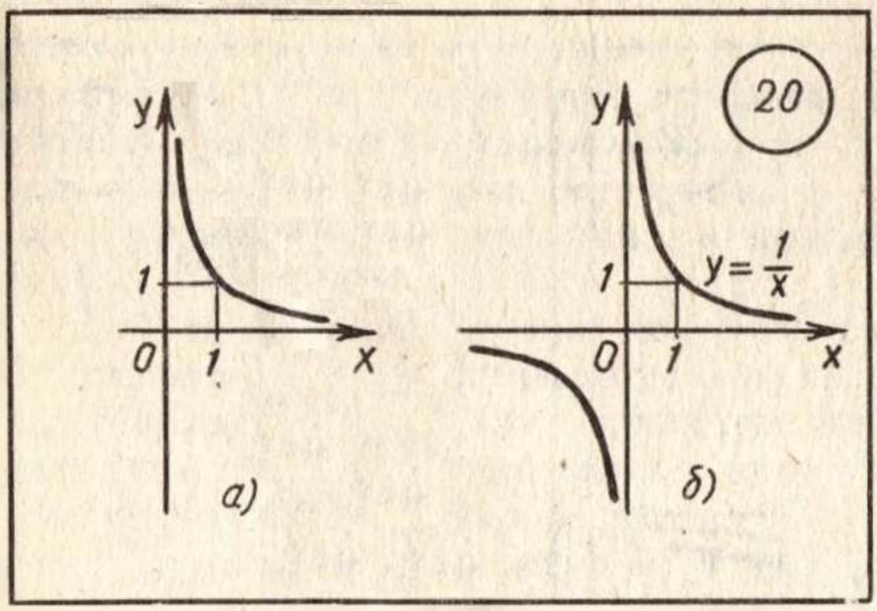
2) $y=\frac{k}{x}$ — так функция — чөнки $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=$ $=-f(x)$.

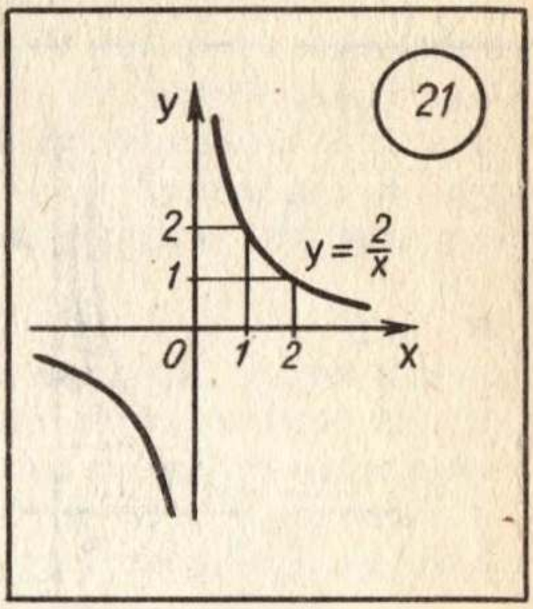
3) Әгәр $k>0$ булса, $y=\frac{k}{x}$ функциясе $(0;\ \infty)$ һәм $(-\infty;\ 0)$ аралыкларында кими. Әгәр $k<0$ булса, $y=\frac{k}{x}$ функциясе $(-\infty;\ 0)$ һәм $(0;\ \infty)$ аралыкларында үсә.

$y=\frac{1}{x}$ функциясенең графигын төзик. Элек $(0;\ \infty)$ аралыгында графикның тармагын төзик. Функция кыйммәтләренең таблицасы түбәндәгечә:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Табылган нокталарны координата яссылыгына төшерик һәм аларны тоташ кәкре сызык белән тоташтырыйк (20 нче *а*





рәсем). Бу $y=\frac{1}{x}$ функциясе графигының $(0;\ +\infty)$ аралыгындагы тармагы була.

$y=\frac{1}{x}$ функциясенең так булуыннан файдаланып, төзелгән тармакка координата башлангычына карата симметрик тармак төзик. $y=\frac{1}{x}$ функциясенең графигын табабыз (20 нче *б* рәсем).

Теләсә нинди уңай k өчен $y=\frac{k}{x}$ функциясенең графигы шундый ук рәвешне ала. 21 нче рәсемдә $y=\frac{2}{x}$ функциясе графигы күрсәтелгән.

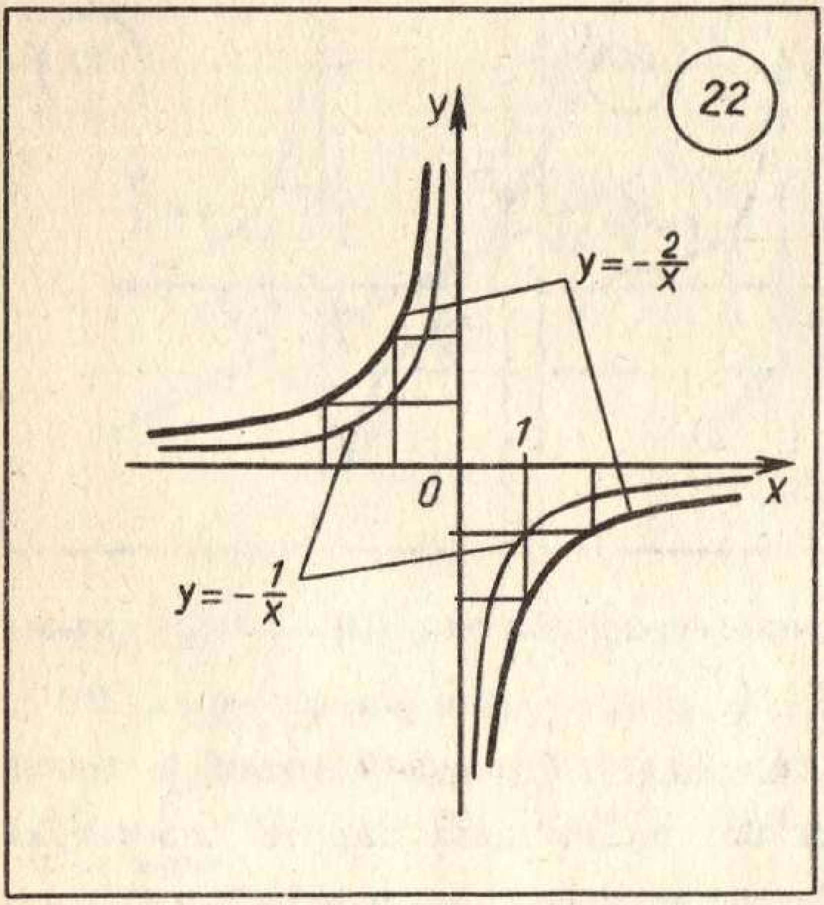
Әгәр $k<0$ булса, кире пропорциональлек графигының тармаклары $k>0$ булган очрактагы кебек I һәм III координата чирекләрендә түгел, ә II һәм IV чирекләрендә урнаша. 22 нче рәсемдә $y=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

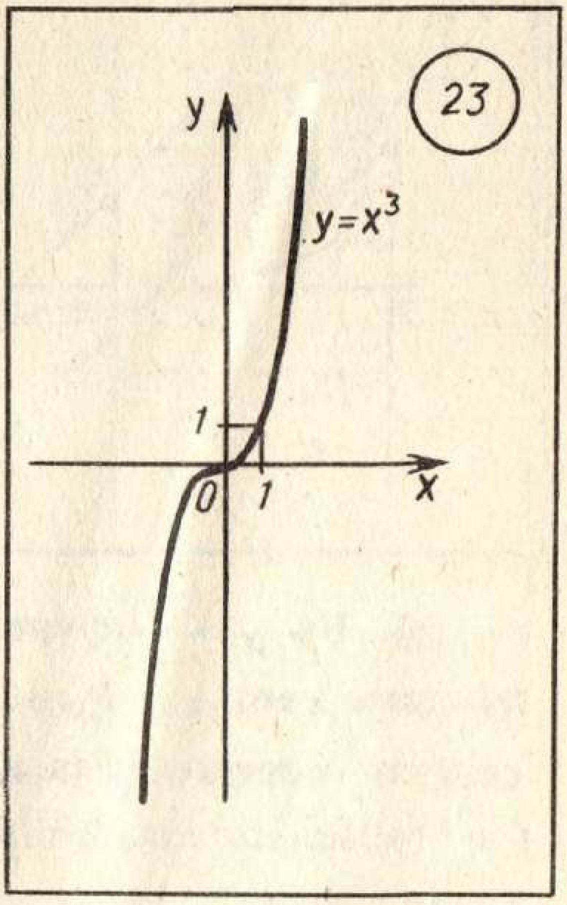
$y=\frac{k}{x}$ кире пропорциональлек графигын *гипербола* дип атыйлар.

83. $y=x^2$ функциясе. $y=x^2$ функциясе үзлекләрен санап үтик:

1) Функциянең билгеләү өлкәсе — барлык санлы туры.
2) $y=x^2$ — җөп функция $(f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3) $[0;\ +\infty)$ аралыгында функция үсә.

Чыннан да, әгәр $0<x_1<x_2$ булса, $x_1^2<x_2^2$, бу инде функциянең үсүен аңлата.





4) $(-\infty;\ 0]$ аралыгында функция кими.

Чыннан да, әгәр $x_1 < x_2 \leqslant 0$ булса, $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$ һәм шунлыктан, $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, ягъни $x_1^2 > x_2^2$, бу инде функциянең кимүен аңлата.

$y = x^2$ функциясенең графигы *парабола* була (73 нче пунктны кара). Бу график 9 нчы рәсемдә күрсәтелгән.

84. $y = x^3$ функциясе. $y = x^3$ функциясе үзлекләрен санап үтик:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык санлы туры.
2) $y = x^3$ — так функция $(f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x))$
3) $y = x^3$ функциясе барлык санлы турыда үсә.

$y = x^3$ функциясенең графигы 23 нче рәсемдә сурәтләнгән. Ул *кубик парабола* дип атала.

85. Натураль күрсәткечле дәрәҗәле функция. $y = x^n$ функциясе (монда n — натураль сан) *натураль күрсәткечле дәрәҗәле функция* дип атала. $n = 1$ булганда $y = x$ функциясе барлыкка килә, аның үзлекләре 79 нчы пунктта каралды, ә графигы (туры) 8 нче рәсемдә сурәтләнгән. $n = 2$ булганда $y = x^2$ функциясен табабыз, аның үзлекләре 83 нче пунктта каралды, ә графигы (парабола) 9 нчы рәсемдә сурәтләнгән. $n = 3$ булганда $y = x^3$ функциясен табабыз, аның үзлекләре 84 нче пунктта каралды, ә графигы (кубик парабола) 23 нче рәсемдә сурәтләнгән.

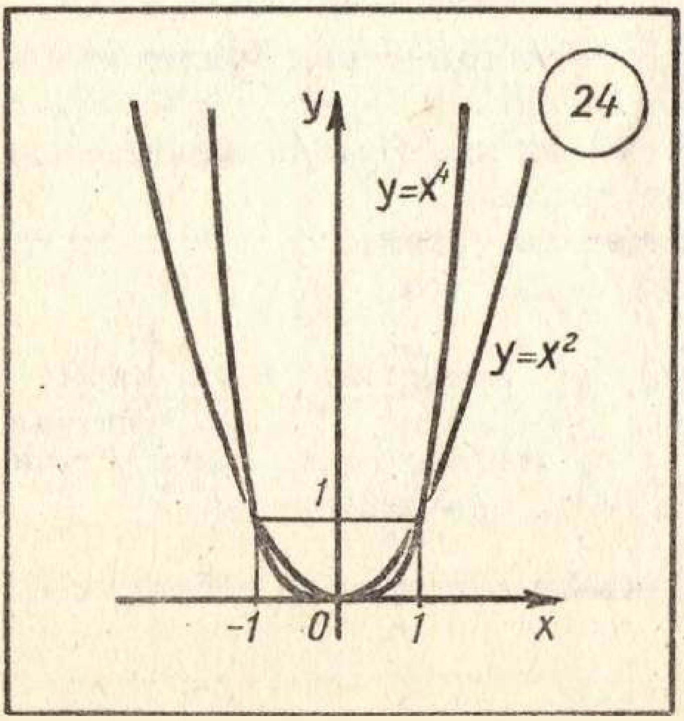
n 2 дән зур ирекле натураль җөп сан: $n=2, 4, 6, 8, \ldots$ булсын. Бу очракта функция $y=x^2$ функциясе үзлекләренә ия була. Мондый функция графигы $y=x^2$ параболасын хәтерләтә, тик график тармаклары $|x|>1$ булганда, n зур булган саен, өскә текәрәк күтәрелә, ә $|x|<1$ булганда, n зур сан булган саен, x күчәренә «тыгызрак сыена» (24 нче рәсем).

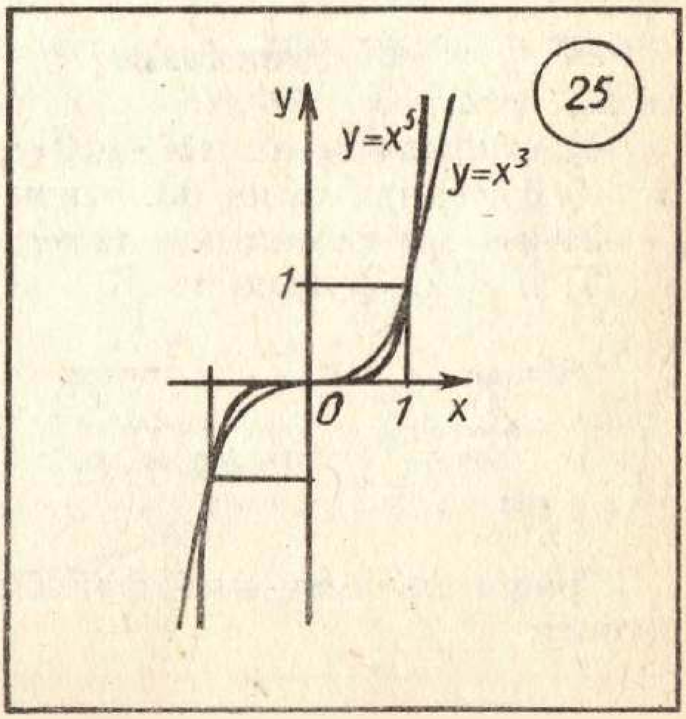
n 3 тән зуррак ирекле так сан: $n=5, 7, 9, \ldots$ булсын. Бу очракта $y=x^n$ функциясе $y=x^3$ функциясе үзлекләренә ия. Мондый функциянең графигы кубик параболаны хәтерләтә (тик график тармаклары n зур булган саен өскә һәм аска текәрәк юнәләләр) (25 нче рәсем). Шулай ук $(0; 1)$ аралыгында $y=x$ функциясенең графигы, n зур булган саен, x ның үсүе белән x лар күчәреннән шулкадәр әкренрәк ераклаша.

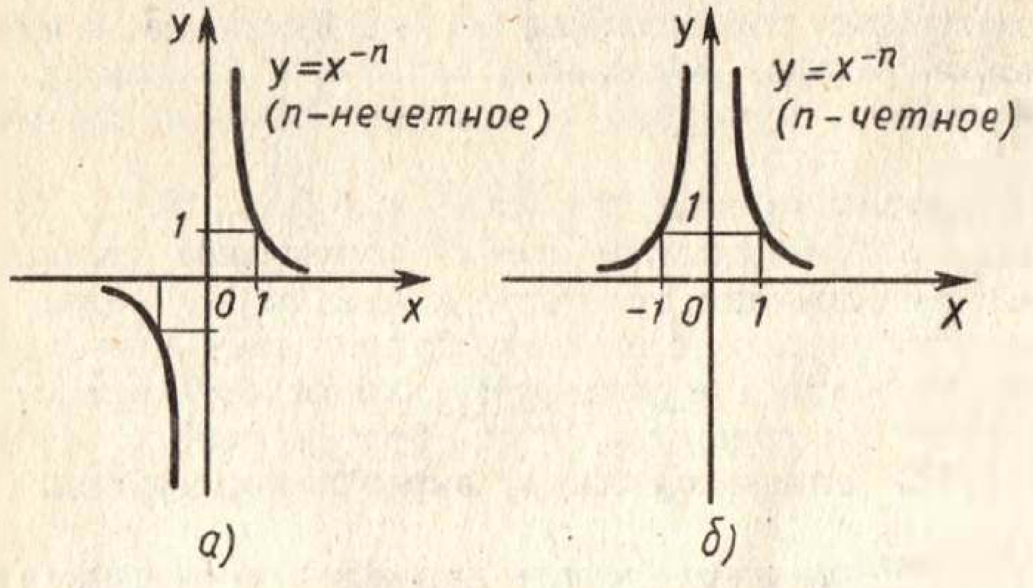
86. Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәле функция. $y=x^{-n}$ функциясен карыйк, монда n — натураль сан. $n=1$ булганда $y=x^{-1}$ яки $y=\frac{1}{x}$ була. Бу функциянең үзлекләре 82 нче пунктта каралды, ә аның графигы (гипербола) 20 нче *б* рәсемдә күрсәтелгән.

n — берәмлектән зур так сан: 3, 5, 7, ... булсын. Бу очракта функция $y=\frac{1}{x}$ функция үзлекләренә ия. $y=x^{-n}$ $(n=3, 5, 7, \ldots)$ функциясе графигы $y=\frac{1}{x}$ функциясенең графигын хәтерләтә (26 нчы *а* рәсем).

n — җөп сан, мәсәлән, $n=2$ булсын. $y=x^{-2}$, ягъни $y=\frac{1}{x^2}$ функциясенең кайбер үзлекләрен санап үтик:







26

1) $x \neq 0$ дән тыш барлык x лар өчен билгеләнә.

2) $y=\frac{1}{x^2}$ — җөп функция.

3) $y=\frac{1}{x^2}$ функциясе $(0;\ +\infty)$ аралыгында кими, ә $(-\infty;\ 0)$ аралыгында үсә.

n ның кыйммәте 2 дән зур җөп сан булганда, $y=x^{-n}$ рәвешендәге теләсә нинди функция шушы үзлекләргә ия.

$y=\frac{1}{x^2}$ функциясе графигы 26 нчы *б* рәсемдә күрсәтелгән, $n=4,\ 6,\ \ldots$ булганда $y=x^{-n}$ функциясе графигы да шуңа охшаш була.

87. $y=\sqrt{x}$ функциясе. $y=\sqrt{x}$ функциясенең үзлекләрен санап үтик.

1) билгеләнү өлкәсе — $[0;\ +\infty)$ нуры. Бу $\sqrt{x}$ аңлатмасы $x \geqslant 0$ булганда гына билгеләнүен аңлата.

2) $y=\sqrt{x}$ функциясе так та, җөп тә түгел.

3) $y=\sqrt{x}$ функциясе $[0;\ \infty)$ нурында үсә.

Чыннан да, $0 \leqslant x_1 < x_2$ булсын. $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ икәнен исбатлыйк. Киресен, ягъни $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$ дип уйлыйк. Ул чакта $(\sqrt{x_1})^2 \geqslant (\sqrt{x_2})^2$ (24 нче пунктның 9 нчы үзлеген кара), ягъни $x_1 \geqslant x_2$, ә бу шартка каршы килә. Ягъни безнең уйлавыбыз дөрес түгел, $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ тигезсезлеге дөрес була.

Графикны төзү өчен функция кыйммәтләренең таблицасын төзик:

x	0	1	2	4	9
y	0	1	1,4	2	3

Табылган нокталарны координаталар яссылыгына төшерик һәм аларны тоташ кәкре сызык белән тоташтырыйк. $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигын табарбыз (27 нче *а* рәсем).

88. $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе. $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе үзлекләрен санап үтик:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык санлы туры.

2) $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе так, чөнки $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$.

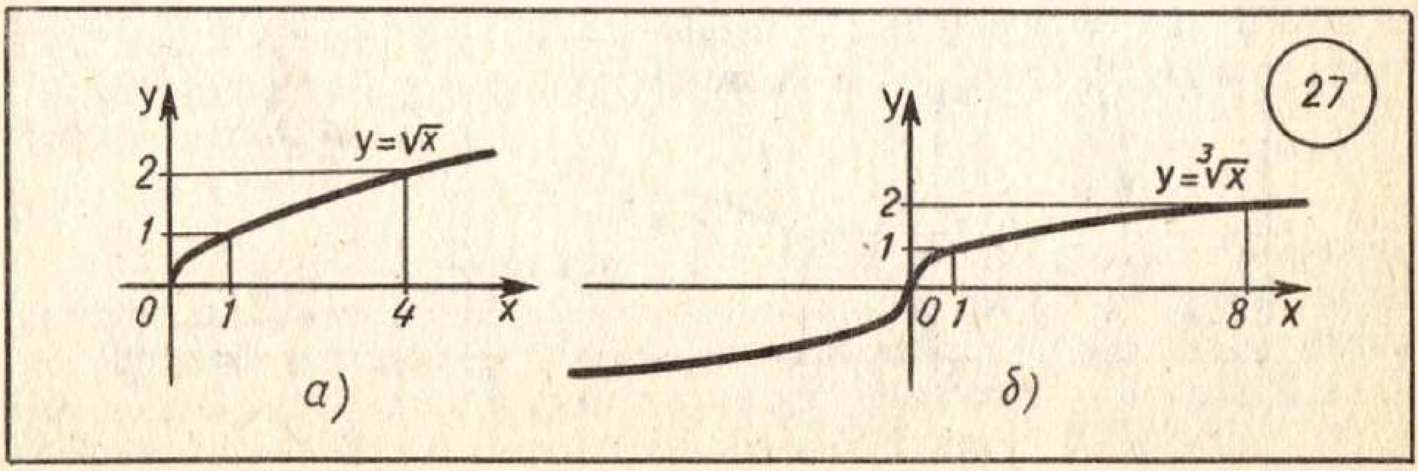
3) $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе барлык санлы турыда үсә.

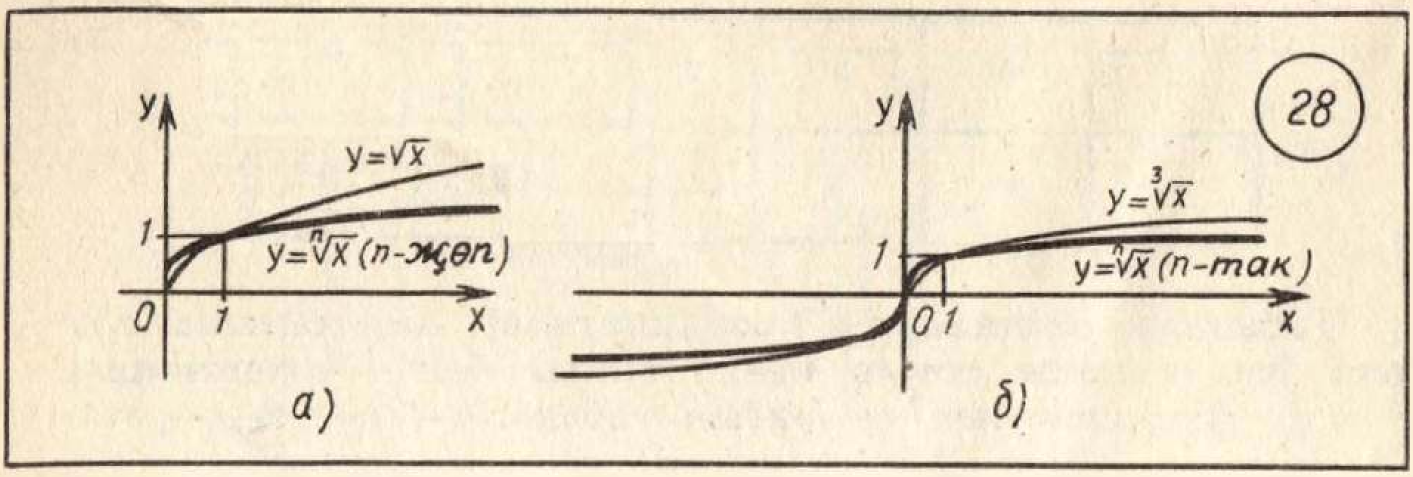
$x\geqslant 0$ булганда график тармагын төзү өчен, $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе кыйммәтләре таблицасын төзик:

x	0	1	4	8
y	0	1	1,6	2

Табылган нокталарны координата яссылыгына төшерик, аларны тоташ кәкре сызык белән тоташтырыйк; аннан соң төзелгән тармакка координата башлангычына карата симметрик тармакны өстәрбез. $y=\sqrt[3]{x}$ функциясенең графигын таптык (27 нче *б* рәсем).

89. $y=\sqrt[n]{x}$ функциясе. *n* җөп булганда $y=\sqrt[n]{x}$ функциясе $y=\sqrt{x}$ функциясе үзлекләренә ия (п. 87 нче кара), ә аның графигы $y=\sqrt{x}$ функциясе графигын хәтерләтә (28 нче *а* рәсем). *n* так булганда, $y=\sqrt[n]{x}$ функциясе $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе





үзлекләренә ия (п. 88 нче кара), һәм аның графигы $y=\sqrt[3]{x}$ функциясе графигын хәтерләтә (28 нче *б* рәсем).

90. Уңай вакланма күрсәткечле дәрәҗәле функция. $y=x^r$ функциясен карыйк, монда r — уңай, кыскартылмый торган вакланма. Бу функциянең кайбер үзлекләрен санап үтик:

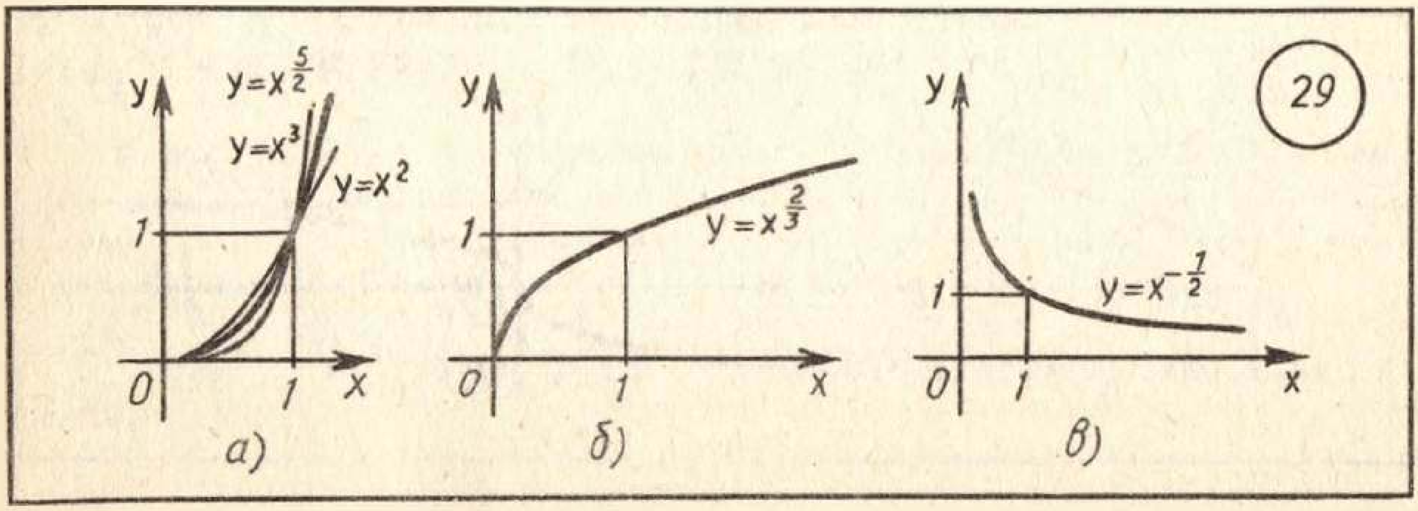
1) Билгеләнү өлкәсе — $[0;\ +\infty)$ нуры.
2) Функция җөп тә, так та түгел.
3) $y=x^r$ функциясе $[0;\ +\infty)$ аралыгында үсә.

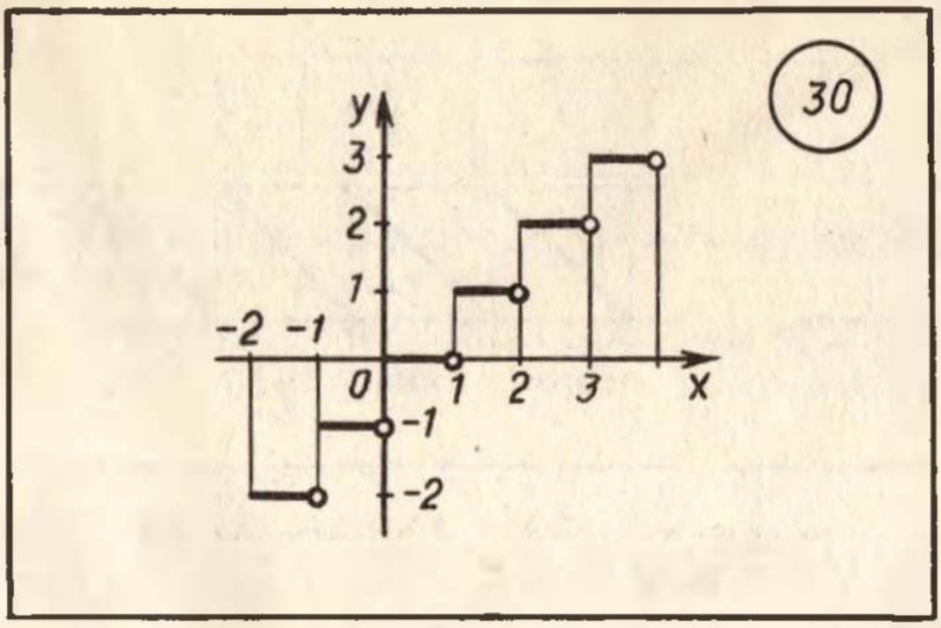
29 нчы *а* рәсемдә $y=x^{\frac{5}{2}}$ функция графигы күрсәтелгән. Ул $[0;\ +\infty)$ аралыгында $y=x^2$ һәм $y=x^3$ функцияләренең графиклары арасында урнашкан.

$r>1$ булганда теләсә нинди $y=x^r$ функциясенең графигы шул рәвешне ала.

29 нчы *б* рәсемдә $y=x^{\frac{2}{3}}$ функциясенең графигы бирелгән. $0<r<1$ булганда теләсә нинди дәрәҗәле $y=x^r$ функциясенең графигы шуңа охшаш була.

91. Тискәре вакланма күрсәткечле дәрәҗәле функция. $y=x^{-r}$ функциясен карыйк, монда r — уңай, кыскармый торган вакланма. Бу функциянең үзлекләрен санап үтик:





1) Билгеләнү өлкәсе — $(0;\ \infty)$ аралыгы.
2) Функция җөп тә, так та түгел.
3) $(0;\ +\infty)$ аралыгында $y = x^{-r}$ функциясе кими.

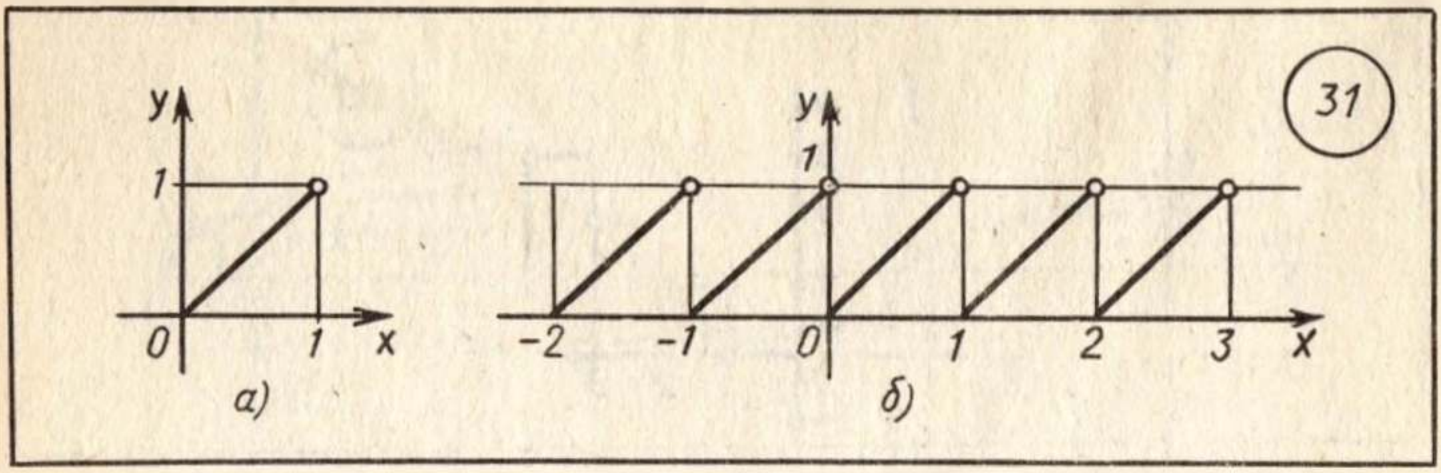
Мисал өчен $y = x^{-\frac{1}{r}}$ функциясенең графигын төзик. Функция кыйммәтләре таблицасын төзибез:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Табылган нокталарны координата яссылыгына төшерик һәм аларны тоташ кәкре сызык белән тоташтырыйк (29 нчы *в* рәсем). r — тискәре сан булганда, теләсә нинди $y = x^{r}$ функциясенең графигы шуңа охшаш була.

92. $y = [x]$ **функциясе.** $y = [x]$ функциясенең графигын төзик (п. 31 нче кара). Әгәр $0 \leqslant x < 1$ булса, $y = [x] = 0$, әгәр $1 \leqslant x \leqslant 2$ булса, $y = [x] = 1$; әгәр $-1 \leqslant x < 0$ булса, $y = [x] = -1$ була һ. б. $y = [x]$ функциясенең графигы 30 нчы рәсемдә күрсәтелгән.

93. $y = \{x\}$ **функциясе.** $y = \{x\}$ функциясенең графигын төзик (п. 31 не кара). $\{x + 1\} = \{x\}$ икәнен билгеләп үтик, шуңа күрә элек ниндидер 1 озынлыгындагы аралыкта, мәсәлән, $[0;\ 1)$ аралыгында, график тармагын төзү җитә. Әгәр $0 \leqslant x < 1$ булса, $[x] = 0$ була, шуңа күрә $\{x\} = x$ була.


31

31 нче *а* рәсемдә $y=\{x\}$ функциясенең графигы $[0;\ 1)$ аралыгында, ә 31 нче *б* рәсемдә $y=\{x\}$ функциясенең графигы барлык саннар турысында сурәтләнгән.

94. Күрсәткечле функция. Күрсәткечле функция $y=a^x$ формуласы белән бирелә, монда $a>0$ һәм $a\neq 1$.

$a>1$ булганда $y=a^x$ функциясенең үзлекләрен санап үтик:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык санлы туры.

2) Функциянең кыйммәтләре өлкәсе — $(0;\ +\infty)$ аралыгы.

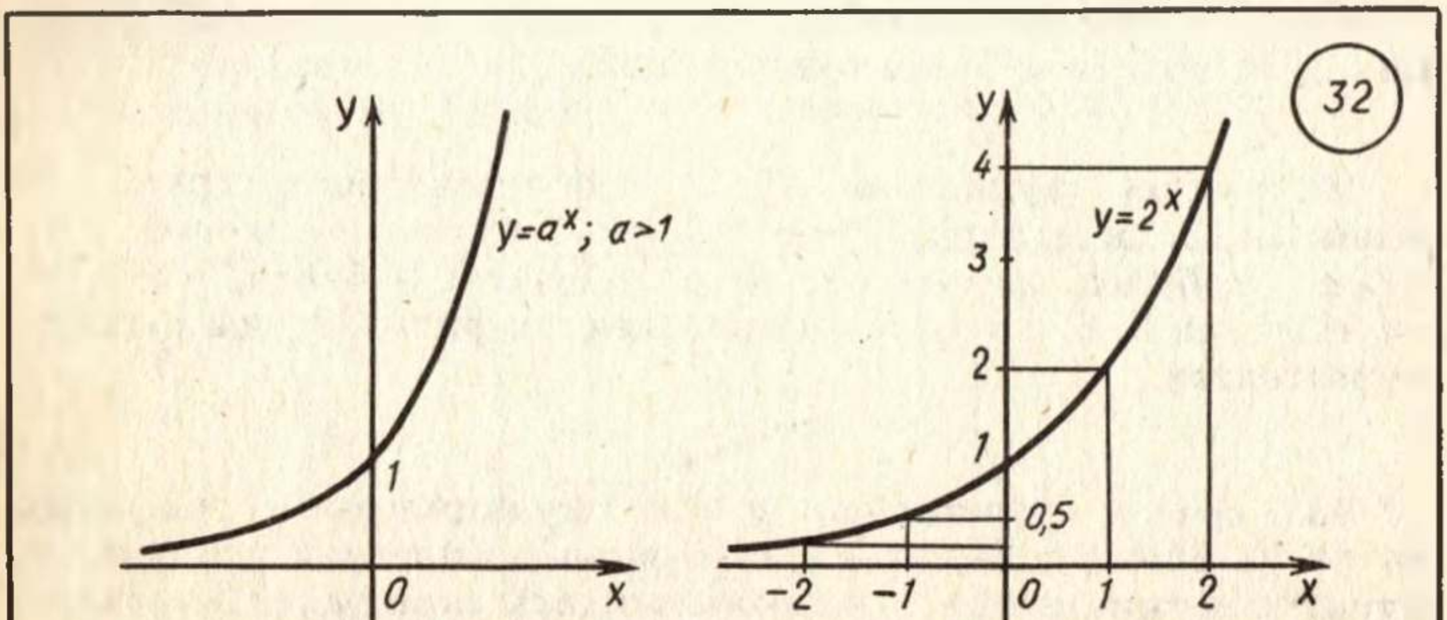
3) Функция җөп тә, так та түгел, чөнки $a^{-x}\neq a^x$ һәм $a^{-x}\neq -a^x$.

4) Функция барлык саннар турысында үсә.

$a>1$ булганда $y=a^x$ функциясе графигы 32 нче *а* рәсемдә күрсәтелгәнчә була. Бу функциянең теләсә нинди уңай кыйммәтләр алуын билгеләп үтик.

1 нче мисал. $y=2^x$ функциясенең графигын төзик.

Чишү. Таблица төзик.


32

x	-2	-1	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8

Табылган нокталар ярдәмендә $y=2^x$ функциясенең графигын төзибез (32 нче *б* рәсем).

$0<a<1$ булганда $y=a^x$ функциясенең үзлекләре:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык саннар турысы.

2) Кыйммәтләр өлкәсе — $(0;\ +\infty)$.

3) Функция җөп тә, так та түгел.

4) Функция барлык саннар турысында кими.

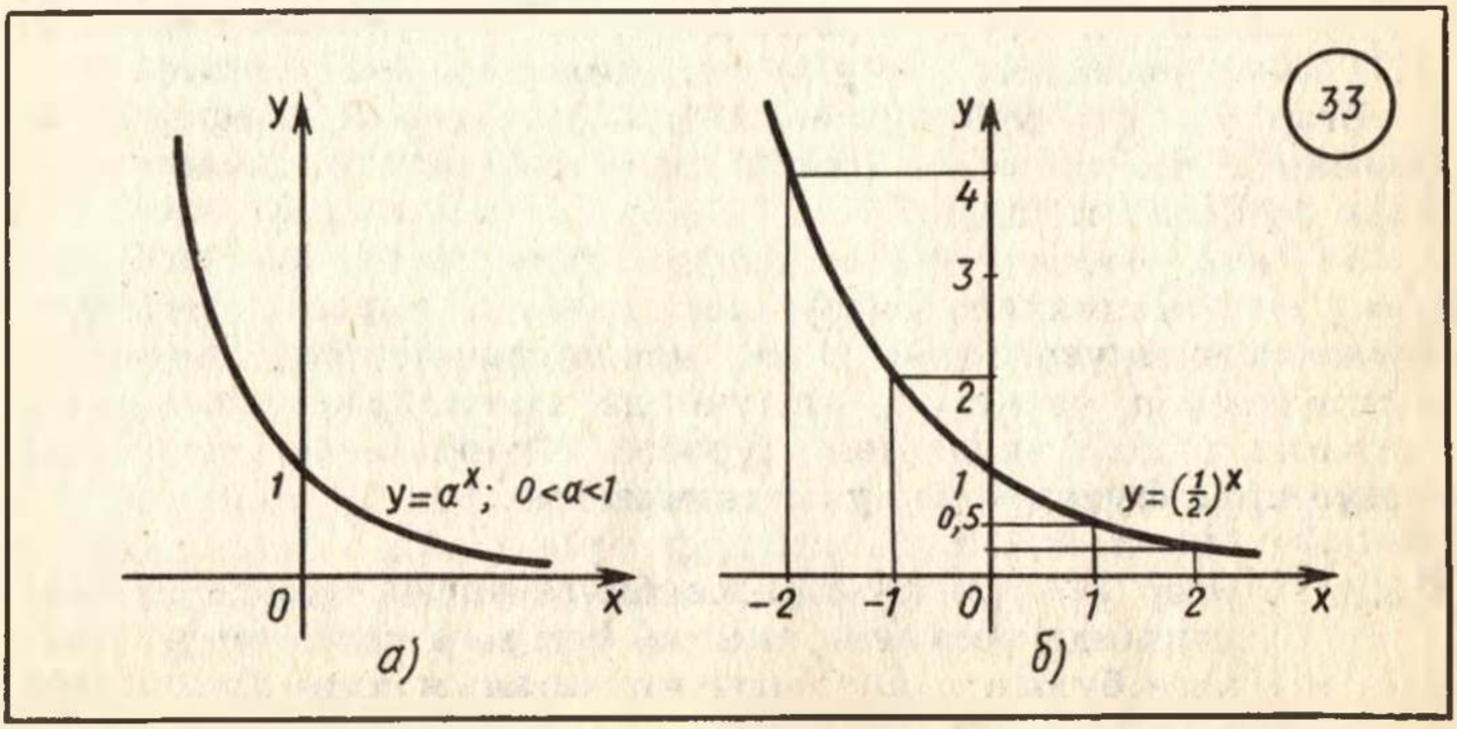
$0<a<1$ булганда $y=a^x$ функциясенең графигы 33 нче *а* рәсемдә күрсәтелгәнчә була. Бу функциянең теләсә нинди уңай кыйммәтләр алуын билгеләп үтик.

2 нче мисал. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясенең графигын төзергә.

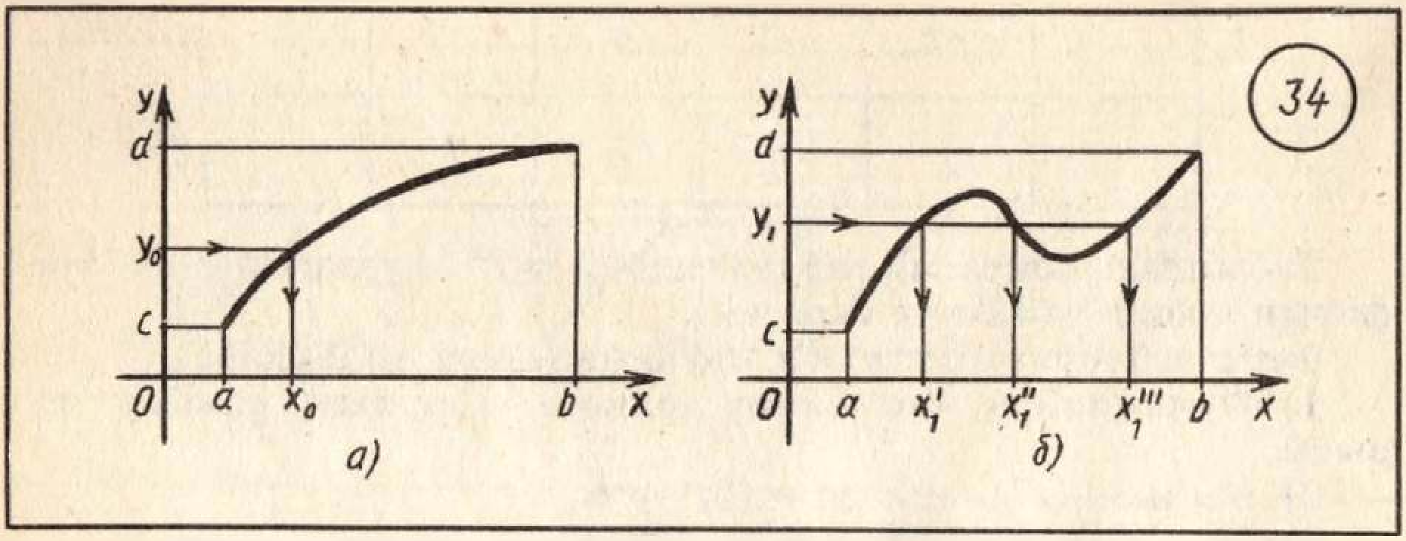
Чишү. Таблица төзик.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Табылган нокталар ярдәмендә $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясенең графигын төзибез (33 нче *б* рәсем).



а) б)



95. Кире функция. Кире функциянең графигы. $y=f(x)$ һәм $y=g(x)$ функцияләрен чагыштырыйк, аларның графиклары 34 нче рәсемдә сурәтләнгән. Алар икесе дә $[a;\ b]$ кисемтәсендә билгеләнгән һәм кыйммәтләре өлкәсе булып $[c,\ d]$ кисемтәсе тора. Беренче функция түбәндәге үзлеккә ия: $[c,\ d]$ кисемтәсендә теләсә нинди y_0 өчен $[a;\ b]$ кисемтәсендә $f(x_0)=y_0$ булырлык бер генә x_0 кыйммәте бар. Бу үзлекнең геометрик мәгънәсе түбәндәгечә: y лар күчәрен c һәм d нокталары арасында кисүче теләсә нинди горизонталь туры $y=f(x)$ функциясе графигын бер генә ноктада кисеп үтә. Икенче функция бу үзлеккә ия түгел, мәсәлән, y_1 кыйммәте өчен $y=y_1$ турысы $y=g(x)$ функциясе графигын өч ноктада кисеп үтә. Димәк, беренче очракта $[c,\ d]$ кисемтәсеннән билгеләп алынган. y_0 өчен $f(x_0)=y_0$ тигезләмәсенең бер генә x тамыры бар, ә икенче очракта кайбер y лар өчен, мәсәлән, $y=y_1$ булганда $g(x)=y_1$ тигезләмәсенең бердән артык тамыры бар.

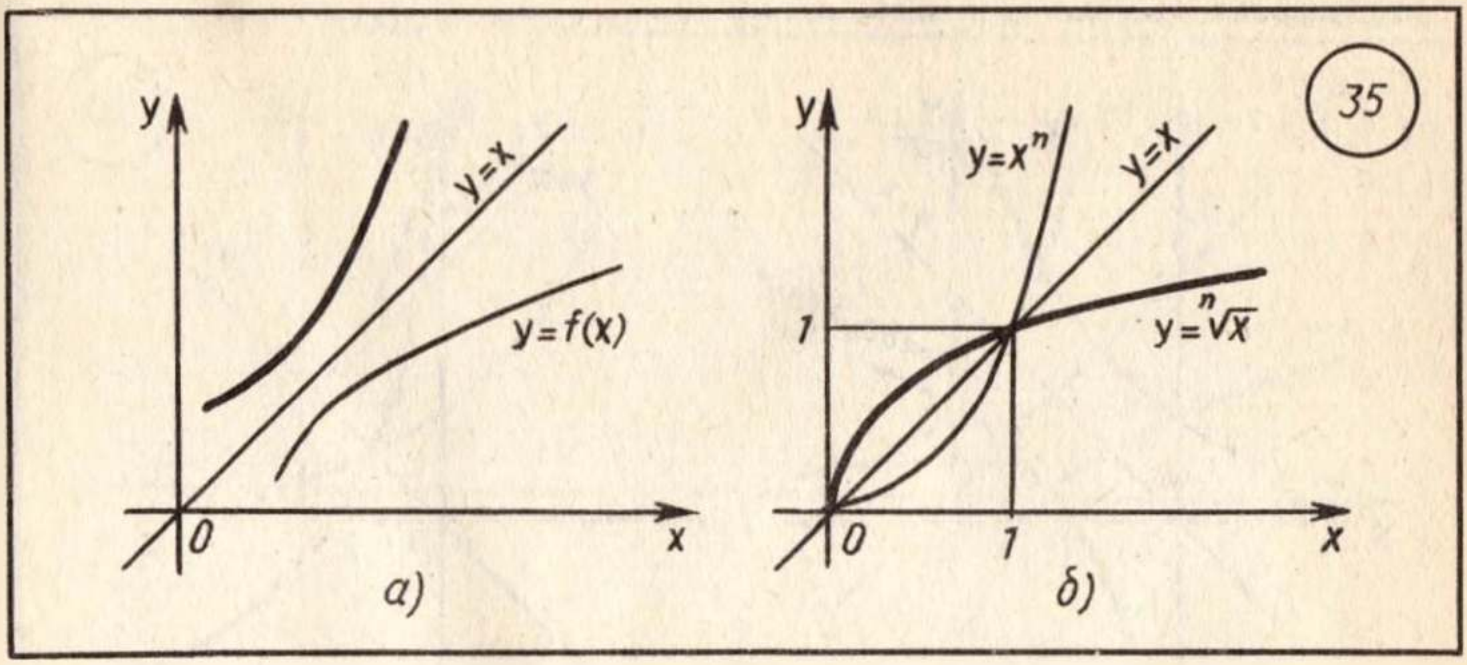
Әгәр теләсә нинди y_0 өчен $f(x)=y_0$ тигезләмәсенең x ка карата бер генә тамыры булса, $f(x)$ функциясен *кайтма* диләр.

Шулай итеп, 34 нче *а* рәсемдәге $y=f(x)$ функциясе кайтма, ә 34 нче *б* рәсемдәге $y=g(x)$ функциясе кайтма түгел.

Әгәр $y=f(x)$ функциясе кайтма булса, $y=f(x)$ формуласыннан x ны табып, x һәм y ның урыннарын алыштырып, *кире функция* табарбыз.

34 нче рәсемгә кабат мөрәҗәгать итик. $y=f(x)$ һәм $y=g(x)$ функцияләре графикларын чагыштырып, $y=f(x)$ — функциясенең үсүче (һәм аның кире функциясе бар), ә $y=g(x)$ функциясенең үсүче дә, кимүче дә түгел (һәм аның кире функциясе юк) икәнлеген күрәбез. Функциянең үсүе яки кимүе кире функция булуны тәэмин итә.

Т.3.3. Әгәр $y=f(x)$ функциясе билгеләнгән булып, X аралыгында үссә (яки кимесә) һәм аны кыйммәтләре өлкәсе булып Y аралыгы торса, аның кире функциясе



бар, өстәвенә, кире функция билгеләнә һәм y та үсә (яки кими).

Мисал. $y=2x-1$ функциясенең киресе барлыгын исбатларга һәм аны табарга.

Чишү. $y=2x-1$ функциясе барлык санлы турыда үсә, димәк, аның кире функциясе бар. Кире функцияне табу өчен, $y=2x-1$ формуласыннан x ны табарга кирәк. $x=\frac{y+1}{2}$ була. x һәм y ның урыннарын алыштырып, $y=\frac{x+1}{2}$ не табабыз. Бу — эзләгән кире функция.

Әгәр $(x;\ y)$ ноктасы $y=f(x)$ функциясе графигыныкы булса, $(y;\ x)$ ноктасы кире функция графигыныкы була. Шуңа күрә кире функциянең графигы $y=f(x)$ функция графигыннан xy яссылыгын $(y;\ x)$ ноктасын $(x;\ y)$ ноктасына күчерүче үзгәртү ярдәмендә табыла. Бу үзгәртү — $y=x$ турысына карата симметрия.

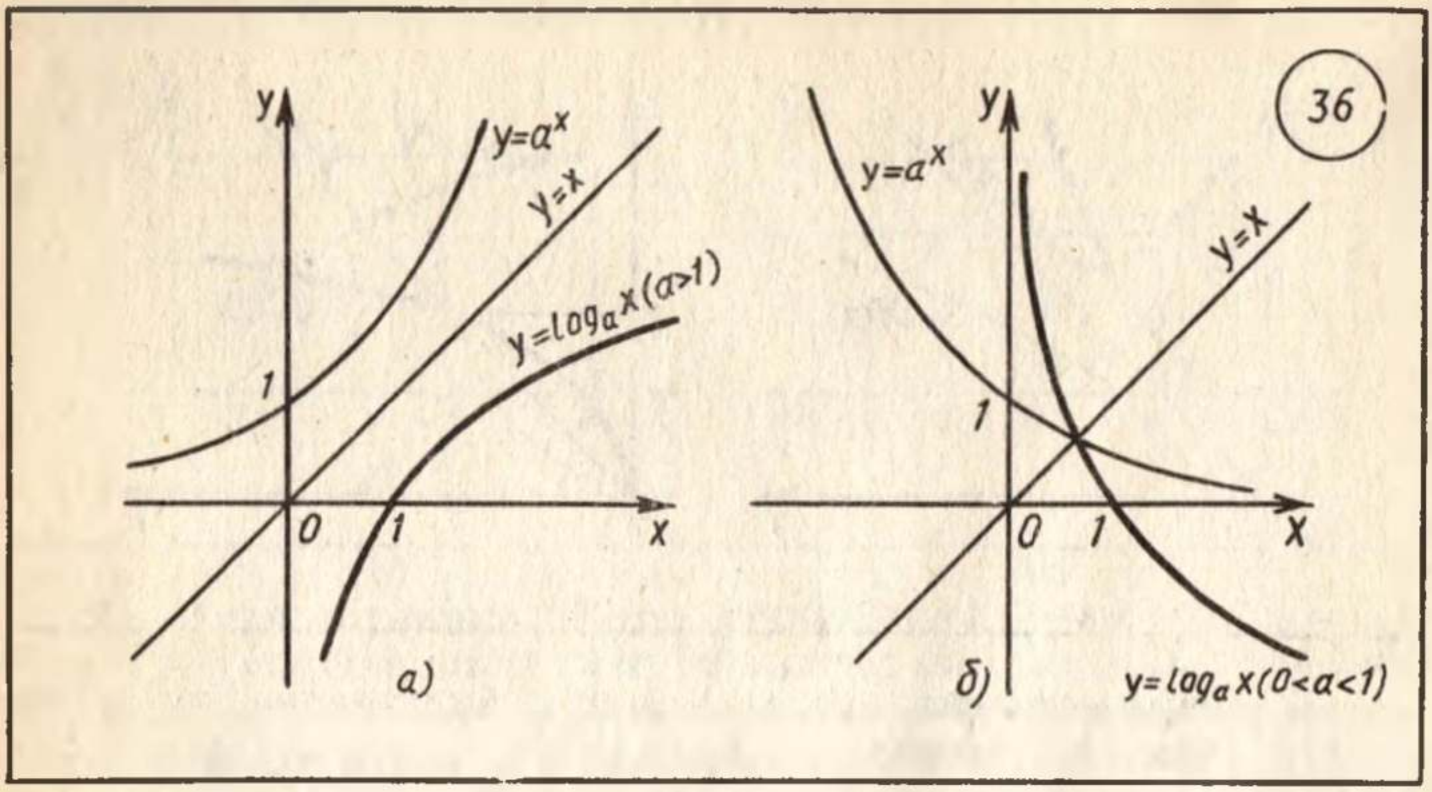
Шулай итеп, $y=f(x)$ *функциясенә кире функциянең графигын төзү өчен,* $y=f(x)$ *функциясе графигын* $y=x$ *турысына карата симметрияле үзгәртергә кирәк* (35 нче *а* рәсем).

Мәсәлән, әгәр $y=x^n$, монда $x\geqslant 0$, n — натураль сан, $n>1$ булса, ул чакта $x=\sqrt[n]{y}$ була. x һәм y ның урыннарын алыштырып, $y=\sqrt[n]{x}$ табабыз. Үзара кире $y=x^n$ һәм $y=\sqrt[n]{x}$ функцияләренең графиклары $y=x$ турысына карата симметрияле (35 нче *б* рәсем).

96. Логарифмик функция. $y=a^x$ күрсәткечле функциясе (монда $a>0$, $a\neq 1$) кире функция булырга тиешле барлык үзлекләргә ия (3.3 теореманы кара).

1) Билгеләнү өлкәсе — $(-\infty;\ +\infty)$.

2) Кыйммәтләр өлкәсе — $(0;\ +\infty)$.



36

3) $a>1$ булганда, $y=a^x$ функциясе үсә һәм $0<a<1$ булганда кими.

Бу үзлекләрдән күрсәткечле функция өчен $(0;\ \infty)$ аралыгында билгеләнгән һәм кыйммәтләре өлкәсе $(-\infty,\ \infty)$ күплеге булган кире функция булуы килеп чыга.

Бу кире функция $y=\log_a x$ дип тамгалана (*«а нигезе буенча х санының логарифмы»* дип укыла). Шулай итеп, $y=\log_a x$ *логарифмик функциясе,* монда $a>0$ һәм $a\neq 1$ — $y=a^x$ күрсәткечле функциягә кире функция.

$y=\log_a x$ логарифмик функциясе түбәндәге үзлекләргә ия (алар 3.3 теоремасыннан килеп чыгалар):

1) Билгеләнү өлкәсе — $(0;\ \infty)$.

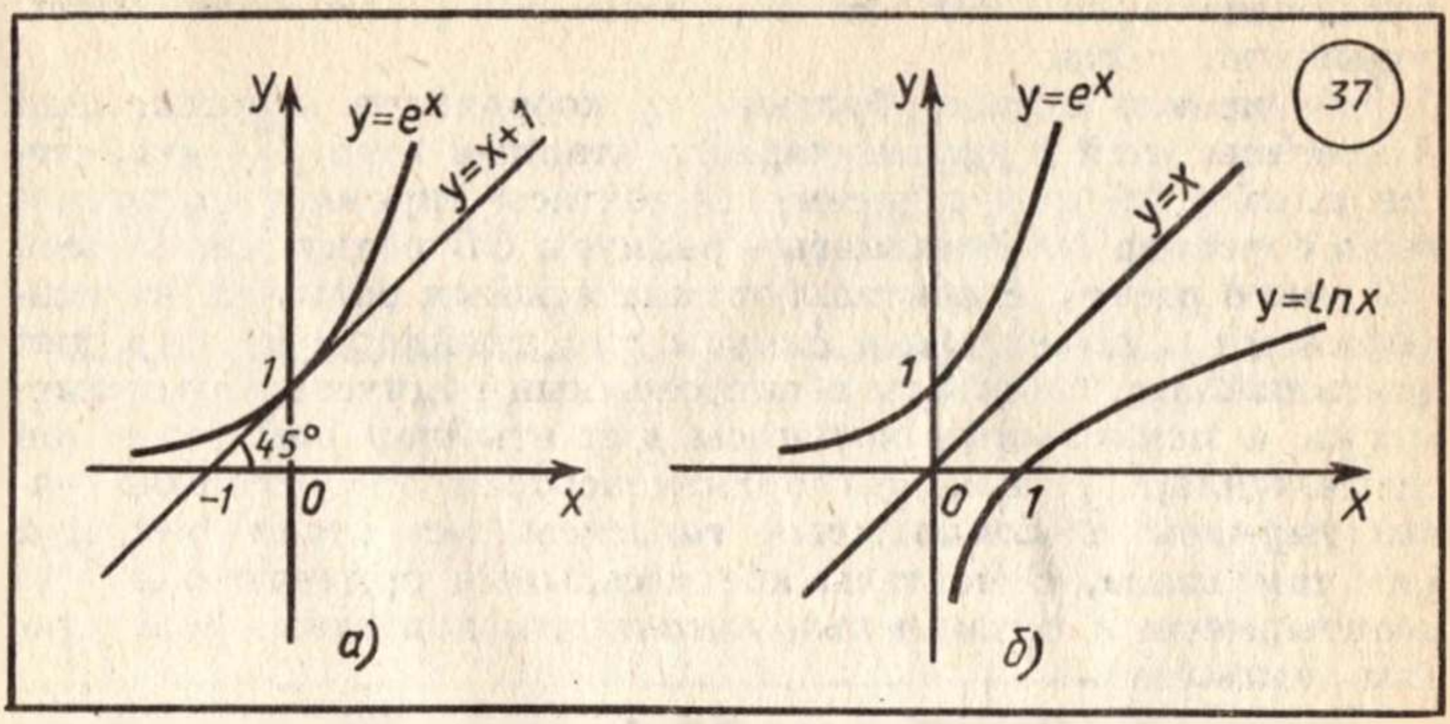
2) Кыйммәтләр өлкәсе — $(-\infty;\ +\infty)$.

3) Функция җөп тә, так та түгел.

4) $a>1$ булганда $(0;\ +\infty)$ аралыгында функция үсә, $0<a<1$ булганда $(0;\ +\infty)$ та кими.

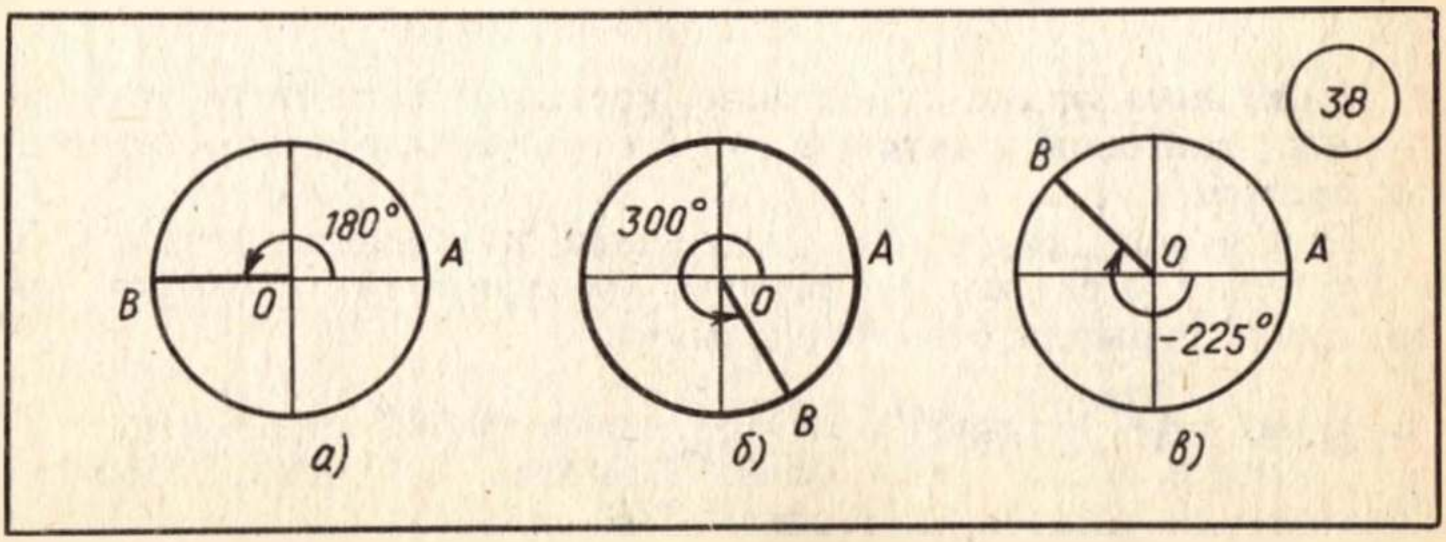
$y=\log_a x$ функциясе графигын $y=a^x$ функциясе графигыннан $y=x$ турысына карата симметрик үзгәртү ярдәмендә төзеп була. 36 нчы *а* рәсемдә $a>1$ булган, ә 36 нчы *б* рәсемдә $0<a<1$ булганда логарифмик функция графиклары күрсәтелгән.

97. *e* саны. $y=e^x$ функциясе. $y=\ln x$ *функциясе.* $y=a^x$ $(a>1)$ күрсәткечле функцияләр арасында математика һәм аның кушымталары өчен аерым кызыксыну тудырган, түбәндәге үзлеккә ия булган функция бар: бу функция графигына $(0;\ 1)$ ноктасында үткәрелгән орынма (п. 215 не кара) x лар күчәре белән 45° лы почмак төзи (37 нче *а* рәсем).



Андый a^x функциясенең a нигезен e хәрефе, ягъни $y = e^x$, дип билгеләү кабул ителгән. $e = 2{,}7182818284590\ldots$ дип исәпләнгән һәм e ның иррациональ сан булуы ачыкланган. $y = e^x$ күрсәткечле функциясенә кире булган $y = \log_e x$ логарифмик функциясен $y = \ln x$ дип билгеләү кабул ителгән (ln *«натураль логарифм»* дип укыла). $y = e^x$ һәм $y = \ln x$ функцияләренең графиклары $y = x$ турысына карата симметрияле (37 нче *б* рәсем).

98. Тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләре. $0° < \alpha < 180°$ булган α өчен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ геометрия курсында (II кисәкне кара) билгеләнгән иде. Алгебрада OA кисемтәсен O ноктасы тирәсендә теләсә нинди почмакка боруларны тикшерәләр, монда OA кисемтәсе *башлангыч радиус* дип атала. Уңай почмакка бору сәгать теле хәрәкәтенә каршы, ә тискәре почмакка — сәгать теле хәрәкәте юнәлешендә башкарыла. 38 нче рәсемдә 180° ка, 300° ка, $-225°$ ка борулар күрсәтелән; OA башлангыч кисемтә бору нәтиҗәсендә OB



радиусына күчә. 360° ка борганда OA кисемтәсе баштагы торышына кайта.

α — ирекле почмак булсын. xy координата яссылыгында A ноктасы уңай x ярымкүчәрендә ятарлык итеп, OA кисемтәсен алыйк (39 нчы *а* рәсем). O ноктасы тирәсендә α почмагына борганда OA башлангыч радиусы OB радиусына күчсен (39 нчы *б* рәсем). B ноктасы ординатасының радиуска чагыштырмасын α *почмагының синусы* дип атыйлар һәм $\sin\alpha$ дип тамгалыйлар; B ноктасы абсциссасының радиуска чагыштырмасын α *почмагының косинусы* дип атыйлар һәм $\cos\alpha$ дип тамгалыйлар; B ноктасы ординатасының абсциссасына чагыштырмасы α *почмагының тангенсы* дип атала һәм $\operatorname{tg}\alpha$ дип тамгалана, B ноктасы абсциссасының ординатасына чагыштырмасы α *почмагының котангенсы* дип атала һәм $\operatorname{ctg}\alpha$ дип тамгалана.

Кайбер почмакларның синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсы кыйммәтләренең таблицасын китерәбез:

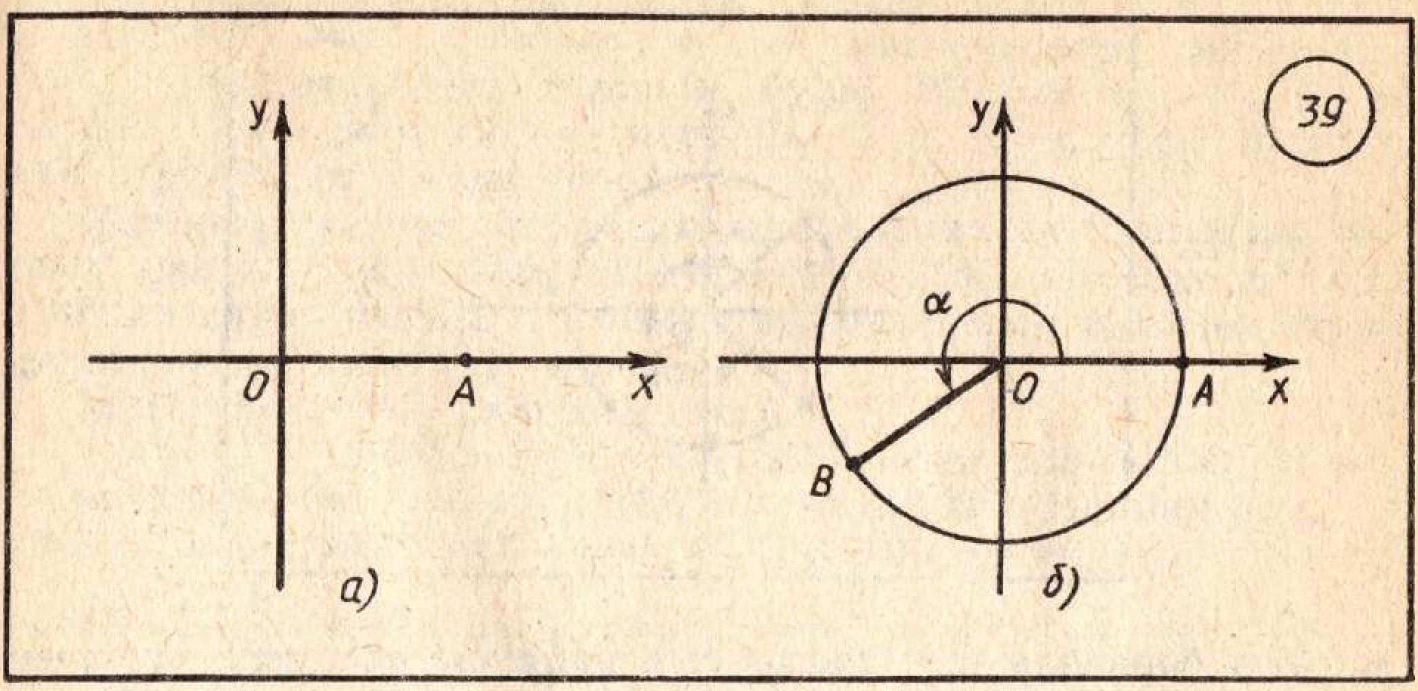
Функция	α аргументы						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	—	0

Билгеләмәләрдән күренгәнчә, косинусы 0 гә тигез почмакларның тангенсы, синусы 0 гә тигез почмакларның котангенсы булмый.

Почмакның радианлы үлчәнешен кулланып, почмакның гына түгел, ә санның да синусы, косинусы, тангенсы һәм котангенсы турында сөйләргә мөмкин.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} = 0{,}017 \text{ рад}.$$

Мәсәлән, $\sin 4 \approx \sin(4\cdot 57^\circ) = \sin 228^\circ$.

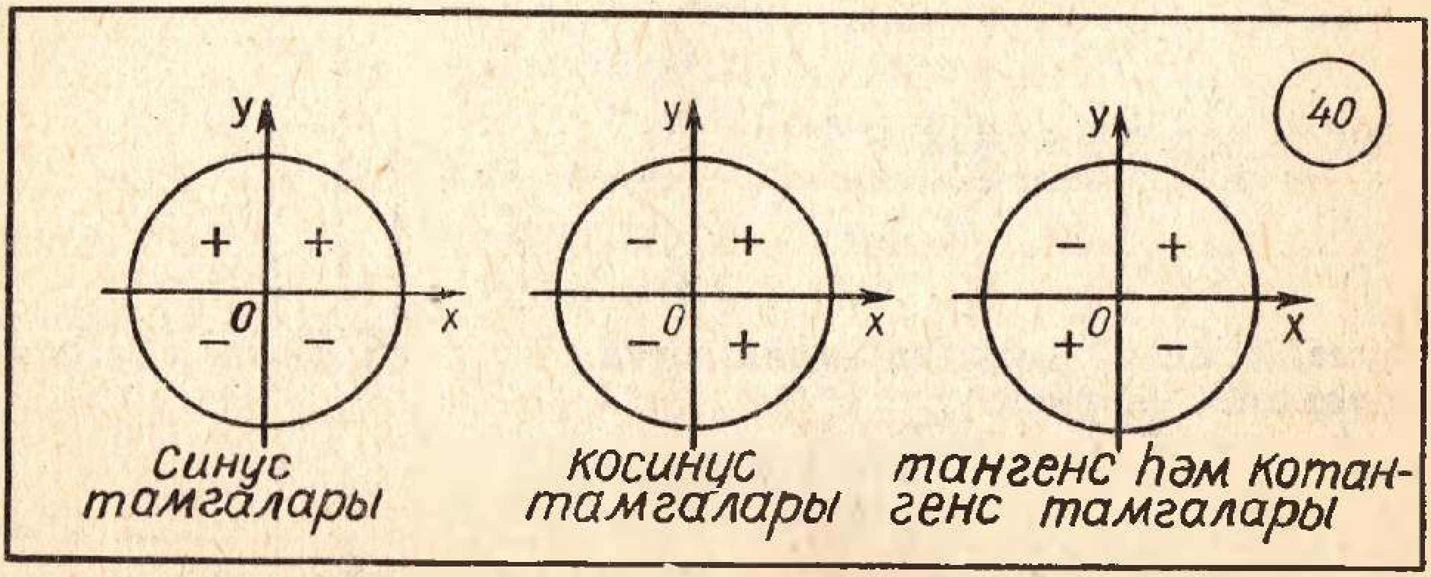

39
y
O
A
x
а)
y
α
O
A
x
B
б)

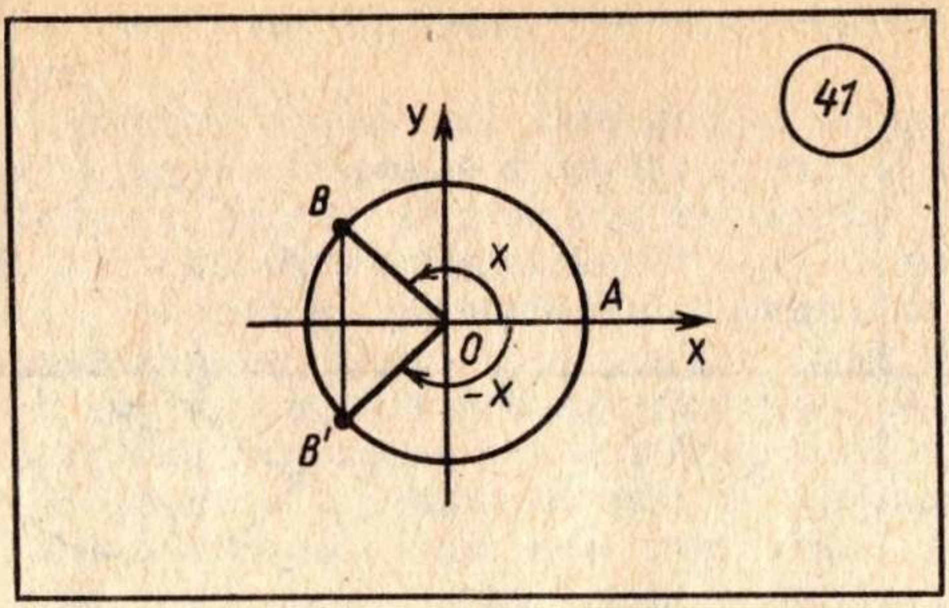
$$\cos 225^\circ = \cos\left(225^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}.$$

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияләрен *тригонометрик функцияләр* дип атыйлар:

99. Тригонометрик функцияләрнең чирекләрдәге тамгалары. O ноктасы тирәсендә α почмагына борганда OA башлангыч радиусы OB радиусына күчсен. Тригонометрик функцияләрнең билгеләмәләреннән (п. 98 не кара) күренгәнчә, $\sin x$ ның тамгасы B ноктасы ординатасы тамгасы белән, ә $\cos x$ ның тамгасы B ноктасы абсциссасы тамгасы белән туры килә. Тригонометрик функцияләрнең чирекләрдәге тамгалары 40 нчы рәсемдә күрсәтелгән.

100. Тригонометрик функцияләрне җөплеккә, таклыкка тикшерү. Әгәр башлангыч радиус O ноктасы тирәсендә α почмагына борганда OA радиусы OB радиусына күчсә,— α поч-


40
y
+
+
0
x
−
−
Синус тамгалары
y
−
+
0
x
−
+
косинус тамгалары
y
−
+
0
x
+
−
тангенс һәм котангенс тамгалары



магына борганда OA башлангыч радиусы абсцисса күчәренә карата OB га симметрик булган OB' радиусына күчәр (41 нче рәсем). B һәм B' ноктaларының абсциссалары тигез, ә ординаталары модульләре ягыннан тигез, тамгалары буенча капма-каршы. Димәк,

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\sin(-x) = -\sin x. \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Шулай итеп, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функцияләре так, ә $y = \cos x$ функциясе җөп (п. 74 не кара).

101. Тригонометрик функцияләрнең периодиклыгы. Әгәр OA башлангыч радиусы O ноктасы тирәсендә α почмагына борганда OB радиусына күчсә, $x + 360°$ почмагына борганда OA башлангыч радиусы шулай ук OB радиусына күчәр. Димәк,

$$\sin(x + 360°) = \sin x,$$
$$\cos(x + 360°) = \cos x.$$

Түбәндәге тигезлекләр тагы да гомуми булалар:

$$\sin(x + 360°k) = \sin x,$$
$$\cos(x + 360°k) = \cos x,$$

монда k — теләсә нинди бөтен сан.

Әгәр аргумент радианнарда күрсәтелсә,

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

була, монда k — теләсә нинди бөтен сан. $y = \operatorname{tg} x$ һәм $y = \operatorname{ctg} x$ функцияләре өчен:

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$$

тигезлекләре дөрес, монда k — теләсә нинди бөтен сан.

Шулай итеп, $2\pi k$ рәвешендәге теләсә нинди сан $\sin x$, $\cos x$ функцияләренең периоды, ә πk рәвешендәге сан — $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ функцияләренең периоды була. Шуның өстенә, 2π — $\sin x$, $\cos x$ ларның *төп периоды*, ә π — $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ларның *төп периоды* (п. 76 ны кара).

Җөплек, таклык, периодиклык үзлекләрен кулланып, теләсә нинди почмакның тригонометрик функциясен 0° тан 180° ка кадәр чикләрдә урнашкан почмакның тригонометрик функциясенә китерергә мөмкин.

Мисал. $\sin 945°$ ны исәпләргә.

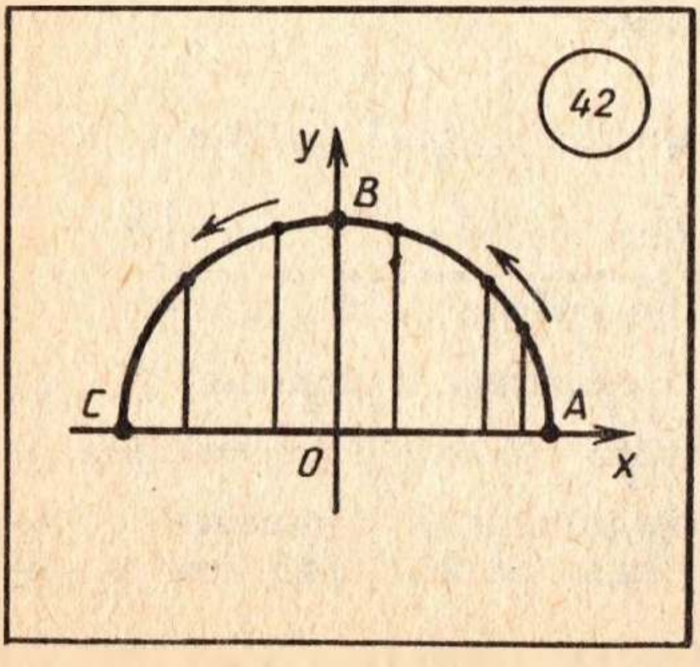
Чишү. $\sin 945° = \sin(720° + 225°) = \sin(225° + 360° \cdot 2) = \sin(225° - 360°) = \sin(-135°) = -\sin 135°$. Моннан соң, $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45°$ (п. 126 ны кара), $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (п. 98 ны кара). Димәк, $\sin 945° = -\sin 135° =$

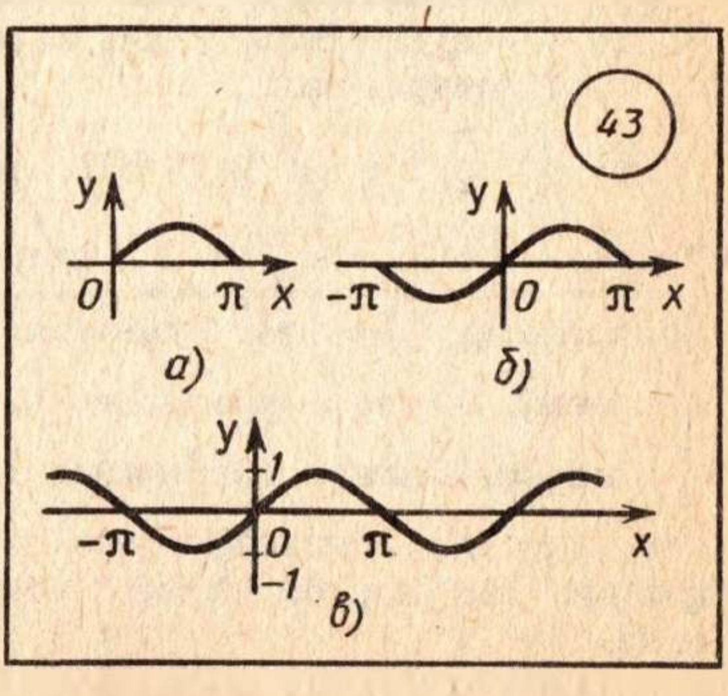
$$= -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

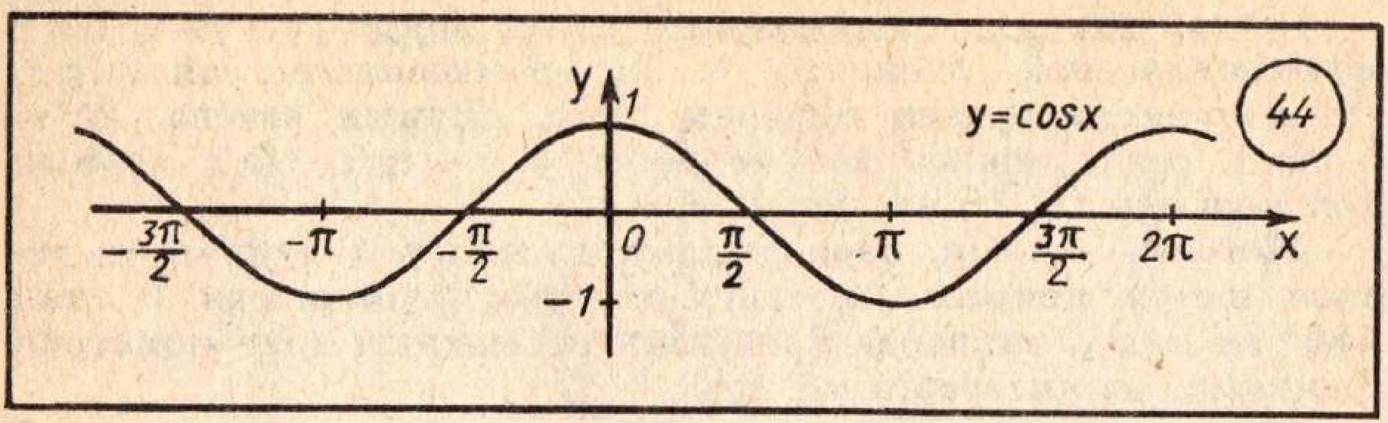
102. $y = \sin x$ **функциясенең үзлекләре һәм графигы.**

1) Билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.
2) Кыйммәтләр өлкәсе — $[-1;\ 1]$ кисемтәсе.
3) Функция периодик, төп периоды 2π (п. 101 не кара).
4) Функция так (п. 100 не кара).
5) $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ аралыкларында функция үсә һәм $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ аралыкларында кими, $n \in Z$ (42 нче рәсем).

(0; 0). $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$, ($\pi$; 0) контроль нокталарын алып, $[0;\ \pi]$ кисемтәсендә $y = \sin x$ функциясенең графигын төзибез (43 нче *а* рәсем). $y = \sin x$ функциясе так булганлыктан, коор







44

динаталар башлангычына карата төзелгән графикка симметрик үзгәртеп, $[\pi, \pi]$ кисемтәсендә функция графигын табарбыз (43 нче *б* рәсем). Ниһаять, $y = \sin x$ функциясенең периодиклыгын кулланып, $y = \sin x$ функциясенең графигын барлык билгеләнү өлкәсендә төзергә мөмкин (43 нче *в* рәсем).

103. $y = \cos x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы.

$y = \cos x$ функциясен тикшерү $y = \sin x$ функциясен тикшерү кебек үткәрелә (п. 102 не кара). $y = \cos x$ функциясе үзлекләрен санап чыгыйк:

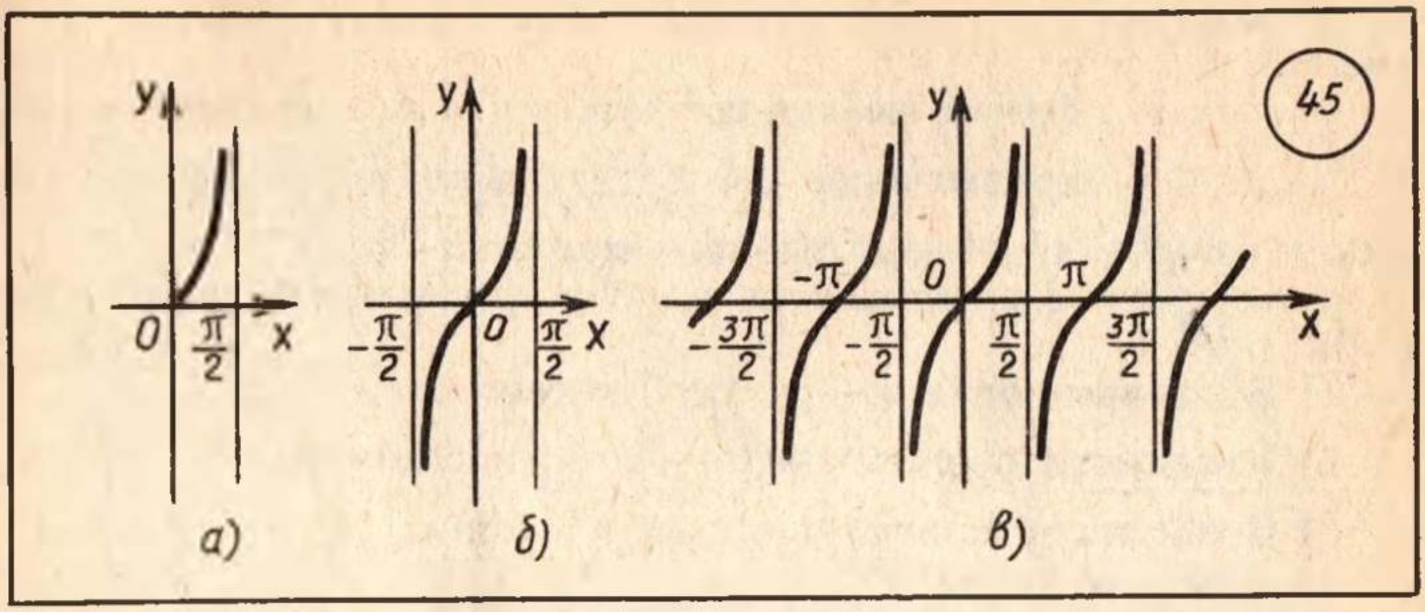
1) функциянең билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.
2) Кыйммәтләр өлкәсе — $[-1;\ 1]$.
3) Төп периоды 2π булган периодик функция.
4) Җөп функция.
5) $[2\pi n,\ \pi + 2\pi n]$ аралыкларында функция кими һәм $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$ аралыкларында үсә, $n \in Z$.

$y = \cos x$ функциясе графигы 44 нче рәсемдә күрсәтелгән.

104. $y = \operatorname{tg} x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы.

1) Билгеләнү өлкәсе: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.
2) Кыйммәтләр өлкәсе — барлык санлы туры.
3) π — функциянең төп периоды.
4) Функция так.
5) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ аралыкларында функция үсә.

$(0;\ 0)$, $\left(\frac{4}{4};\ 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3};\ \sqrt{3}\right)$, контроль нокталар алып, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ аралыгында $y = \operatorname{tg} x$ функциясенең графигын төзибез (45 нче *а* рәсем). $y = \operatorname{tg} x$ функциясенең таклыгын кулланып, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында графикны төзибез (45 нче *б* рәсем). Ниһаять, $y = \operatorname{tg} x$ функциясенең периодиклыгын кулланып, графикны барлык билгеләнү өлкәсендә төзибез (45 нче *в* рәсем).



105. $y = \operatorname{ctg} x$ функциясенең үзлекләре һәм графигы.

1) Функциянең билгеләнү өлкәсе: $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

2) Функциянең кыйммәтләр өлкәсе — барлык санлы туры.

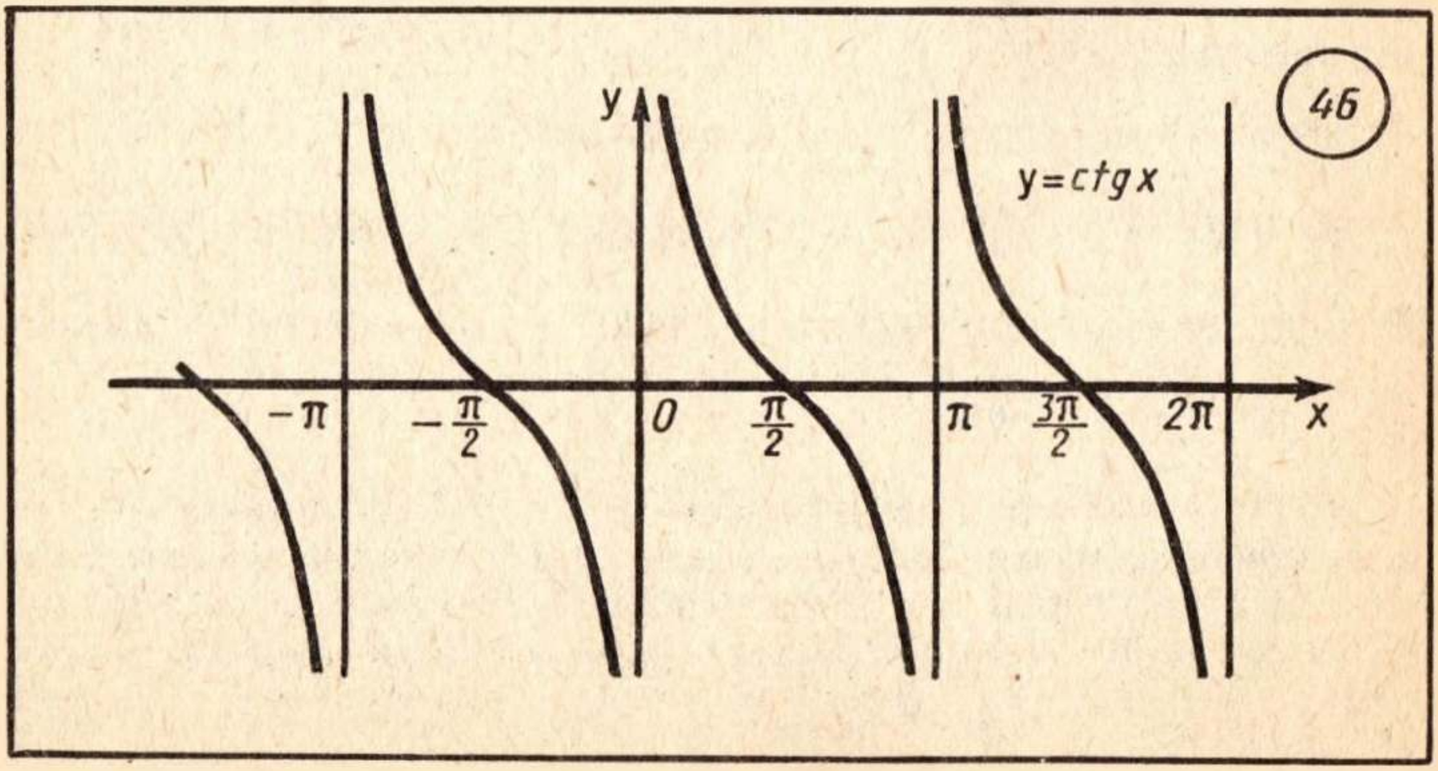
3) Төп периоды π булган периодик функция.

4) Функция так.

5) $y = \operatorname{ctg} x$ функциясе $(\pi n,\ \pi + \pi n)$ аралыкларында кими.

$y = \operatorname{ctg} x$ функциясенең графигы 46 нчы рәсемдә сурәтләнгән.

106*. $y = \arcsin x$ функциясе. $y = \sin x$ функциясе $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә үсә, анда -1 дән 1 гә кадәр үзенең барлык кыйммәтләрен ала (43 нче рәсем). Димәк, $y = \sin x$ функциясе өчен $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ булганда кире функция бар (п. 95 не кара).



Бу функцияне $y = \arcsin x$ дип тамгалыйлар («арксинус x» дип укыла).

$y = \arcsin x$ функциясенең графигын $y = \sin x$ графигыннан, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ аралыгында $y = x$ турысына карата симмметрияле үзгәртү ярдәмендә табарга мөмкин.

$y = \arcsin x$ функциясенең кайбер үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Билгеләнү өлкәсе — $[-1;\ 1]$ кисемтәсе.

2) Кыйммәтләр өлкәсе — $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсе.

3) Функция так: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

4) функция үсүче.

Алда әйтелгәннәрдән $y = \arcsin x$ һәм $x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ язмалары эквивалент була. $x = \sin y$ — тигезлегенә y урынына аның аңлатмасын, ягъни $\arcsin x$ ны куеп, $x = \sin(\arcsin x)$ ны табабыз. Димәк, $[-1;\ 1]$ аралыгындагы теләсе нинди x өчен:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ була.}$$

Соңгы ике бәйләнеш $\arcsin m$ ны түбәндәгечә аңлатырга мөмкинлек бирә (монда $-1 \leqslant m \leqslant 1$): $\arcsin m$ — ул $-\frac{\pi}{2}$ дән $\frac{\pi}{2}$ арасында алынган һәм синусы m га тигез булган сан.

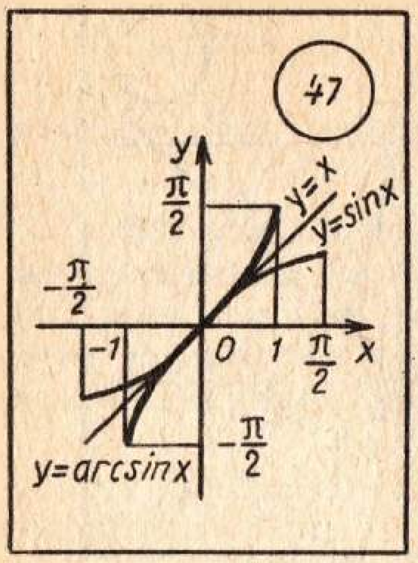
Мисал. Исәпләргә: а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

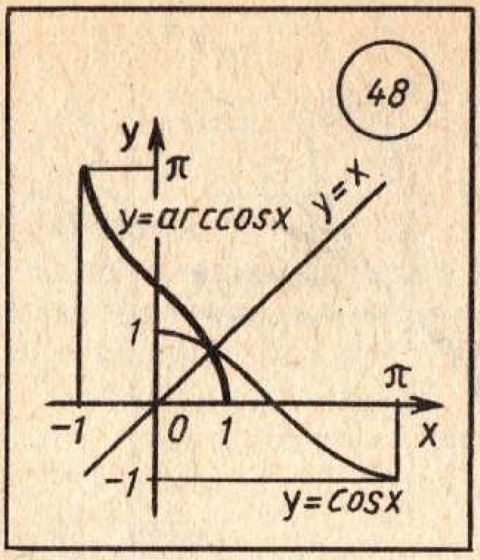
Чишү. а) Билгеләмә буенча $y = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ — ул $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ һәм $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ булырлык сан. Моннан, $y = \frac{\pi}{3}$ була. Шулай итеп,

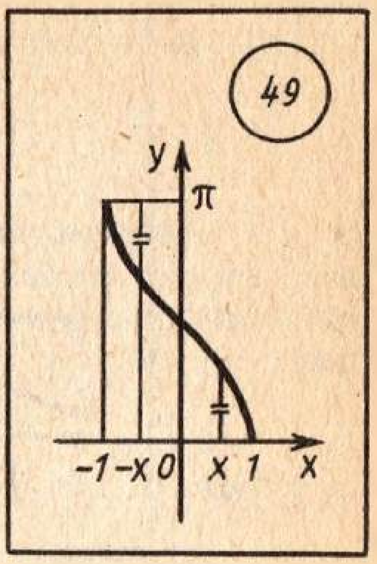
$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

б) Шулай ук фикер йөртеп, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ икәнен табабыз. Таклык үзлегеннән чыгып, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2}$, димәк, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

107*. $y = \arccos x$ функциясе. **$y = \cos x$ функциясе $[0;\ \pi]$ кисемтәсендә кими, анда -1 дән $+1$ гә кадәр үзенең барлык кыйммәтләрен ала (44 нче рәсем). Димәк, $y = \cos x$ функциясе өчен $[0;\ \pi]$ кисемтәсендә кире функция бар (п. 95 не кара). Ул $\arccos x$ дип тамгалана («арккосинус x» дип укыла).**







$y=\arccos x$ функциясенең графигы $y=\cos x\,(0\leqslant x\leqslant \pi)$ функциясе графигыннан $y=x$ турысына карата симметрияле үзгәртү ярдәмендә табыла.

Алда әйтелгәннән, $y=\arccos x$ һәм $x=\cos y$ $(0\leqslant y\leqslant \pi)$ язмалары эквивалент була. $x=\cos y$ тигезлегенә y урынына $\arccos x$ аңлатмасын куеп $\cos(\arccos x)=x$ ны табабыз. Димәк, $[-1;\ 1]$ аралыгындагы теләсә нинди x өчен:

$$\cos(\arccos x)=x,\quad 0\leqslant \arccos x\leqslant \pi \text{ була.}$$

Соңгы ике бәйләнеш $\arccos m$ ны (монда $-1\leqslant m\leqslant 1$) түбәндәгечә аңлатырга мөмкинлек бирә: $\arccos m$ — 0 дән π гә кадәр алынган һәм косинусы m га тигез булган сан ул.

Түбәндәге бердәйлекнең урынлы булуын искәртик:

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x. \qquad (1)$$

Аның дөреслегенә $y=\arccos x$ функциясе графигы ярдәмендә ышанырга була (49 нчы рәсем).

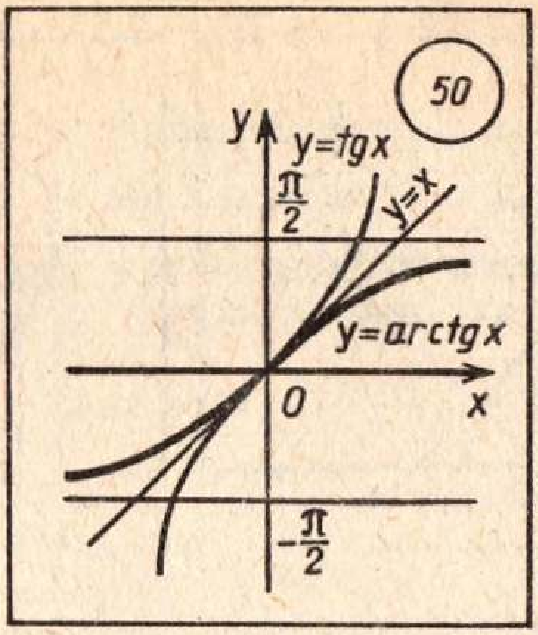
Мисал. Исәпләргә: а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

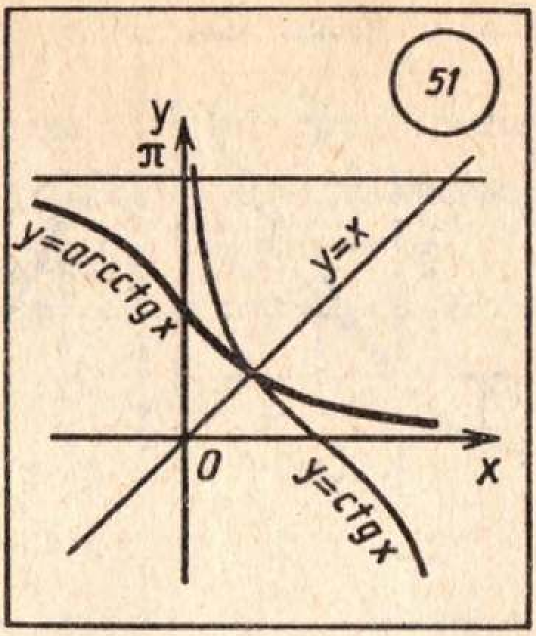
Чишү. а) Билгеләмә буенча $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ул $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ һәм $0\leqslant y\leqslant \pi$ булырлык сан. Моннан, $y=\frac{\pi}{4}$. Шулай итеп, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

б) (1) формула буенча, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Димәк, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

108*. $y=\operatorname{arctg} x$ функциясе. $y=\operatorname{tg} x$ функциясе $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында үсә, анда үзенең барлык кыйммәтләрен ала (45 нче рәсем). Шуңа күрә күрсәтелгән интервалда $y=$





$=\operatorname{tg} x$ функциясе өчен кире функция бар (п. 95 не кара). Ул $y=\operatorname{arctg} x$ дип тамгалана («арктангенс x» дип укыла).

$y=\operatorname{arctg} x$ функциясенең графигы $y=\operatorname{tg} x$ функциясе графигыннан монда $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ $y=x$ турысына карата симметрияле үзгәртү ярдәмендә табыла (50 нче рәсем).

$y=\operatorname{arctg} x$ функциясенең кайбер үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.

2) Функциянең кыйммәтләр өлкәсе — $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалы.

3) Функция так: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.

4) Функция үсүче.

Алда әйтелгәннән $y=\operatorname{arctg} x$ һәм $x=\operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ язмалары эквивалент була. Теләсә нинди x өчен:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x,\quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2} \text{ була.}$$

Соңгы ике бәйләнеш $\operatorname{arctg} m$ ны түбәндәгечә аңлатырга мөмкинлек бирә: $\operatorname{arctg} m$ — $-\frac{\pi}{2}$ дән $\frac{\pi}{2}$ гә кадәр чикләрдә $\left(-\frac{\pi}{2}\right.$ һәм $\frac{\pi}{2}$ кыйммәтләрен кертмичә$\left.\right)$ алынган һәм тангенсы m га тигез булган сан ул.

Мисал. Исәпләргә: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

Чишү: а) Билгеләмә буенча $y=\operatorname{arctg} 1$ — $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ һәм $\operatorname{tg} y=1$ булган сан ул. Моннан, $y=\frac{\pi}{4}$. Шулай итеп, $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$.

б) Шулай ук фикер йөртеп, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ табарбыз. Ләкин $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Димәк, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

109*. $y=\operatorname{arcctg}x$ функциясе. $y=\operatorname{ctg}x$ функциясе $(0;\ \pi)$ интервалында кими, анда үзенең барлык кыйммәтләрен ала (46 нчы рәсем). Димәк, бу интервалда $y=\operatorname{ctg}x$ функциясе өчен кире функция бар (п. 95 не кара). Ул $y=\operatorname{arcctg}x$ дип тамгалана («арккотангенс x» дип укыла).

$y=\operatorname{arcctg}x$ функциясе графигы $y=\operatorname{ctg}x$ функциясе графигын (монда $0<x<\pi$) $y=x$ турысына карата симметрик үзгәртеп табыла (51 нче рәсем).

$y=\operatorname{arcctg}x$ функциясенең кайбер үзлекләрен санап чыгыйк:

1) Билгеләнү өлкәсе — барлык реаль саннар күплеге.
2) Функциянең кыйммәтләр өлкәсе — $(0;\ \pi)$ интервалы.
3) Функция җөп тә, так та түгел.
4) Функция кимүче.

Алда әйтелгәннән $y=\operatorname{arcctg}x$ һәм $x=\operatorname{ctg}y\,(0<y<\pi)$ язмалары эквивалент була. Теләсә нинди x өчен:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x \text{ һәм } 0<\operatorname{arcctg}x<\pi \text{ була.}$$

Соңгы бәйләнешләр $\operatorname{arcctg}m$ ны түбәндәгечә аңлатырга мөмкинлек бирә: $\operatorname{arcctg}m$ — 0 дән π гә кадәр чикләрдә алынган (0 не һәм π не кертмичә) һәм котангенсы m га тигез булган сан ул.

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x \qquad (1)$$

бердәйлеге урынлы.

Мисал. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$ не исәпләргә.

Чишү. Элек $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$ не исәплик. Ул $\operatorname{ctg}y=\sqrt{3}$. һәм $0<y<\pi$ булырлык y саны. Димәк, $y=\frac{\pi}{6}$.

(1) формула буенча: $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

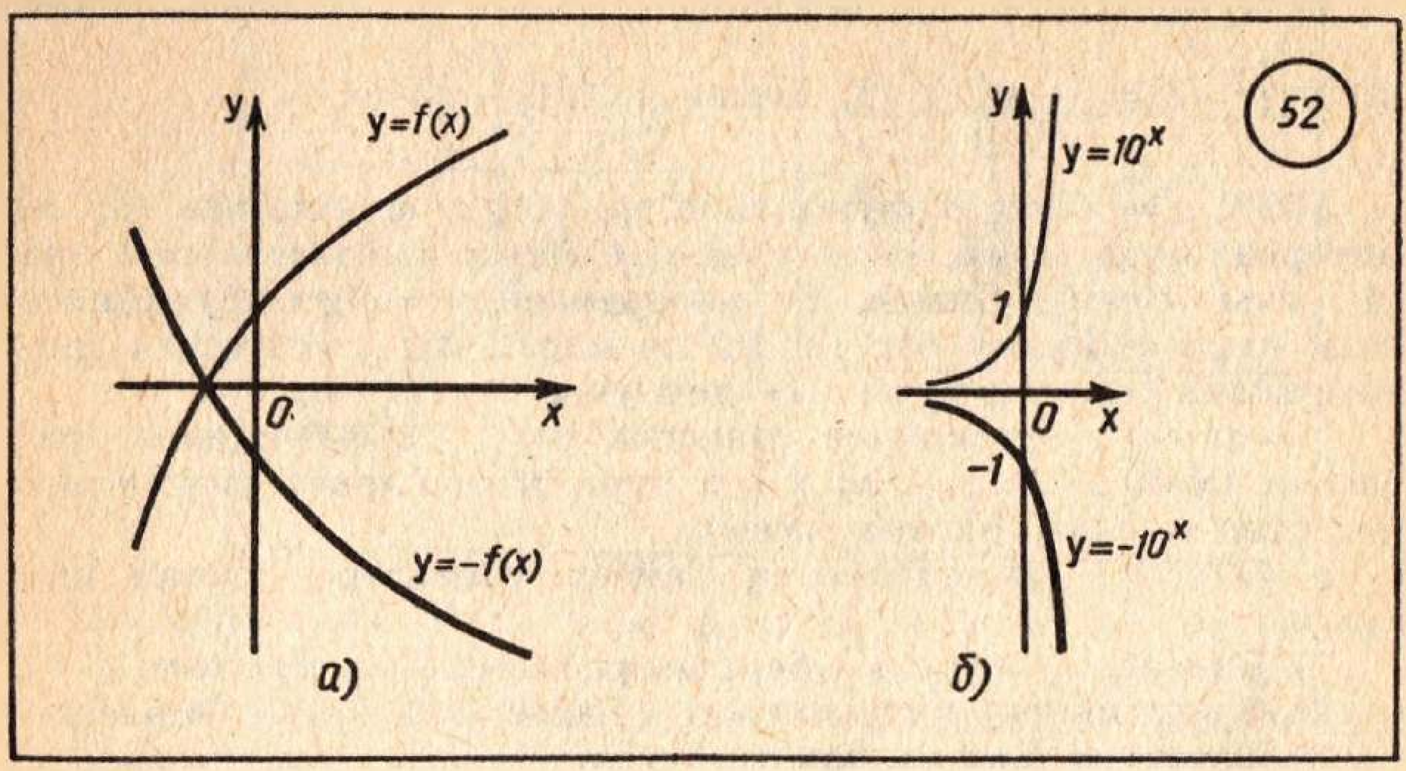
Димәк, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

§ 11. Графикларны үзгәртүләр

110. $y=mf(x)$ функциясе графигын төзү. Берничә мәсьәлә чишик.

1 нче мәсьәлә. $y=f(x)$ функциясе графигы бирелгәндә $y=mf(x)$ функциясе графигын төзергә, биредә $m>0$, $m>1$.

Чишү. $y=mf(x)$ функциясе графигы нокталары ординаталары $y=f(x)$ функциясе графигы нокталарының тиңдәшле ординаталарын m га тапкырлап табыла.



Әгәр $m > 1$ булса, $y = f(x)$ функциясе графигын мондый үзгәртү *m коэффициентлы x күчәре буенча сузу*, әгәр $0 < m < 1$ булса, *x күчәренә кысу* дип атала.

2 нче мәсьәлә. $y = f(x)$ функциясе графигы бирелгәндә $y = -f(x)$ функциясе графигын төзергә.

Чишү: x ның бер үк кыйммәте өчен $y = f(x)$ һәм $y = -f(x)$ графиклары нокталарының ординаталары тамгалары белән генә аерылалар. Димәк, $y = -f(x)$ функциясе графигын $y = f(x)$ функция графигыннан соңгысын x лар күчәренә карата симметрияле үзгәртеп табып була (52 нче *а* рәсем).

52 нче *б* рәсемдә $y = 10^x$ һәм $y = -10^x$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

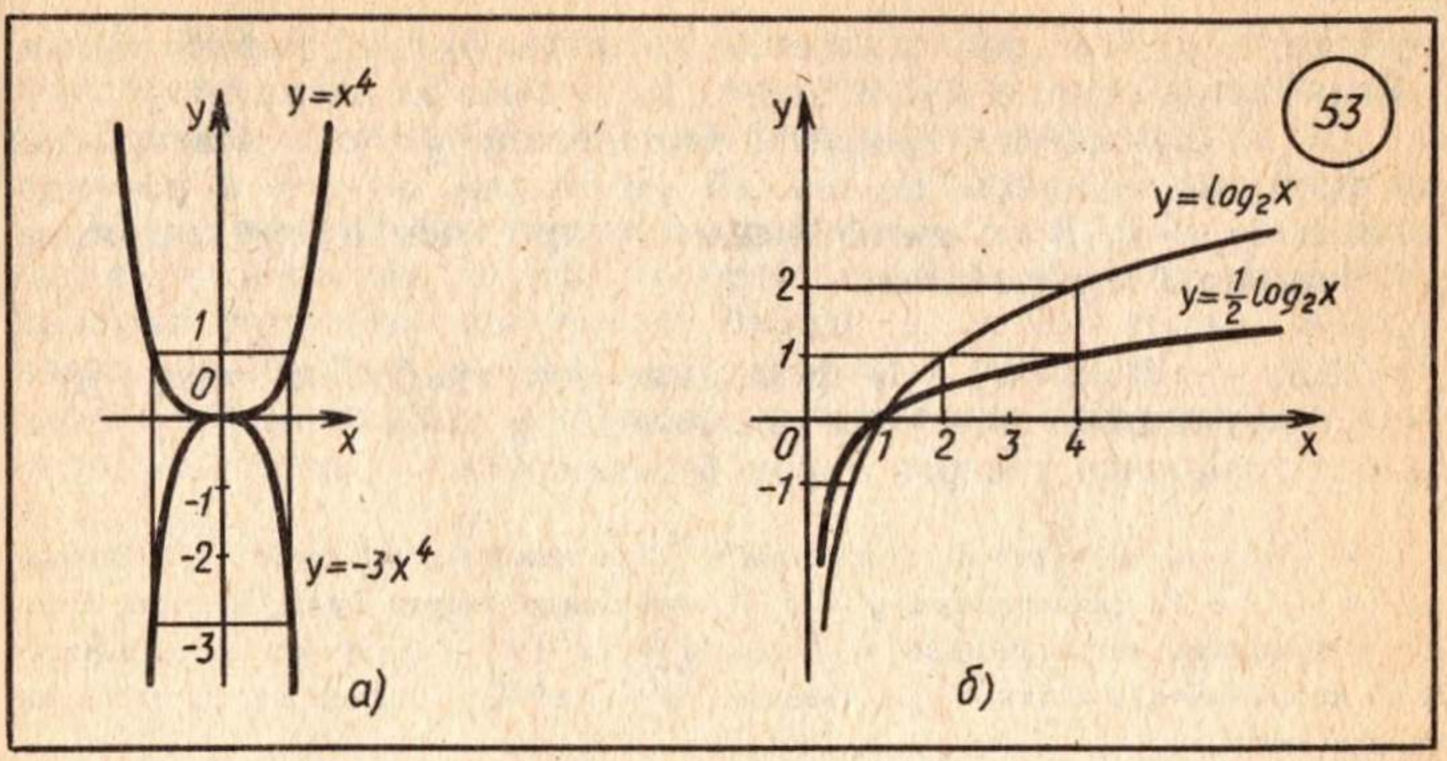
3 нче мәсьәлә. $y = f(x)$ функциясе графигы бирелгәндә, $y = mf(x)$ функциясе графигын төзергә ($m < 0$, $m = 1$).

Чишү. $mf(x) = -|m|f(x)$ булганлыктан, $y = mf(x)$ функциясе графигы $y = f(x)$ функциясе графигын x лар күчәре буенча $|m|$ коэффициентлы сузу (кысу) һәм шуннан соң x лар күчәренә карата симметрия үзгәртү юлы белән табылырга мөмкин (1 һәм 2 нче мәсьәләләрне кара).

53 нче *а* рәсемдә $y = x^4$ һәм $y = -3x^4$ функцияләре графиклары күрсәтелгән.

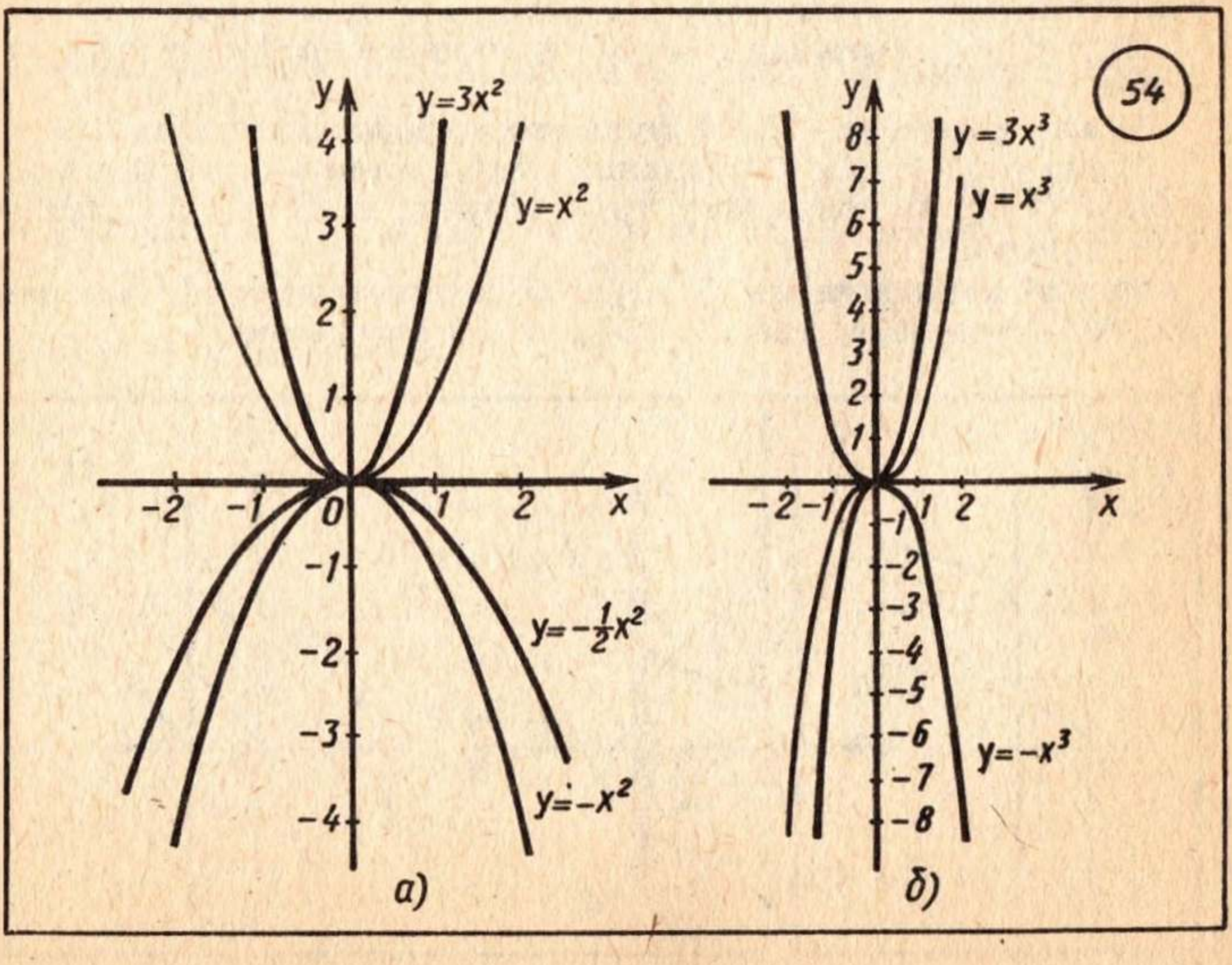
53 нче *б* рәсемдә $y = \log_2 x$ һәм $y = \frac{1}{2}\log_2 x$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

111. $y = ax^2$, $y = ax^3$ функцияләренең графиклары. $y = x^2$ функциясенең графигы — парабола. $y = ax^2$ функциясенең графигын төзү өчен, $y = x^2$ параболасын x лар күчәре буенча a коэффициентлы сузуны (кысуны) башкарырга кирәк; шу-



ның белән бергә, әгәр $a<0$ булса, $y=|a|x^2$ функциясе графигын тагын x лар күчәренә карата симметрияле үзгәртергә кирәк. (110 нчы пунктны кара).

54 нче *а* рәсемдә *a* ның 1; -1; 3; $-\frac{1}{2}$ гә тигез кыйммәтләре өчен, $y=ax^2$ функциясе графиклары күрсәтелгән. Бу графикларның барысын да *параболалар* дип атыйлар. $a>0$



булганда, $y = ax^2$ функциясенең графигы булган параболаның тармаклары өскә, ә $a < 0$ булганда — аска юнәлгән.

$y = x^3$ функциясе графигы бирелгәндә $y = ax^3$ рәвешендәге функция графигы да шулай ук төзелә. 54 нче *б* рәсемдә *a* ның 1; -1; 3 кә тигез кыйммәтләре өчен бу функциянең графиклары күрсәтелгән.

112. $y = f(x - m) + n$ функциясенең графигын төзү. $y = f(x)$ функциясе графигы билгеле, ә $y = f(x - m) + n$ функциясе графигын төзергә кирәк булсын.

$x' = x - m$, $y' = y - n$ дип алыйк. Ул чакта $y = f(x - m) + n$ ягъни $y - n = f(x - m)$ формуласын $y' = f(x')$ рәвешендә язарга була. Шулай итеп, xy координата яссылыгында төзелгән $y = f(x - m) + n$ функциясе графигы $x'y'$ координата яссылыгында төзелгән $y' = f(x')$ функциясе графигы белән тәңгәл килә.

$x' = x - m$, $y' = y - n$, ягъни шул ук $x = x' + m$, $y = y' + n$ формулалары теләсә нинди $(x;\ y)$ ноктасын $(x + m;\ y + n)$ ноктасына, ә аерым алганда, координаталар башлангычын $(m,\ n)$ ноктасына күчерүче параллель күчерүне бирәләр.

$y = f(x - m) + n$ функциясе графигын төзү өчен:

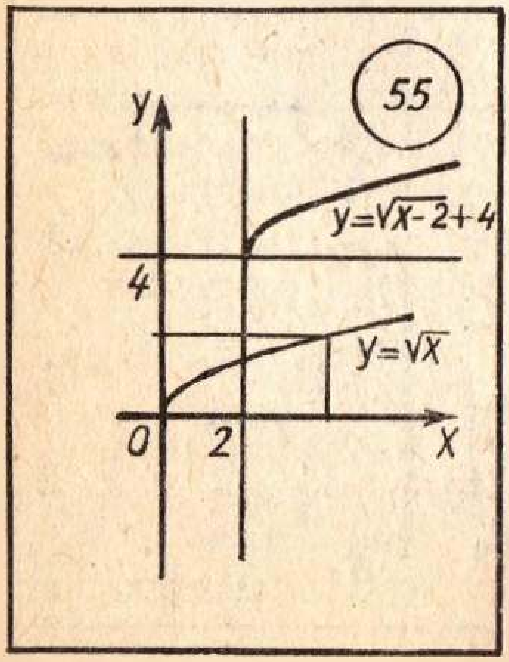
1) $O'(m;\ n)$ ноктасын яңа $x'y'$ координаталар системасының башлангычы итеп сайлап, яссылыкны параллель күчерергә;

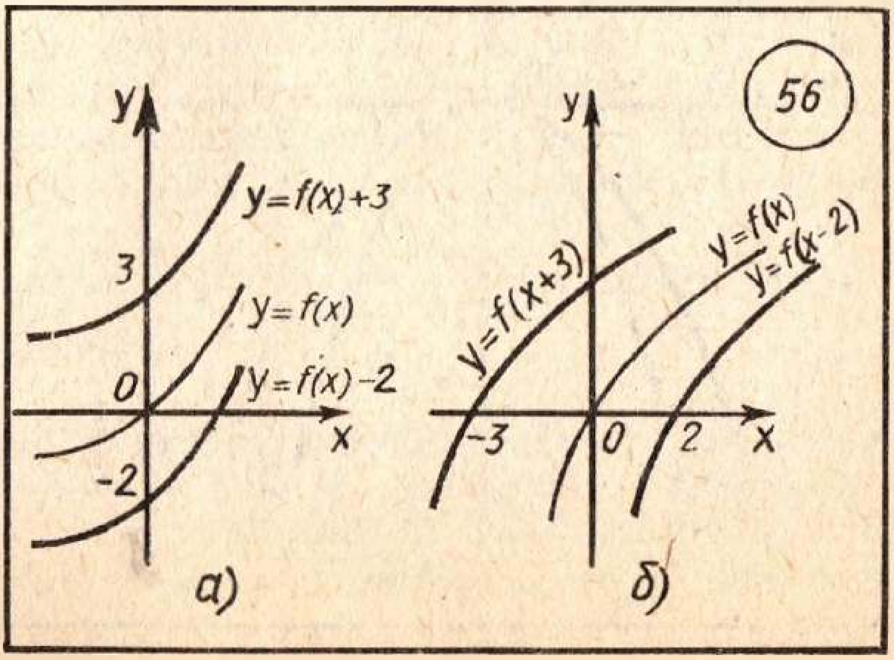
2) $x'y'$ яссылыгында $y = f(x')$ функциясе графигын төзергә кирәк.

Мисал. $y = \sqrt{x - 2} + 4$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. 1) Яңа $x'y'$ координаталар системасының башлангычын $O'(2;\ 4)$ ноктасына урнаштырып, яссылыкны параллель күчерик.

2) $x'y'$ яссылыгында $y' = \sqrt{x'}$ функциясенең графигын төзик. Бу — төзелергә тиешле график (55 нче рәсем).


55


56

56 нчы *а* рәсемдә $y=f(x)$, $y=f(x)-2$; $y=f(x)+3$ функцияләренең, ә 56 нчы *б* рәсемдә $y=f(x)$; $y=f(x-2)$, $y=f(x+3)$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

113. Квадрат функциянең графигы. $y=ax^2+bx+c$ рәвешендәге формула белән бирергә мөмкин булган функция *квадрат функция* дип атала. Монда a, b, c — теләсә нинди реаль саннар һәм $a=0$. Бу функциянең графигын төзү өчен ax^2+bx+c квадрат буынын түбәндәгечә үзгәртик («тулы квадрат аерып» алыйк):

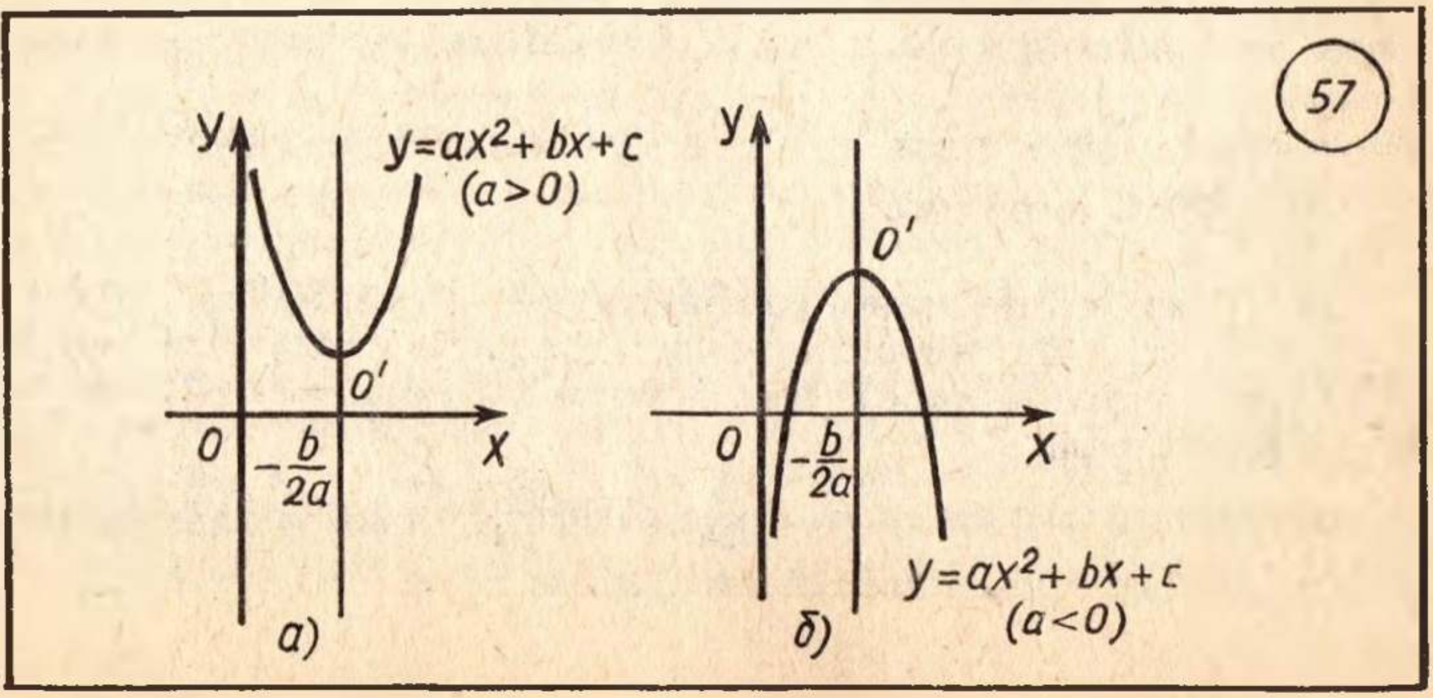
$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\right.$$

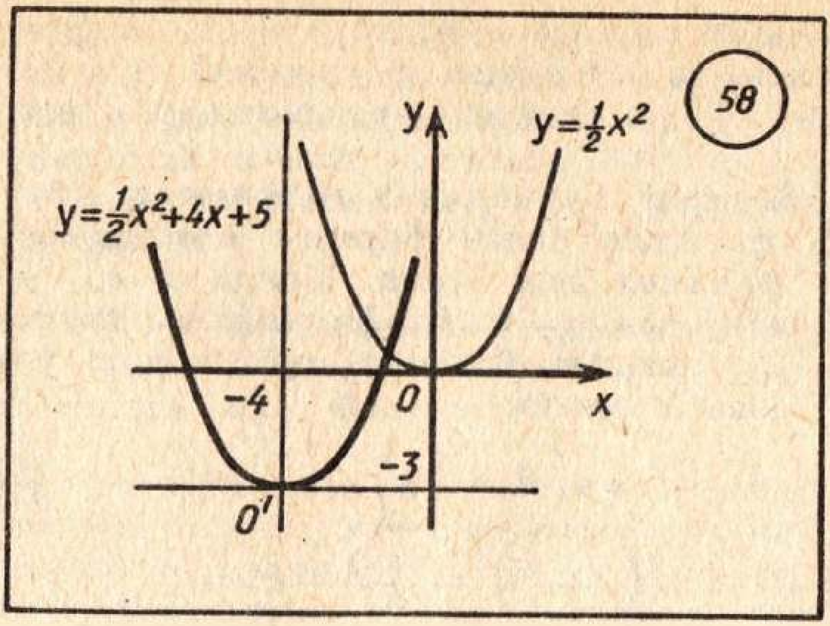
$$\left.-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Шулай итеп, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ функциясенең графигын төзү өчен, яңа $x'y'$ координаталар системасының башлангычын $O'\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ ноктасына урнаштырып, яссылыкны параллель күчерергә, һәм $x'y'$ яссылыгында $y'=a(x')^2$ функциясе графигын — парабола төзергә кирәк. $x=-\frac{b}{2a}$ турысын $y=ax^2+bx+c$ квадрат функциясе графигы булган *параболаның симметрия күчәре*, ә парабола белән аның симметрия күчәре кисешү ноктасы булган $O\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ ноктасын *параболаның түбәсе* дип атыйлар.





$a>0$ булганда, $y=ax^2+bx+c$ функциясе графигы булган парабола тармаклары өскә юнәлгән (57 нче *а* рәсем); бу очракта $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ аралыгында функция кими, $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ аралыгында үсә. $a<0$ булганда парабола тармаклары аска юнәлгән (57 нче *б* рәсем); бу очракта $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ аралыгында функция үсә һәм $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ аралыгында кими.

Мисал. $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5=\frac{1}{2}(x^2+8x)+5=$ $=\frac{1}{2}((x^2+8x+16)-16)+5=\frac{1}{2}(x+4)^2-3$. Яңа $x'y'$ координаталар системасының башлангычын $O'(-4;\ -3)$ ноктасына урнаштырып, яссылыкны параллель күчерик, һәм $x'y'$ координата яссылыгында $y'=\frac{1}{2}(x')^2$ функциясе графигын — парабола төзик. Ул $y=\frac{1}{2}x^2+4x+5$ функциясенең графигы була да инде (58 нче рәсем).

114. Квадрат функция графигын төзү ысуллары. $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ функциясенең графигы парабола була (113 нче пунктны кара). Аны төзү өчен практикада 3 төрле ысул кулланыла.

Беренче ысул. $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$ *формулаларыннан парабола түбәсе координаталарын табу.*

1 нче мисал. $y=2x^2-4x+1$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Монда $a=2$, $b=-4$, $c=1$. Димәк, $x_0=-\frac{b}{2a}=1$; $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a^2}=-1$. Димәк, $(1;\ -1)$ — парабола түбәсе. Графикны төзү өчен тагын берничә ноктаның координаталарын белергә кирәк:

x	0	2	3
y	1	1	7

Парабола түбәсен, табылган нокталарны һәм парабола күчәренә карата аларга симметрик нокталарын билгеләп, кирәкле графикны төзибез. Парабола түбәсе координаталары формуласын истә тотуның кирәге юк. x — парабола түбәсенең абсциссасы булса, бу ноктада $y'(x_0)=0$ була (217 нче пунктны кара). $(ax^2+bx+c)'=0$ ягъни $2ax+b=0$ тигезләмәсеннән парабола түбәсенең абсциссасы $x=-\frac{b}{2a}$ икәне килеп чыга.

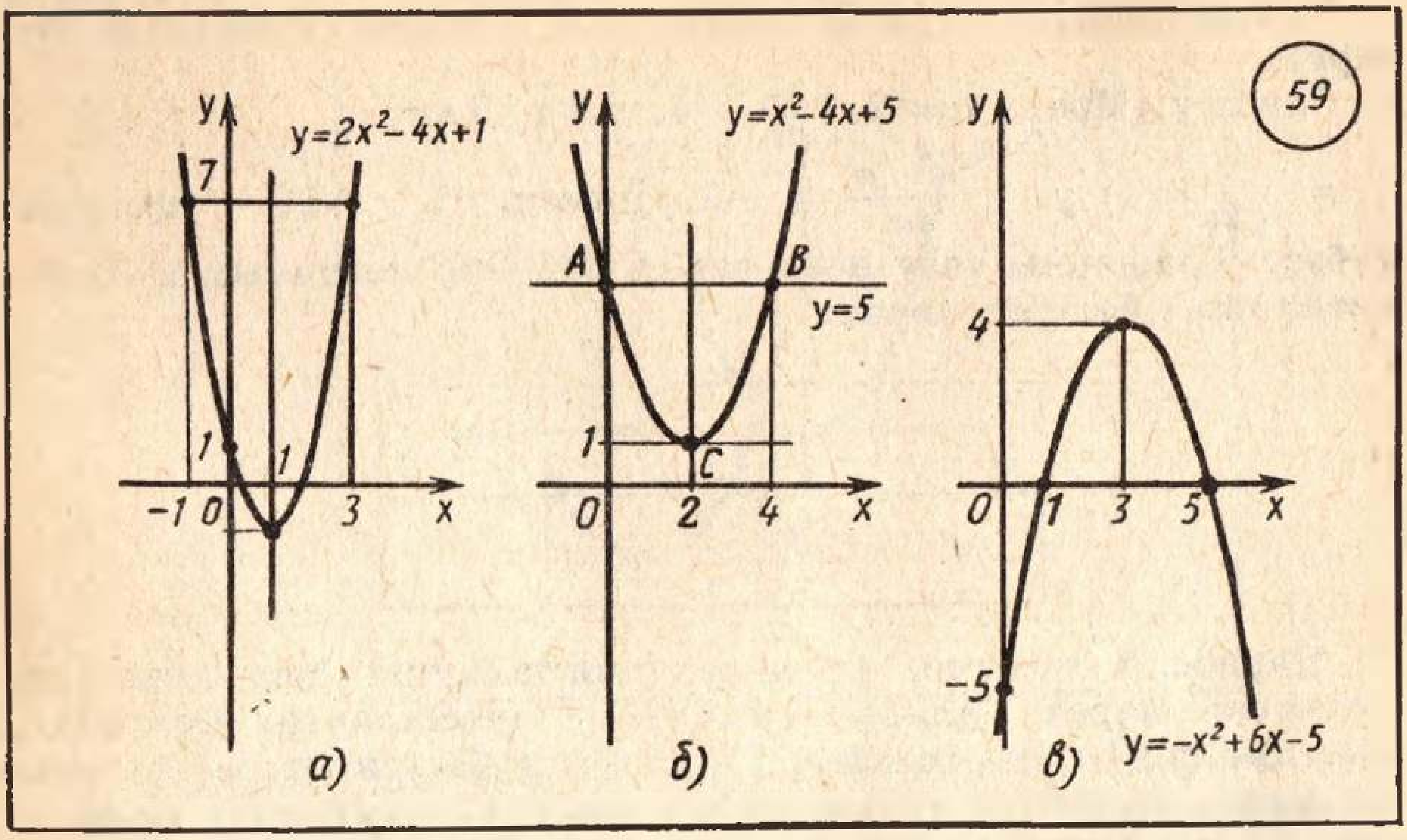
Икенче ысул. Параболаны *ординатасы* ax^2+bx+c *квадрат өчбуынының ирекле буынына тигез нокталар аша төзү.*

2 нче мисал. $y=x^2-4x+5$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. Ординаталары квадрат өчбуынның ирекле буынына, ягъни 5 кә тигез булган нокталарны табыйк. Аның өчен $x^2-4x+5=0$ тигезләмәсен чишәбез:

$$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0,\ \text{монннан}\ x_1=0;\ x_2=4.$$

Шулай итеп, графикның $A(0;\ 5)$ һәм $B(4;\ 5)$ нокталарын таптык. Аларны координата яссылыгында билгелик (59 нчы *б* рәсем). Графикның парабола икәнен беләбез. A һәм B нокталары бу парабола өстендә яталар һәм ординаталары тигез. Димәк, A һәм B нокталары параболаның симметрия күчәренә карата симметрияле һәм шуңа күрә параболаның симметрия күчәре AB кисемтәсенә перпендикуляр һәм аның уртасы аша үтә. A ноктасының абсциссасы 0, ә B ноктасының абсциссасы 4 булганлыктан, парабола күчәренең тигезләмәсе $x=2$ була. $x=2$ кыйммәтен $y=x^2-4x+5$ формуласына куеп исәпләсәк, $y=4-8+5=1$ икәнен табабыз. Димәк, параболаның симметрия күчәрендә ятучы бердәнбер ноктаның — c түбәсенең координаталары $x=2$, $y=1$. Координата яссылыгында $C(2;\ 1)$ ноктасын билгеләп, A, B, C нокталары аша үтүче параболаны төзибез. Бу инде $y=x^2-4x+5$ функциясенең графигы булыр



(59 нчы *б* рәсем). (Төгәлрәк төзү өчен тагын берничә ноктаның координаталарын табарга мөмкин.)

Өченче ысул.— *параболаны квадрат өчбуын тамырлары буенча төзү.*

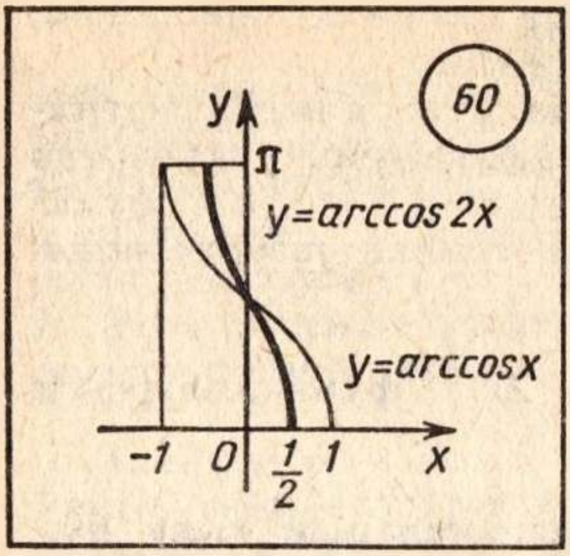
x_1 һәм x_2 — ax^2+bx+c квадрат өчбуыны тамырлары булсын ($ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсен чишү турында 137 нче пункттан кара). Ул чакта $y=ax^2+bx+c$ функциясе графигы булган парабола абсцисса күчәрен $A(x_1, 0)$ һәм $B(x_2; 0)$ нокталарында кисә, ә параболаның симметрия күчәре, AB кисемтәсенә перпендикуляр булып, аның уртасыннан үтә. Парабола түбәсе C ның x_0 абсциссасын (C ноктасы параболаның симметрия күчәрендә ята, шуңа күрә $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$) белеп, $y=ax^2+bx+c$ формуласыннан аның ординатасын табабыз, ә соңыннан A, B, C нокталары буенча графикны төзибез.

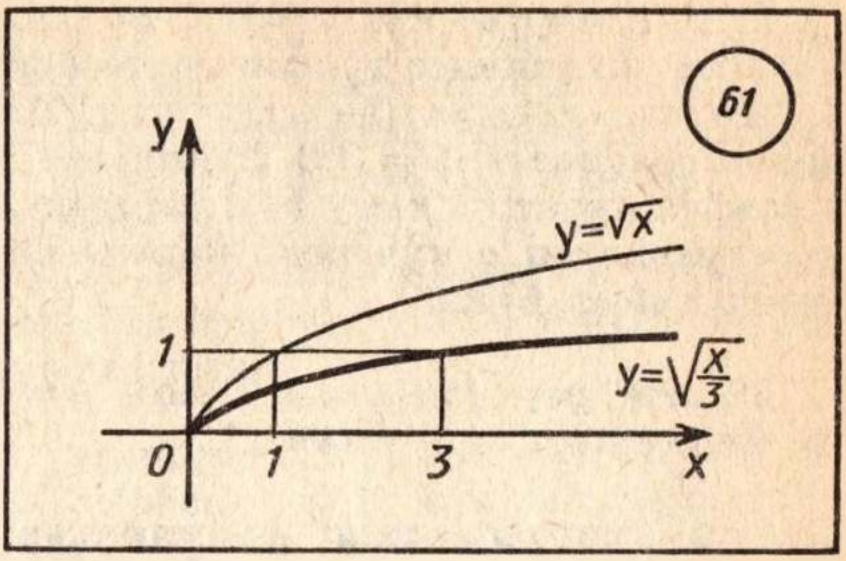
3 нче мисал. $y=-x^2+6x-5$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. $-x^2+6x-5=0$ тигезләмәсеннән $x_1=1$ һәм $x_2=5$ не табабыз. $x=3$ — параболаның симметрия күчәре тигезләмәсе. $y=-x^2+6x-5$ формуласына x урынына 3 кыйммәтен куеп, $y=4$ икәнен табабыз. Димәк, парабола түбәсе $C(3; 4)$ ноктасы була. Өч нокта A, B һәм C буенча параболаны — $y=-x^2+6x-5$ функциясенең графигын төзибез.

115. $y=f(kx)$ функциясе графигын төзү. Берничә мәсьәлә чишик.

1 нче мәсьәлә. $y=f(x)$ функциясе графигы бирелгәндә $y=f(kx)$ функциясе графигын төзергә ($k>0$, $k\neq1$).





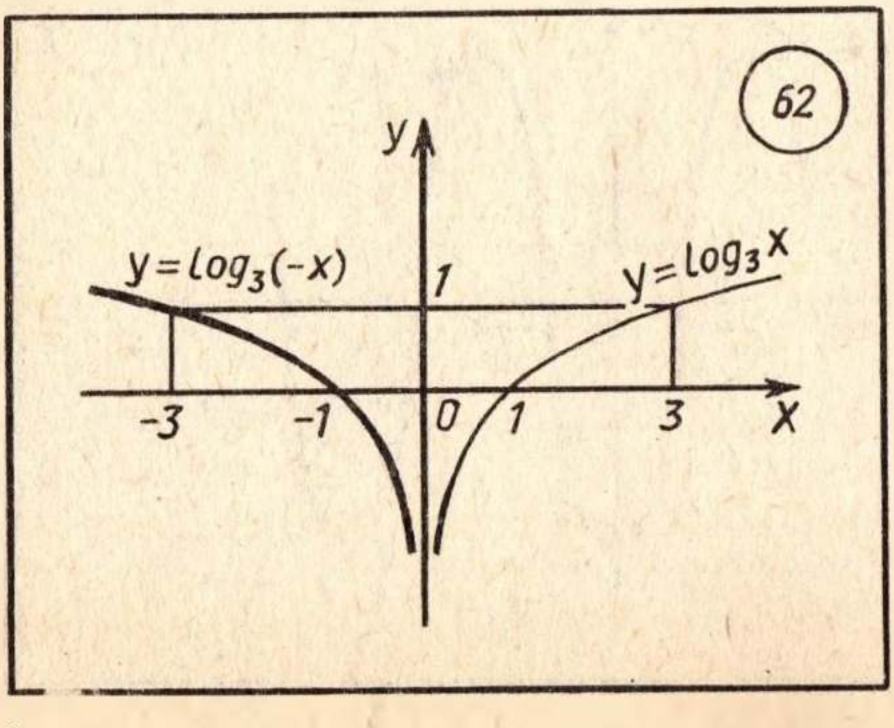
Чишү. x ноктасында $y=f(kx)$ функциясе графигының ординатасы kx ноктасында $y=f(x)$ функциясе графигы ординатасына тигез. Димәк, $y=f(kx)$ функциясе графигы $y=f(x)$ функциясе графигыннан y күчәренә k коэффициентлы кысу ($0<k<1$ булганда, y күчәреннән k коэффициентлы сузу) юлы белән табыла.

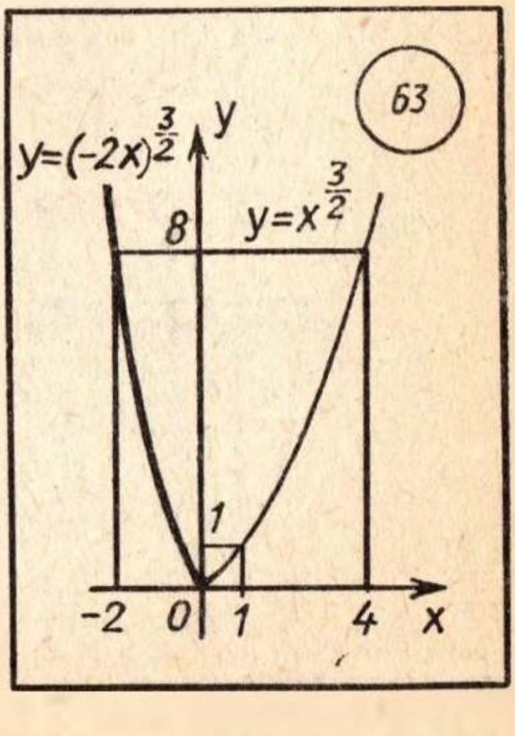
60 нчы рәсемдә $y=\arccos x$ һәм $y=\arccos 2x$ функцияләренең графиклары, 61 нче рәсемдә $y=\sqrt{x}$ һәм $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

2 нче мәсьәлә. $y=f(x)$ функциясенең графигы бирелгәндә $y=f(-x)$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. x ноктасында $y=f(-x)$ функциясе графигы ординатасы $y=f(x)$ функция графигының $-x$ ноктасындагы ординатасына тигез. Бу $y=f(-x)$ функциясе графигын $y=f(x)$ функциясе графигыннан соңгысын y күчәренә карата симметрияле үзгәртеп табарга мөмкин булуны аңлата.

62 нче рәсемдә $y=\log_3 x$ һәм $y=\log_3(-x)$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.





3 нче мәсьәлә. $y=f(x)$ функциясе графигы бирелгәндә, $y=f(kx)$ функциясе графигын төзергә ($k<0$).

Чишү. $f(kx)=f(-|k|x)$ була. Шуңа күрә $y=f(kx)$ функциясе графигын $y=f(x)$ функциясе графигыннан y күчәренә k коэффициентлы кысу һәм барлыкка килгән $y=f(|k|x)$ функция графигын y күчәренә карата симметрияле үзгәртү ярдәмендә табып була.

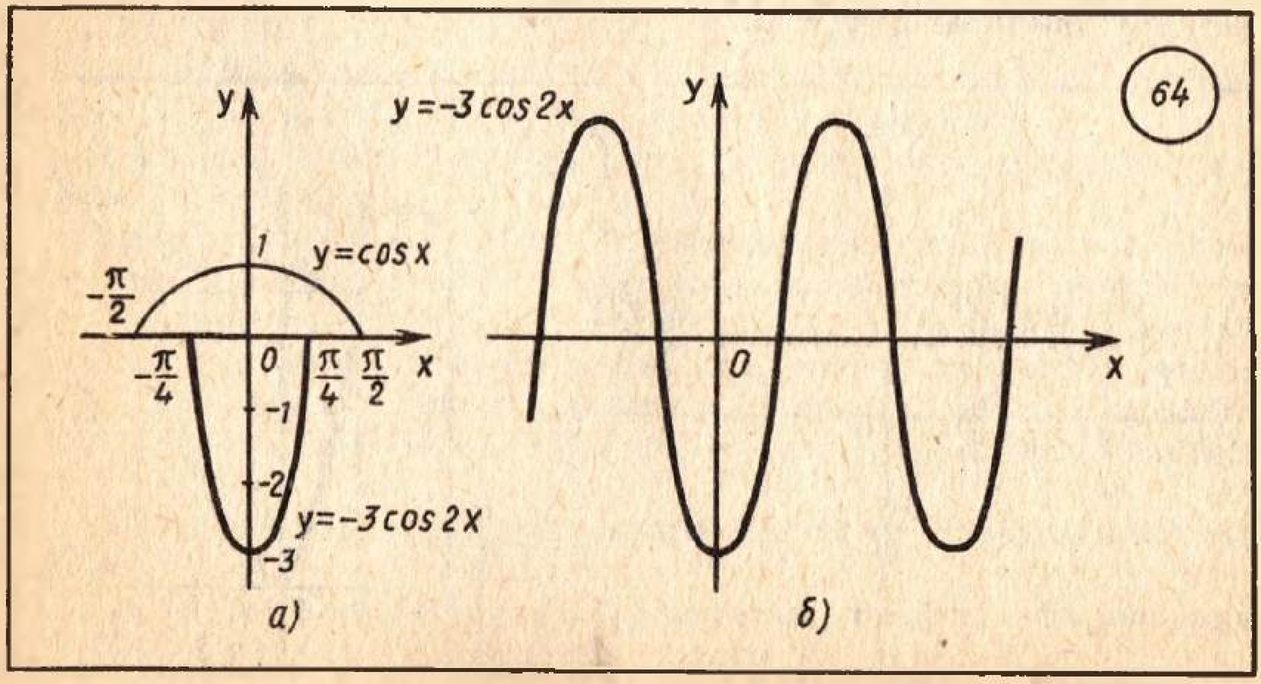
63 нче рәсемдә $y=x^{\frac{3}{2}}$ һәм $y=(-2x)^{\frac{3}{2}}$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

116. Тригонометрик функцияләр графикларын кысу һәм сузу. Сүз $y=m\sin kx$, $y=m\cos kx$, $y=m\operatorname{tg} kx$, $y=m\operatorname{ctg} kx$ рәвешендәге функцияләрнең графикларын төзү турында барыр.

Гомумән, $y=m\sin kx$ функциясе графигын төзү өч этапта башкарыла: 1) $y=\sin x$ функциясе графигын төзиләр (102 нче пункт); 2) $y=\sin kx$ функциясе графигын төзиләр (115 нче пункт); 3) $y=m\sin kx$ функциясе графигын төзиләр (110 нчы пункт). Калган тригонометрик функцияләр белән дә эш шулай тора.

Практикада гадәттә $y=m\sin kx$ ($y=m\cos kx$) функциясе графигын төзегәндә $y=\sin x$ ($y=\cos x$) функциясе графигының бер ярымдулкыны өчен сузу һәм кысуны башкаралар, ә соңыннан графикны тулаем төзиләр. $y=m\operatorname{tg} kx$ ($y=m\operatorname{ctg} kx$) функциясе графигын төзегәндә $y=\operatorname{tg} x$ ($y=\operatorname{ctg} x$) функциясе графигының бер тармагы өчен сузу һәм кысуны башкаралар, ә соңыннан графикны тулаем төзиләр.

Мисал. $y=-3\cos 2x$ функциясе графигын төзергә.



64

а) б)

Чишү. $y = \cos x$ функциясе графигының бер ярымдулкынын төзик. Аны y күчәренә таба 2 коэффициентлы кысуны башкарып, $y = \cos 2x$ функциясе графигын табарбыз. Хәзер табылган графикны x күчәреннән 3 коэффициентлы сузу, ә соңыннан x күчәренә карата симметрияле үзгәртү башкарыйк. Нәтиҗәдә $y = -3 \cos 2x$ функциясе графигын табарбыз. 64 нче *а* рәсемдә графикның бер ярымдулкыны, ә 64 нче *б* рәсемдә — тулаем график күрсәтелгән.

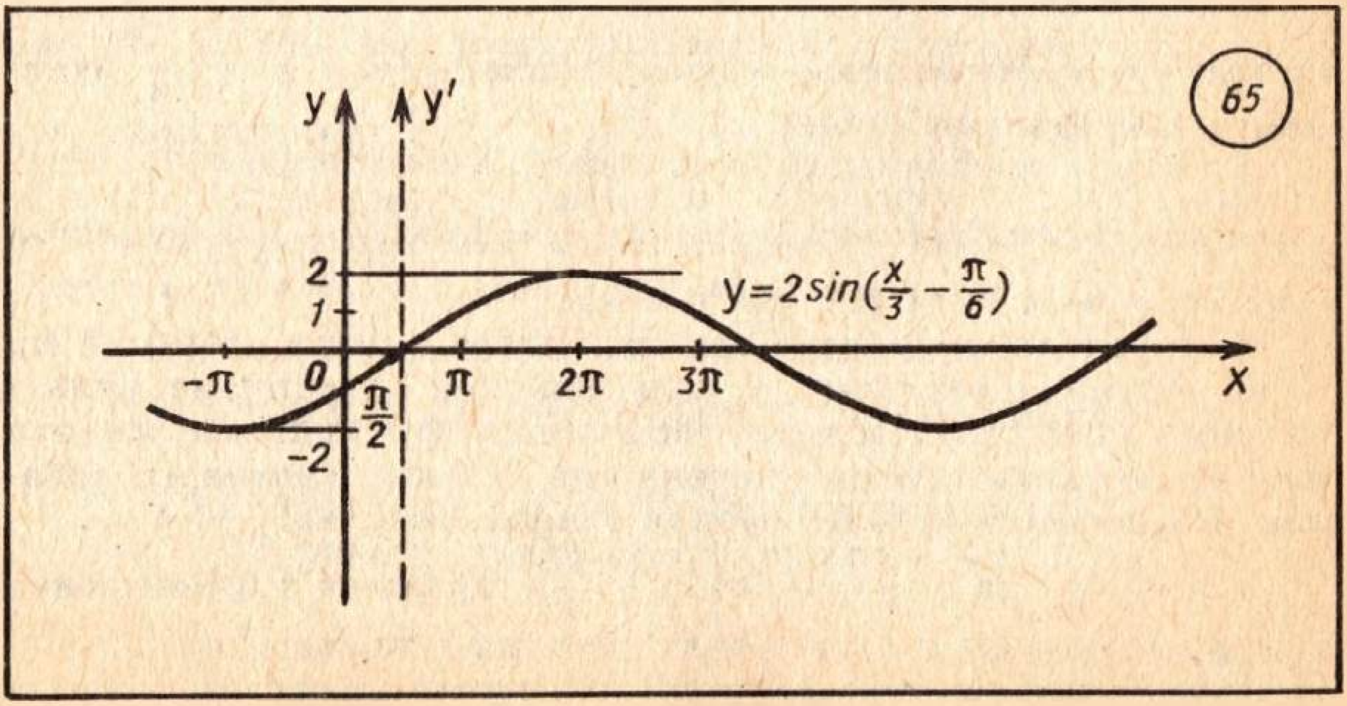
117. $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ **гармоник тирбәнешенең графигы.** Тригонометрик функцияләр тирбәнү процессларын тасвирлау өчен кулланылалар. Мондый бик тә мөһим процессларның берсе

$$y = A \sin(\omega x + \alpha) \tag{1}$$

формуласы белән аңлатыла.

Бу формула *гармоник* яки *синусоидаль тирбәнеш* формуласы дип атала. A зурлыгын *тирбәнеш амплитудасы* диләр, ул тирбәнү киңлеген (колачын) аңлата. ω зурлыгы *тирбәнү ешлыгы* дип атала. ω зур булган саен, вакыт берәмлегендәге тирбәнешләр саны шулкадәр зур була (вакыт берәмлегендәге тирбәнешләр саны $\frac{\omega}{2\pi}$ гә тигез). Ниһаять, α — *тирбәнешнең башлангыч фазасы* дип атала.

Әгәр, мәсәлән, пружинага асылган йөкне тигезләнеш торышыннан чыгарсак, ул вертикаль тирбәнешләр ясый башлар. Бу хәрәкәт законы (1) формуласы белән күрсәтелә, y — йөкнең тигезләнеш торышыннан тайпылышы, ә x — вакыт. Алмаш электр тогы теориясендә дә шул ук закон очрый. Электр тогын үткәрүче материалдан ясалган турыпочмаклы рамканы маг-



65

нит кырында әйләндергәндә, аның буенча электр тогы үтә. Әгәр рамка тигез әйләнсә, ток зурлыгы гармоник тирбәнеш законы (1) буенча үзгәрә.

$y=A\sin(\omega x+\alpha)$ функциясе графигын төзик. Элек функцияне $y=A\sin\left(\omega\left(x+\frac{\alpha}{\omega}\right)\right)$ рәвешенә үзгәртәбез. Бу функция графигын төзүне берничә этапта башкарырбыз.

1) Координаталар системасын башлангычы $O'\left(-\frac{\alpha}{\omega};\ 0\right)$ ноктасында булган яңа $x'y'$ координата системасына параллель күчерәбез.

2) $x'y'$ системасында $y'=\sin x'$ функциясенең графигын төзибез (бер ярымдулкын белән дә чикләнергә мөмкин).

3) Төзелгән графикны y' күчәренә таба ω коэффициентлы кысуны башкарып, $y'=\sin\omega x$ графигын табабыз.

4) соңгы графикны x' күчәреннән A коэффициентлы сузуны башкарып, тиешле графикны табабыз.

1 нче мисал. $y=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ функциясе графигын төзергә.

Чишү. $y=2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ рәвешендә языйк. График төзүне берничә этапта башкарырбыз.

1) Яңа системаның башлангычын $O'\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ ноктасы дип алып, параллель күчерәбез.

$x'y'$ системасында $y'=2\sin\frac{1}{3}x'$ функциясе графигын төзергә кирәк.

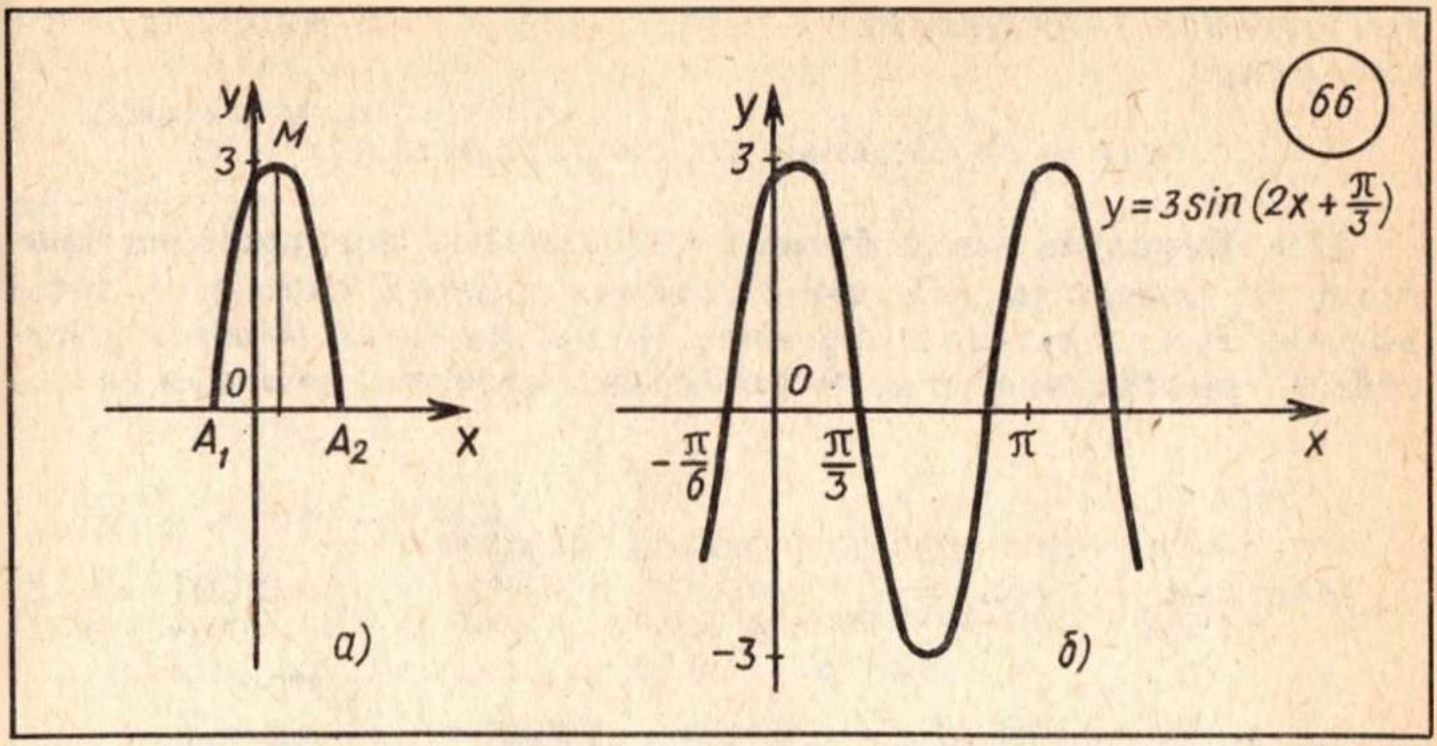
2) $y'=\sin x'$ функциясе графигын төзибез.

3) Графикны y күчәренә таба $\frac{1}{3}$ коэффициентлы кысуны (ягъни 3 коэффициентлы сузуны) башкарыйк. $y'=\sin\frac{x'}{3}$ функциясе графигын табарбыз.

4) Соңгы графикны x' күчәреннән 2 коэффициентлы сузуны башкарыйк. Табылган график $y=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ функциясенең графигы була (65 нче рәсем).

Практикада кысу, сузу һәм параллель күчерү урынына еш кына башкача эшлиләр. x ның бирелгән функцияне нульгә әйләндерүче кыйммәтләрен һәм аның функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләреңә тиңдәш кыйммәтләрен табалар. Соңыннан нокталар буенча график төзиләр.

2 нче мисал. $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ гармоник тирбәнешенең графигын төзергә.



Чишү. Элек $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ тигезләмәсен чишик (154 нче пункт). $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. k параметрына ике кыйммәт: 0 һәм 1 не бирик. $k=0$ булганда, $x=-\frac{\pi}{6}$, $k=1$ булганда, $x=\frac{\pi}{3}$. Димәк, $A_1\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ һәм $A_2\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ нокталары әлеге синусоиданың бер ярымдулкыны очлары булып торалар. Аннан соң, $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$ кисемтәсенең уртасы булып, $\frac{\pi}{12}$ ноктасы тора, бу ноктада $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ функциясе 3 кә тигез булган максималь кыйммәтен ала. Димәк, $M\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ — максимум ноктасы (217 нче пункт). Координата яссылыгында $A_1\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$, $A_2\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ һәм $M\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ нокталарын билгеләп, графикның ярымдулкынын төзибез. (66 нчы *а* рәсем). Моннан соң бирелгән гармоник тирбәнешнең графигын төзибез (66 нчы *б* рәсем).

IV БҮЛЕК. ТРАНСЦЕНДЕНТ АҢЛАТМАЛАР

§ 12. Үзгәрешлесе логарифм тамгасы астында булган аңлатмаларны рәвешүзгәртү.

118. Трансцендент аңлатма төшенчәсе. Үзгәрешлесе трансцендент функция, ягъни күрсәткечле, логарифмик, тригонометрик яки кире функция тамгасы астында булган аңлатма *трансцендент* аңлатма дип атала. Трансцендент аңлатмаларга мисаллар:

$$\log_2 a + \log_2 b;\quad \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma;\quad \arcsin(x^2 - x).$$

119. Бирелгән нигез буенча уңай санның логарифмын билгеләү. *a нигезе ($a > 0$, $a \neq 1$) буенча x уңай санының логарифмы дип, x санын табу өчен, a ны ничәнче дәрәҗәгә күтәрергә кирәклеген күрсәтүче дәрәҗә күрсәткече атала.*

$$a^{\log_a x} = x$$

$\log_a x = y$ тигезлеге $a^y = x$ икәнен аңлата.

Мәсәлән, $\log_3 81 = 4$, чөнки $3^4 = 81$; $\log_{10} 0{,}001 = -3$, чөнки $10^{-3} = 0{,}001$; $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, чөнки $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Логарифм билгеләмәсеннән түбәндәге мөһим тигезлекләр килеп чыга:

$$\log_a \mathbf{1} = \mathbf{0},$$
$$\log_a \boldsymbol{a} = \mathbf{1}.$$

Беренчесе $a^0 = 1$, ә икенчесе $a^1 = a$ тигезлекләре нәтиҗәсе.

Гомумән, $\log_a a^r = r$ тигезлеге дөрес.

$\log_a x$ язылышында a саны — *логарифмның нигезе,* x — *логарифмланучы сан.*

120. Логарифмнарның үзлекләре

1^0. Әгәр $x_1 > 0$ һәм $x_2 > 0$ булса,

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

(тапкырчыгышның логарифмы тапкырлашучыларның логарифмнары суммасына тигез).

Мәсәлән, $\log_3 15 = \log_3(3\cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

2^0. Әгәр $x_1 > 0$ һәм $x_2 > 0$ булса,

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

(өлешнең логарифмы бүленүче һәм бүлүченең логарифмнары аермасына тигез).

Мәсәлән, $\log_2 1{,}25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - 2$.

Әгәр $x_1 < 0$ һәм $x_2 < 0$ булса, $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$ дип язарга ярамый, чөнки «тигезлекнең» уң ягының мәгънәсе юк (тискәре санның логарифмы юк). Монда болай фикер йөртергә мөмкин: x_1 һәм x_2 — тискәре саннар, димәк, $x_1 \cdot x_2 > 0$. Ләкин $x_1 \cdot x_2 = |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$. Димәк, $\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a |x_1| \cdot |x_2|$.

$|x_1| > 0$ һәм $|x_2| > 0$ булганлыктан, 1° үзлекне кулланып, $\log_a |x_1| \cdot |x_2| = \log_a |x_1| + \log_a (x_2|$ табабыз.

Димәк, әгәр $x_1 x_2 > 0$ булса,

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$$

һәм шулай ук:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

(Соңгы ике тигезлекнең $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ булган очракта да дөрес икәнен билгеләү кыен түгел).

3^0. $x > 0$ булганда

$$\log_a x^2 = r \log_a x \text{ була,}$$

(дәрәҗәнең логарифмы дәрәҗә күрсәткече белән дәрәҗә нигезенең логарифмы тапкырчыгышына тигез).

1 нче мисал. $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$.

2 нче мисал. $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2$.

3 нче мисал. Әгәр $\log_2 3 = a$ булса, $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ не исәпләргә.

Чишү. $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \log_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\log_2 3 - \log_2 4) = \frac{1}{3}(a - 2)$.

Түбәндәге раслау дөрес: *k — җөп сан булганда, теләсә нинди $x \neq 0$ өчен* $\log_a x^k = k \log_2 |x|$.

Мәсәлән,

$$\log_2 x^4 = 4 \log_2 |x|; \quad \log_3 x^2 = 2 \log_3 |x|.$$

121. Логарифмның яңа нигезенә күчү. Логарифмның яңа нигезгә күчәргә мөмкинлек бирүче түбәндәге ике үзлеге дөрес:

1^0. Әгәр $x > 0$ булса, ул чакта

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(яңа нигезгә күчү формуласы).

Мәсәлән:

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}; \quad \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

2^0. Әгәр $x > 0$ булса, ул чакта

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Мәсәлән, $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

1 нче мисал. Әгәр $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$ булса, $\log_5 6$ ны исәпләргә.

Чишү. $\log_5 6$ да 2 нигезенә күчик. 1° үзлектән файдаланабыз:

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3)}{\log_2 \frac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1 + a}{b - 1}.$$

2 нче мисал. $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32}$ не исәпләргә.

Чишү. 2° үзлек буенча логарифмның нигезен һәм логарифмланучы санны бер үк дәрәҗәгә күтәрергә мөмкин, шуның белән бергә аңлатманың кыйммәте үзгәрмәс:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt[3]{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 32 = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

122. Логарифмлау һәм потенцирлау. Әгәр ниндидер A аңлатмасы уңай саннардан тапкырлау, бүлү һәм дәрәҗәгә күтәрү гамәлләре ярдәмендә төзелсә, логарифмнар үзлекләрен кулланып, $\log_a A$ ны A аңлатмасына кергән саннарның логарифмнары аша күрсәтергә мөмкин. Мондый рәвешүзгәртү ***логарифмлау*** дип атала.

1 нче мисал. 5 нигезе буенча

$\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$ аңлатмасын

логарифмларга (a, b, c — уңай саннар).

Чишү. Логарифмнар үзлекләрен (120 нче пункт) кулланып, табабыз:

$$\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 (125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} = \log_5 125 + \log_5 a^3 +$$

$$+ \log_5 b^2 - \log_5 c^{\frac{1}{2}} = 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - \frac{1}{2}\log_5 c.$$

Еш кына кире мәсьәләне (логарифмы буенча аңлатманы табу мәсьәләсен) чишәргә туры килә. Мондый рәвешүзгәртү ***потенцирлау*** дип атала.

2 нче мисал. Әгәр $\log_3 x = 2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 8 - 3\log_3 10$ булса, x ны табарга.

Чишү. $\log_3 x = \log_3 25 + \log_3 8^{\frac{1}{2}} - \log_3 10^3 =$
$= \log_3 \frac{25\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{1000} = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$.

$\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ тигезлегеннән $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$ килеп чыга.

123. Унарлы логарифм. Унарлы логарифмның характеристикасы һәм мантиссасы. Нигезе 10 га тигез булган логарифм унарлы логарифм дип атала. $\log_{10} x$ дип язу урынына $\lg x$ язуы кабул ителгән. 67 нче рәсемдә $y = 10^x$ һәм $y = \lg x$ функцияләренең графиклары күрсәтелгән.

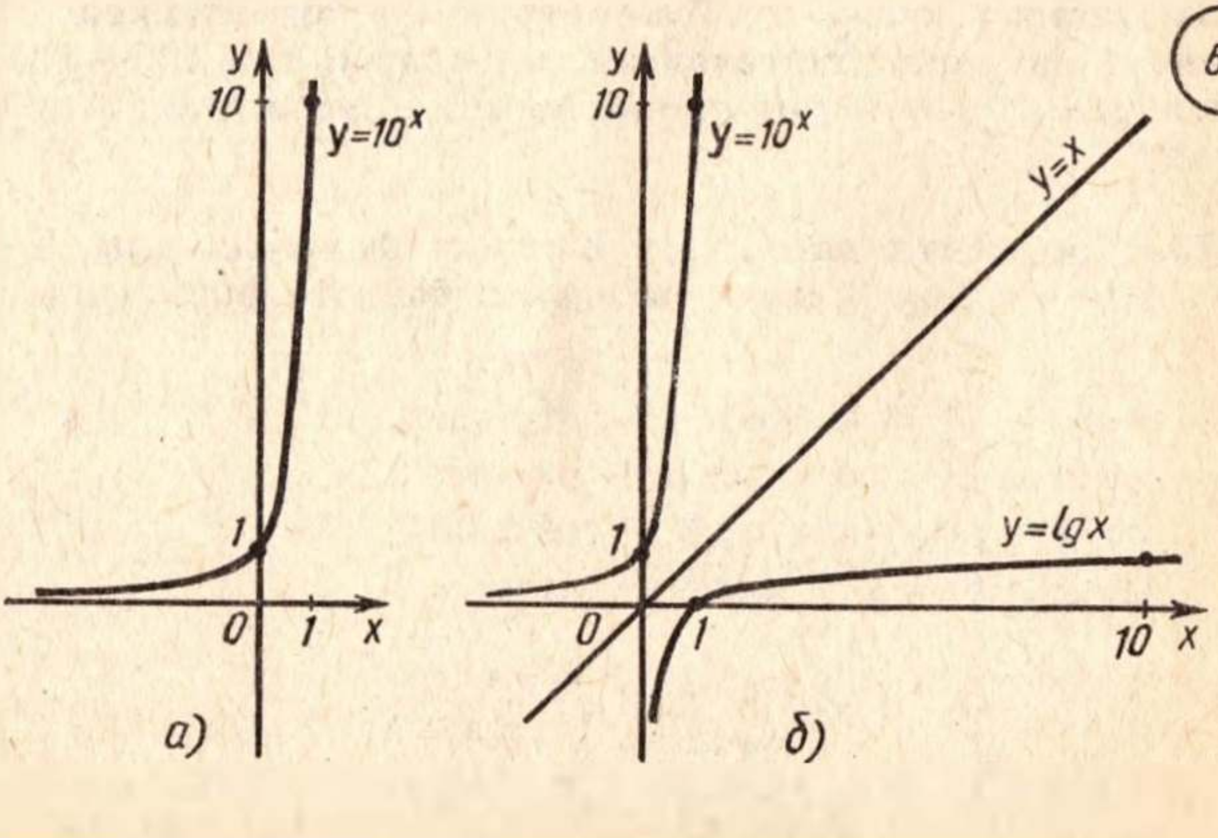
Унарлы логарифмнар өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес.

$$10^{\lg a} = a,$$

$$\begin{array}{ll} \lg 1 = 0, & \lg 0{,}1 = -1, \\ \lg 10 = 1, & \lg 0{,}01 = -2, \\ \lg 100 = 2, & \lg 0{,}001 = -3, \\ \lg 1000 = 3, & \lg 0{,}0001 = -4, \end{array}$$

$$\lg 10^n = n.$$

Уңай a саны стандарт рәвештә күрсәтелгән булсын (34 нче пункт): $a = a_1 \cdot 10^n$, биредә $1 \leqslant a_1 < 10$, $n \in Z$ (n — a санының тәртибе). Логарифм үзлекләрен кулланып, a санын 10 нигезе буенча логарифмлыйк (120 нче пункт).



67

$\lg a = \lg(a_1 \cdot 10^n) = \lg a_1 + \lg 10^n = \lg a_1 + n$. **Димәк,**

$$\lg a = \lg a_1 + n. \tag{1}$$

$1 \leqslant a_1 < 10$ булганлыктан, $\lg 1 \leqslant \lg a_1 < \lg 10$ була, ягъни $0 \leqslant \lg a_1 < 1$. Шуңа күрә, (1) тигезлегеннән n — $\lg a$ дан зур булмаган иң зур бөтен сан, икенче төрле әйткәндә, n — $\lg a$ санының бөтен өлеше булып чыга, ягъни $n = [\lg a]$ (31 нче пункт). $\lg a_1$ кушылучысы $\lg a$ санының вакланмалы өлеше, ягъни $\lg a_1 = \{\lg a\}$ (31 нче пункт) була. $\lg a$ санының бөтен өлеше, ягъни a санының тәртибе, $\lg a$ ның *характеристикасы*, ә $\lg a$ санының вакланмалы өлеше — аның *мантиссасы* дип атала.

Түбәндәге раслау дөрес: *$a > 0$ санын 10^k нә тапкырлаганнан соң, (k — бөтен сан) логарифмның мантиссасы үзгәрми,* икенче төрле әйткәндә; $\lg a$ һәм $\lg(a \cdot 10^k)$ саннарының мантиссалары тигез була.

Чыннан да, $\lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = \lg(a_1 \cdot 10) + k = \lg a_1 + n + k$.

$\lg(a \cdot 10^k)$ **санының мантиссасы** $\lg a_1$ **була, ягъни** $\lg a$ **ның мантиссасына тигез.**

§ 13. Тригонометрик формулалар һәм аларны тригонометрик аңлатмаларның рәвешен үзгәртүдә куллану.

124. Тригонометрик аңлатмалар. Үзгәрешлесе тригонометрик функция тамгасы астында булган аңлатмалар тригонометрик аңлатмалар дип аталалар. Тригонометрик аңлатмаларны үзгәртү өчен, тригонометрик функцияләрнең 100—105 нче пунктларда билгеләнгән үзлекләрен һәм 125—131 нче пунктларда күрсәтелгән тригонометрия формулаларын кулланалар.

125. Аргументларны кушу һәм алу формулалары. Теләсә нинди реаль α һәм β саннары өчен түбәндәге формулалар дөрес:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{3}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{6}$$

(5) формула α, β, $\alpha+\beta$ ның $\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ кыйммәтләреннән тыш кыйммәтләре өчен дөрес. (6) формула α, β, $\alpha-\beta$ ның $\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ кыйммәтләреннән тыш кыйммәтләре өчен дөрес.

1 нче мисал. $\sin 75^\circ$ ны исәпләргә.

Чишү. $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$. (3) формуланы кулланып, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$ өчен язабыз:

$$\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ.$$

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$; $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ икәне билгеле (98 нче пункт). Димәк, $\sin(30^\circ+45^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Димәк, $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

2 нче мисал. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ һәм $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ өчен (3) һәм (1) формулаларын кулланып һәм $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ икәнен исәпкә алып, табабыз:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

3 нче мисал. $\cos 15^\circ$ ны исәпләргә.

Чишү. $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ дип алабыз. $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$ булганда (2) формуланы кулланып, табабыз:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

4 нче мисал. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ булганда, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ны табарга.

Чишү. (5) формуланы кулланып һәм $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ икәнен исәпкә алып, табабыз:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7.$$

126. Китерү формулалары. Аргументы $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in Z$ рәвешендәге функциянең кыйммәтен аргументы α булган функциягә китерүче формулаларны гадәттә *китерү формулалары* дип атыйлар.

Мәсәлән, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ны исәпләргә кирәк булсын.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha =$$
$$= \cos \alpha.$$

Тиңдәшле рәвештә табабыз: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha -$
$- \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha.$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{3\pi}{2} \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha -$$
$$-(-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Калган китерү формулалары да шушы рәвешчә чыгарылалар, бу формулалар түбәндәге таблицада сурәтләнгән:

Функция	t аргументы						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

127. Бер үк аргументның тригонометрик функцияләре арасындагы бәйләнешләр. 125 нче пункттагы (2) формулада $\alpha=\beta=t$ дип алып исәплибез:

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1, \tag{1}$$

үз чиратында бу формуладан табабыз:

$$1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}, \tag{2}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}. \tag{3}$$

(2) бердәйлеге $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ булганда, ә (3) бердәйлеге $t\neq\pi n,\ n\in Z$ булганда дөрес.

(1), (2), (3) тигезлекләре бер үк аргументның төрле тригонометрик функцияләрен үзара бәйлиләр. Бер үк аргументның төрле тригонометрик функцияләрен үзара бәйләүче тагын ике тигезлек бар:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t},\ \operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Бу тигезлекләрне тапкырлап, $t\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$ өчен дөрес булган тигезлек табабыз:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{4}$$

1 нче мисал. $\sin t=-\frac{3}{5}$ һәм $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$ булуы билгеле. $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ ны табарга.

Чишү. (1) формуладан $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ ны табабыз. $\sin t$ урынына аның кыйммәтен куеп, исәплибез:

$$\cos^2 t=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}.$$

Шулай итеп, $\cos^2 t=\frac{16}{25}$, димәк, $\cos t=\frac{4}{5}$ яки $\cos t=-\frac{4}{5}$.

$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$ шарты буенча t аргументы III чиректә урнашкан, ә III чиректә косинус тискәре, димәк, югарыда күрсәтелгән ике мөмкинлекнең берсен сайлыйбыз: $\cos t=-\frac{4}{5}$.

$\sin t$ һәм $\cos t$ ны белеп, $\operatorname{tg} t$ һәм $\operatorname{ctg} t$ ны табабыз:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4},\ \operatorname{ctg} t=\frac{4}{3}.$$

Шулай итеп, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

2 нче мисал. $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$ һәм $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ икәне билгеле. $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ ны табарга.

Чишү. (3) формуладан $\sin^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$ ны табабыз. $\operatorname{ctg} t$ урынына аның кыйммәтен куеп исәплибез.

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

Шулай итеп, $\sin^2 t = \frac{144}{169}$. Димәк, $\sin t = \frac{12}{13}$ яки $\sin t = -\frac{12}{13}$. Шарт буенча $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Димәк, t II чиректә урнашкан, ә II чиректә синус уңай. Шуңа күрә күрсәтелгән ике мөмкинлекнең берсен сайлыйбыз: $\sin t = \frac{12}{13}$.

$\cos t$ ның кыйммәтен табу өчен, котангенс билгеләмәсеннән файдаланыйк. Бу тигезлектән табабыз:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$

$\operatorname{tg} t$ кыйммәтен исәплисе калды. $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}$ тигезлегеннән $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$ табабыз.

Димәк,

$$\sin t = \frac{12}{13}, \quad \cos t = -\frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}.$$

128. Икеләтелгән почмак формулалары. 125 нче пункттагы (3), (1), (5) формулаларында $\alpha = t$, $\beta = t$ дип алсак, түбәндәге бердәйлекләрне табарбыз:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \qquad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \qquad (3)$$

(1), (2) һәм (3) формулалары ярдәмендә теләсә нинди аргументның синусын, косинусын һәм тангенсын аргументы ике мәртәбә кечкенә булган тригонометрик функцияләр аша күрсәтергә мөмкин. Мәсәлән, түбәндәге тигезлекләр дөрес:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 5x = 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

Кайбер очракларда табылган формулаларны «уңнан сулга» куллану, ягъни $2\sin t\cdot\cos t$ аңлатмасын $\sin 2t$ аңлатмасы (яки $\sin t\cos t$ аңлатмасын $\frac{\sin 2t}{2}$ аңлатмасы), $\cos^2 t-\sin^2 t$ аңлатмасын $\cos 2t$ аңлатмасы һәм, ниһаять, $\frac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}^2 t}$ аңлатмасын $\mathrm{tg}\,2t$ аңлатмасы белән алыштыру файдалы була.

Мисал. $\mathrm{tg}\,t-\mathrm{ctg}\,t$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. $\mathrm{tg}\,t-\mathrm{ctg}\,t=\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin t\cos t}=$

$$=-\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t}=-2\frac{\cos 2t}{\sin 2t}=-2\,\mathrm{ctg}\,2t.$$

129. Дәрәҗәне төшерү формулалары. $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ (127 нче пункт), ә $\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$ (128 нче пункт) формулаларыннан табабыз:

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}. \qquad (1)$$

Тиңдәшле рәвештә табабыз:

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) формулалары *дәрәҗәне төшерү формулалары* дип аталалар. Алар $\sin^2 t$ һәм $\cos^2 t$ ны икеләтелгән аргумент косинусының беренче дәрәҗәсен эченә алган аңлатмага үзгәртергә мөмкинлек бирәләр. Мәсәлән, (1) һәм (2) формулаларын кулланып, түбәндәге тигезлекләрне таба алабыз:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)}{2}.$$

Формулалар $1+\cos 2t$, $1-\cos 2t$ суммаларын тапкырчылышка әйләндерү өчен «уңнан сулга» да кулланылалар. Мәсәлән, түбәндәге тигезлекләр дөрес: $1+\cos 5x=2\cos^2\frac{5x}{2}$,

$$1-\cos(\alpha+\beta)=2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

1 нче мисал. $\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}$ бердәйлеген исбатларга.

Чишү. Уң кисәгенең ваклаучысын (1) формуласы, ә санаучысын — икеләтелгән почмак синусы формуласы буенча үзгәртик (128 нче пункт):

$$\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

2 нче мисал. $\cos 2x=\frac{5}{13}$ булганда $\sin^4 x+\cos^4 x$ ны исәпләргә.

Чишү. $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$ һәм $\cos^4 x=(\cos^2 x)^2$ булуыннан файдаланып, дәрәҗәне төшерү формулаларын кулланыйк:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=$$

$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=$$

$$=\frac{1+\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\frac{25}{169}}{2}=\frac{97}{169}.$$

130. Тригонометрик функцияләр суммасын тапкырчыгышка үзгәртү. Түбәндәге формулаларны күрсәтү урынлы:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

1 нче мисал. $\cos 48°-\cos 12°$ ны тапкырчыгышка үзгәртергә.

Чишү. $\alpha=48°$, $\beta=12°$ булганда косинуслар аермасы формуласын кулланып, табабыз:

$$\cos 48°-\cos 12°=-2\sin\frac{48°+12°}{2}\sin\frac{48°-12°}{2}=$$

$$=-2\sin 30°\cdot\sin 18°.$$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ булганлыктан, соңгы нәтиҗә түбәндәгечә булыр:

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = \sin 18^\circ.$$

2 нче мисал. $\sin x + \cos 2x - \sin 3x$ аңлатмасын тапкырчыгышка үзгәртергә.

Чишү. $\sin 2x + \cos 2x - \sin 3x = \cos 2x -$
$- (\sin 3x - \sin x) = \cos 2x - 2 \sin x \cos 2x =$

$$= 2 \cos 2x\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 2 \cos 2x\left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin x\right) = 2 \cos 2x \times$$

$$\times 2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x}{2} = 4 \cos 2x \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right).$$

131. Тригонометрик функцияләр тапкырчыгышын суммага үзгәртү. Түбәндәге формулалар дөрес:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}, \qquad (3)$$

Мисал. $\sin 43^\circ \cos 19^\circ$ тапкырчыгышын суммага үзгәртергә.

Чишү. $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 19^\circ$ булганда (1) формуланы кулланып табабыз:

$$\sin 43^\circ \cos 19^\circ = \frac{\sin(43^\circ - 19^\circ) + \sin(43^\circ + 19^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 24^\circ + \sin 62^\circ).$$

132. $a \cos t + b \sin t$ **аңлатмасын** $A \sin(t + \alpha)$ **рәвешенә үзгәртү.** $a \cos t + b \sin t$ рәвешендәге теләсә нинди аңлатманы $A \sin(t + \alpha)$ рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Аның өчен $\sqrt{a^2 + b^2}$ аңлатмасын җәя тышына чыгарабыз.

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t\right).$$

Ләкин $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$. Бу $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ һәм $\frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ координаталы нокталың берәмлек әйләнәсендә ятуын аңлата, шуңа күрә $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ булырлык α почмагы бар.

Кыскалык өчен $\sqrt{a^2+b^2}$ ны A аша билгелик:

$$a\cos t+b\sin t=A(\sin\alpha\cos t+\cos\alpha\sin t).$$

Җәяләр эчендәге аңлатмага 125 нче пункттагы (3) формуласын кулланып, табабыз: $a\cos t+b\sin t=A\sin(t+\alpha)$. a, b, A, α саннар үзара түбәндәге бәйләнештә:

$$a=A\sin\alpha,\ b=A\cos\alpha,\ A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Мәсәлән, $3\sin 2t+4\cos 2t=5\cos(2t+\alpha)$, биредә $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

133*. Кире тригонометрик функцияләрне эченә алган аңлатмаларны рәвешүзгәртүгә мисаллар.

1 нче мисал. $\cos(\arcsin x)$ аңлатмасын гадиләштерергә, монда $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Чишү. $\arcsin x=y$ дип уйлыйк. Ул чагында $\sin y=x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y<\frac{\pi}{2}$.

$\cos y$ ны табарга кирәк.

$\cos^2 y=1-\sin^2 y$ икәне билгеле, димәк, $\cos^2 y=1-x^2$, ләкин $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, ә $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ кисемтәсендә косинус тискәре булмаган кыйммәтләр генә ала. Шуңа күрә, $\cos y=\sqrt{1-x^2}$, ягъни $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

2 нче мисал. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ не исәпләргә.

Чишү. $\alpha=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ дип уйлыйк. Ул чакта $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ны исәпләргә кирәк.

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, димәк, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5}\cdot 1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ булганлыктан, $1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=5$, моннан $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=4$, ягъни $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$ яки $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$ була.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ шарты буенча, $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ була, ә $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$. Шулай итеп, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$, ягъни $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=2.$

3 нче мисал. $[-1;\ 1]$ арасындагы теләсә нинди x өчен

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x \qquad (1)$$

бердәйлегенең дөреслеген исбатларга.

Чишү. Тикшерелә торган тигезлекнең уң һәм сул кисәкләренең синусы кыйммәтен исәплик.

$$\sin(\arcsin x)=x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

Күргәнебезчә, синуслары тигез, шуңа күрә (1) тигезлекнең дөреслеген исбатлау өчен, $\arcsin x$ һәм $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ ның $y=\sin x$ функциясе белән бер үк монотонлык аралыгында булуын күрсәтәсе кала (бу шартны тикшерми торып, ялгыш нәтиҗә алуыбыз мөмкин, чөнки тригонометрик функцияләр аргументның төрле кыйммәтләре өчен дә бер үк кыйммәтләр ала алалар, мәсәлән, $\frac{\pi}{6}\neq\frac{5\pi}{6}$, ләкин $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\Big)$.

$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$, шулай ук $0\leqslant\arccos x<\pi$, шунлыктан, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x<\frac{\pi}{2}$. Димәк, $\arcsin x$ һәм $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ $y=\sin x$ функциясенең бер үк $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ монотонлык аралыгында яталар. Хәзер инде (1) бердәйлеге исбатланды дип әйтеп була.

Шушы ук юл белән

$$\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} x$$

бердәйлеген исбатлап була.

V БҮЛЕК. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР ҺӘМ ТИГЕЗЛӘМӘЛӘР СИСТЕМАЛАРЫ

§ 14. Бер үзгәрешлеле тигезләмәләр

134. Тигезләмәнең билгеләмәсе. Тигезләмәнең тамырлары. Үзгәрешлеле $f(x)=g(x)$ тигезлеге бер x *үзгәрешлеле тигезләмә* дип атала. Үзгәрешленең $f(x)$ һәм $g(x)$ аңлатмаларының санлы кыйммәтләрен тигез итә торган һәр кыйммәте *тигезләмәнең тамыры* дип атала. Тигезләмәне чишү — аның барлык тамырларын табу яки аларның юклыгын исбатлау дигән сүз.

1 нче мисал. $3+x=7$ тигезләмәсенең бердәнбер тамыры бар, ул 4 кә тигез, чөнки x ның бары тик шул кыйммәте өчен генә $3+x=7$ — дөрес тигезлек.

2 нче мисал. $(x-1)(x-2)=0$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: 1 һәм 2.

3 нче мисал. $x^2+1=0$ тигезләмәсенең тамырлары юк.

Тигезләмәләрнең уйланма тамырлары турында әйтергә мөмкин икәнлекне билгеләп үтик. $x^2+1=0$ тигезләмәсенең ике уйланма тамыры бар: $x=i$, $x=-i$ (47 нче пункт). Алда фәкать *тигезләмәләрнең реаль тамырлары* турында гына сүз барыр.

135. Тигезләмәләрнең тамырдашлыгы (тигезкөчлелеге). Тамырлары бер үк булган тигезләмәләр *тамырдаш (тигезкөчле)* дип аталалар. Тамырлары булмаган тигезләмәләр дә тамырдаш саналалар.

Мәсәлән, $x+2=5$ һәм $x+5=8$ тигезләмәләре тамырдаш, чөнки һәркайсының бердәнбер тамыры бар — ул 3 саны. $x^2+1=0$ һәм $2x^2+5=0$ тигезләмәләре дә тамырдаш — аларның берсенең дә тамыры юк.

$x-5=1$ һәм $x^2=36$ тигезләмәләре тамырдаш түгел, чөнки беренчесе бер генә ($x=6$) тамырга, ә икенчесе ике: 6 һәм -6 тамырларына ия.

Тигезләмәне чишү процессында аны тагы да гадирәк, ләкин бирелгәненә тамырдаш тигезләмә белән алыштырырга тырышалар. Нинди рәвешүзгәртүләрдә бирелгән тигезләмәләрнең тамырдаш тигезләмәгә әйләнүен белү мөһим.

Т.5.1. Әгәр тигезләмәдә нинди дә булса кушылучыны, тамгасын үзгәртеп, бер кисәгеннән икенчесенә күчерсәң, бирелгән тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә килеп чыга.

Мәсәлән, $x+2=3x$ тигезләмәсе $x+2-3x=0$ тигезләмәсенә тамырдаш.

Т.5.2. Тигезләмәнең ике кисәген дә нульдән башка бер үк санга тапкырлау яки бүлүдән соң бирелгән тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә килеп чыга.

Мәсәлән, $\frac{x-1}{3}=2x$ тигезләмәсе $x-1=6x$ тигезләмәсенә тамырдаш (беренче тигезләмәнең ике кисәген дә 3 кә тапкырладык).

136. Сызыкча тигезләмәләр. $ax = b$ рәвешендәге тигезләмәне *бер* x *үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә* дип атыйлар, биредә a һәм b — реаль саннар, a — *үзгәрешле алдындагы коэффициент*, b — *иректе буын* дип атала.

$ax = b$ сызыкча тигезләмәсе өчен өч очрак булуы мөмкин:

1) $a \neq 0$, бу очракта тигезләмәнең тамыры $\frac{b}{a}$ га тигез.

2) $a = 0$, $b = 0$; бу очракта тигезләмә $0 \cdot x = 0$ рәвешен ала һәм теләсә кайсы x өчен дә дөрес, ягъни тигезләмәнең тамыры булып теләсә нинди реаль сан тора.

3) $a = 0$; $b \neq 0$; бу очракта тигезләмә $0x = b$ рәвешен ала, аның тамырлары юк.

Күп кенә тигезләмәләр рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә сызыкча тигезләмәләргә китереләләр.

1 нче мисал. $\frac{1}{5}x + \frac{2}{15} = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. 5.1 теоремасы (135 нче пункт) буенча бирелгән тигезләмә $\frac{1}{5}x = -\frac{2}{15}$ тигезләмәсенә тамырдаш. Әгәр бу тигезләмәнең һәр кисәген x янындагы коэффициентка бүлсәк, 5.2 теоремасы буенча бирелгән тигезләмәгә тамырдаш тигезләмә табабыз. $x = -\frac{2}{15} : \frac{1}{5}$, ягъни $x = -\frac{2}{3}$. Димәк, $-\frac{2}{3}$ — тигезләмә тамыры.

2 нче мисал. $\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{5x}{12} - 1$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бу тигезләмә сызыкча тигезләмәгә китерелә. Тигезләмәнең ике кисәген дә 12 гә (3, 4, 6, 12 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы) тапкырлап, табабыз:

$$12\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6}\right) = 12\left(\frac{5x}{12} - 1\right)$$

$$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12,$$
$$8 + 2 + 12 = 5x - 3x + 2x,$$
$$4x = 22,$$
$$x = 5{,}5.$$

137. Квадрат тигезләмәләр

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

рәвешендәге тигезләмә *квадрат тигезләмә* дип атала, монда a, b, c — реаль саннар һәм $a \neq 0$. $a = 1$ булганда квадрат тигезләмә *китерелгән* дип, $a \neq 1$ булганда *китерелмәгән* дип атала. a, b, c саннарын түбәндәгечә атыйлар: a — *беренче коэффициент*, b — *икенче коэффициент*, c — *иректе буын*.

$ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсе тамырларын

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

формуласы буенча табалар.

$D=b^2-4ac$ аңлатмасын (1) квадрат тигезләмәсенең *дискриминанты* дип атыйлар. *Әгәр* $D<0$ *булса,* (1) *тигезләмәнең реаль тамырлары юк; әгәр* $D=0$ *булса, тигезләмәнең бер генә реаль тамыры бар; әгәр* $D>0$ *булса, тигезләмәнең ике реаль тамыры була.*

$D=0$ очрагында кайчак тигезләмәнең ике тигез тамыры бар диләр.

$D=b^2-4ac$ язылышын кулланып, (2) формуланы $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ рәвешендә язарга була.

$b=2k$ булганда (2) формуласы түбәндәгечә языла:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Шулай итеп, $x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$, биредә $k=\frac{b}{2}$. (3)

(3) формуласын $\frac{b}{2}$ — бөтен сан, ягъни b коэффициенты җөп сан булган очракларда куллану уңай.

1 нче мисал. $2x^2-5x+2=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү: Монда $a=2$, $b=-5$, $c=2$. $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9$, $D>0$ булганлыктан, тигезләмәнең ике тамыры бар, аларны (2) формула буенча табабыз:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm9}{4}=\frac{5\pm3}{4}.$$

Шулай итеп, $x_1=\frac{5+3}{4}=2$, $x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$, ягъни бирелгән тигезләмәнең тамырлары — $x_1=2$ һәм $x_2=\frac{1}{2}$.

2 нче мисал. $x^2-6x+9=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Монда $a=1$, $b=-6$, $c=9$. (3) формуласы буенча табабыз:

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-9\cdot1}}{1}=\frac{3\pm0}{1}=3$, ягъни тигезләмәнең тамыры $x=3$.

3 нче мисал. $2x^2-3x+5=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Монда $a=2$, $b=-3$, $c=5$. Дискриминантны табабыз: $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot5=-31$. $D<0$ булганлыктан, тигезләмәнең реаль тамырлары юк.

138. Тулы булмаган квадрат тигезләмәләр. Әгәр $ax^2+bx+c=0$ квадрат тигезләмәсендә икенче коэффициент b яки ирекле буын c нульгә тигез булса, *тулы булмаган* квадрат тигезләмә килеп чыга. Тулы булмаган тигезләмәләрнең тамырларын табу өчен гадирәк юлны — тигезләмәнең сул ягын тапкырлаучыларга таркату юлын кулланырга була, шуңа күрә алар аерым тикшереләләр.

1 нче мисал. $2x^2-5x=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x(2x-5)=0$. Димәк, я $x=0$, я $2x-5=0$, ягъни $x=2{,}5$. Шулай итеп, тигезләмәнең ике тамыры бар: 0 һәм 2,5.

2 нче мисал. $3x^2-10=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике кисәген дә 3 кә бүләбез:

$x^2-\frac{10}{3}=0$, ягъни $\left(x-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)=0$.

Димәк, я $x-\sqrt{\frac{10}{3}}=0$,

моннан $x=\sqrt{\frac{10}{3}}$; я $x+\sqrt{\frac{10}{3}}=0$, моннан $x=-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Шулай итеп, тигезләмәнең ике тамыры бар: $\sqrt{\frac{10}{3}}$ һәм $-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

3 нче мисал. $2x^2+5x=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Теләсә нинди x өчен $2x^2+5>0$ булганлыктан, $2x^2+5=0$ тигезләмәсенең тамырлары юк.

139. Виет теоремасы.

Т.5.3. Әгәр $x^2+px+q=0$ китерелгән квадрат тигезләмәсенең реаль тамырлары булса, аларның суммасы $-p$ га, тапкырчыгышы q га тигез, ягъни

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_2\cdot x_2=q. \qquad (1)$$

(китерелгән квадрат тигезләмәнең тамырлары суммасы капма-каршы тамгасы белән алынган икенче коэффициентка, ә тамырларының тапкырчыгышы ирекле буынга тигез).

$x^2+px+q=0$ китерелгән квадрат тигезләмәсенең тамырлары һәм коэффициентлары арасындагы тагын берничә бәйләнешне чыгарыйк.

Тамырларның квадратлары суммасын табыйк:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

(1) формулаларын кулланабыз:

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q. \qquad (2)$$

Тамырларның кублары суммасын табыйк:

$$x^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = ((x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)$$

(1) һәм (2) формулаларын кулланып, табабыз:

$$x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q).$$

Виет теоремасына кире теорема да дөрес.

Т.5.4. Әгәр x_1 һәм x_2 саннары өчен $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$ тигезлекләре дөрес булса, x_1 һәм x_2 $x^2 + px + q = 0$ квадрат тигезләмәсенең тамырлары була.

Бу теорема квадрат тигезләмә тамырлары кайбер очракларда тамырлар формулаларын кулланмыйча табарга мөмкинлек бирә.

1 нче мисал. $x^2 - 9x + 14 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү: $x_1 + x_2 = 9$,

$x_1x_2 = 14$

булырлык x_1 һәм x_2 саннарын табарга тырышыйк. Андый саннар — 2 һәм 7. 5.4 теоремасы буенча алар бирелгән тигезләмәнең тамырлары.

2 нче мисал. $x + 3x - 28 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү: $x_1 + x_2 = -3$

$x_1x_2 = -28$

тигезлекләре үтәрлек, x_1 һәм x_2 саннарын табарга тырышыйк. Бу саннар -7 һәм 4 икәнен белү кыен түгел. Алар бирелгән тигезләмәнең тамырлары да инде.

140. Тигезләмәләр системалары һәм җыелмалары. $(x^2 - 1)^2 + ((x - 1)(x - 2))^2 = 0$ тигезләмәсен карыйк.

$(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$ һәм $((x - 1)(x - 2))^2 \geqslant 0$ икәне ачык, ә тискәре булмаган ике санның суммасы һәр кушылучы нульгә тигез булганда гына нульгә тигез була. Шуңа күрә элек $(x^2 - 1)^2 = 0$ һәм $((x - 1)(x - 2))^2 = 0$ тигезләмәләрен чишәргә, ә аннан соң, аларның уртак тамырларын табарга кирәк. $(x^2 - 1)^2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары 1 һәм -1 саннары, ә $((x - 1) \times (x - 2))^2 = 0$ тигезләмәсенең тамырлары 1 һәм 2 саннары. Уртак булып 1 саны тора, бу — бирелгән тигезләмәнең тамыры.

Үзгәрешленең бирелгән ике тигезләмәне дә канәгатьләндерүче кыйммәтләрен табарга кирәк булган очракта, *тигезләмәләр системасы* бирелгән диләр. Системаны тамгалау өчен фигуралы җәя кулланыла:

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ ((x - 1)(x - 2))^2 = 0. \end{cases}$$

Хәзер $(x^2-1)(x^2-4)=0$ тигезләмәсен карыйк. Ике сан тапкырчыгышы нульгә тигез булсын өчен, бу саннарның берсенең генә булса да нульгә тигез булуы шарт һәм шул җитә дә. Шуңа күрә элек $x^2-1=0$ һәм $x^2-4=0$ тигезләмәләрен чишәргә, ә соңыннан аларның тамырларын берләштерергә кирәк. Беренче тигезләмәнең тамырлары 1 һәм -1 саннары, ә икенчесенеке 2 һәм -2. Димәк, 1, -1, 2, -2 — бирелгән тигезләмә тамырлары.

Үзгәрешленең бирелгән тигезләмәләрнең берсенең генә булса да тамыры булган барлык кыйммәтләрен табу бурычы куелса, бер үзгәрешле мондый берничә тигезләмәне *тигезләмәләр җыелмасы* диләр. Кайчак җыелманы тамгалау өчен квадрат җәя кулланыла:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1=0, \\ x^2-4=0. \end{array}\right.$$

141. Үзгәрешлесе модуль тамгасы астына булган тигезләмәләр. a санының модуле түбәндәгечә билгеләнә: (26 нчы пункт)

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \text{ булганда,} \\ -a, & a<0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

1 нче мисал. $|3x-5|=2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Әгәр $|a|=2$ булса, $a=2$, яисә $-a=2$. Бу — бирелгән тигезләмә ике тигезләмә җыелмасы белән тамырдаш дигән сүз: $3x-5=2$; $-(3x-5)=2$. $3x-5=2$ тигезләмәсеннән $x_1=\frac{7}{3}$, ә $-(3x-5)=2$ тигезләмәсеннән $x_2=1$ не табабыз.

Җавап: $x_1=\frac{7}{3}$, $x_2=1$.

2 нче мисал. $|2x-8|=3x+1$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Әгәр $2x-8\geqslant 0$ булса, $|2x-8|=2x-8$ була һәм бирелгән тигезләмә $2x-8=3x+1$ рәвешен алыр. Моны болай язарга мөмкин:

$$\begin{cases} 2x-8\geqslant 0, \\ 2x-8=3x+1. \end{cases}$$

$2x-8=3x+1$ тигезләмәсеннән $x=-9$ килеп чыга. Ләкин үзгәрешленең бу кыйммәте өчен $2x-8\geqslant 0$ тигезсезлеге үтәлми, димәк, табылган кыйммәт тигезләмәнең тамыры була алмый.

$2x-8<0$ булганда $|2x-8|=-(2x-8)$ һәм бирелгән тигезләмә $8-2x=3x+1$ рәвешен алыр. Моны болай язарга мөмкин:

$$\begin{cases} 2x-8<0, \\ 8-2x=3x+1. \end{cases}$$

$8-2x=3x+1$ тигезләмәсеннән $x=\frac{7}{5}$ килеп чыга.

$2\left(\frac{7}{5}\right)-8<0$ тигезсезлеге дөрес, димәк, $x=\frac{7}{5}$ — бирелгән тигезләмәнең тамыры.

Җавап: $x=\frac{7}{5}$.

$|x-a|=b$ рәвешендәге тигезләмәне геометрик юл белән дә чишәргә мөмкин (26 нчы пункт).

142. Тигезләмәнең нәтиҗәсе. Чит тамырлар. Ике тигезләмә бирелгән булсын.

$$f_1(x)=g_1(x), \qquad (1)$$
$$f_2(x)=g_2(x). \qquad (2)$$

Әгәр (1) тигезләмәсенең һәр тамыры бер үк вакытта (2) тигезләмәсенең дә тамырлары булса, (2) тигезләмәсе (1) *тигезләмәсенең нәтиҗәсе* дип атала. Тигезләмәләрнең тамырдашлыгы тигезләмәләрнең һәркайсы икенчесенең нәтиҗәсе икәнлеген аңлата.

Тигезләмә чишү процессында еш кына бирелгән тигезләмәнең нәтиҗәсе булырлык тигезләмәгә әйләндерә торган үзгәртүләр кулланыла. Нәтиҗә тигезләмәне бирелгән тигезләмәнең барлык тамырлары да канәгатьләндерә, ләкин, алардан тыш, нәтиҗә тигезләмәнең бирелгән тигезләмәнең тамырлары булмаган чишелешләре дә булуы мөмкин, алар *чит тамырлар* дип атала. Чит тамырларны табу һәм төшереп калдыру өчен нәтиҗә тигезләмәнең барлык тамырларын баштагы тигезләмәгә куеп тикшерәләр.

Әгәр тигезләмә чишкәндә аны нәтиҗә тигезләмә белән алыштырсак, алда күрсәтелгән тикшерү тигезләмә чишүнең аерылгысыз өлеше булып тора. Шуңа күрә бирелгән тигезләмәнең нинди үзгәртүләр ярдәмендә нәтиҗә тигезләмәгә күчүен белү бик мөһим.

$$f(x)=g(x) \qquad (3)$$

тигезләмәсен карыйк һәм аның ике кисәген дә x ның барлык кыйммәтләре өчен мәгънәсе булган бер үк $H(x)$ аңлатмасына тапкырлыйк:

$$f(x)\cdot H(x)=g(x)\cdot H(x) \qquad (4)$$

Бу тигезләмәнең тамырлары булып, (3) тигезләмәсе тамырлары да, $H(x)=0$ тигезләмәсе тамырлары да хезмәт итәләр. Димәк, (4) тигезләмәсе — (3) тигезләмәсе өчен нәтиҗә тигезләмә. Әгәр «чит» $H(x)=0$ тигезләмәсенең тамырлары булмаса, (3) һәм (4) тигезләмәләре тамырдаш булалар.

Шулай итеп, *тигезләмәнең ике кисәген дә x ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә мәгънәсе булган $H(x)$ аңлатмасына тапкырласак, баштагы тигезләмә өчен нәтиҗә тигезләмә* *килеп чыга.* Әгәр $H(x)=0$ тигезләмәсенең тамырлары булмаса, табылган тигезләмә баштагысы белән тигезкөчле булыр. Кире үзгәртүне, ягъни (4) тигезләмәсен $H(x)$ аңлатмасына бүлеп, (4) тигезләмәсеннән (3) тигезләмәсенә күчүне, кагыйдә буларак, эшләргә ярамый, чөнки чишелешләр югалуга китерүе мөмкин (бу очракта $H(x)=0$ тигезләмәсенең тамырлары «югала»). Мәсәлән, $(x-2)(x-3)=2(x-3)$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: 3 һәм 4. Тигезләмәнең ике кисәген дә $x-3$ кә бүлү, $x-2=2$ тигезләмәсенә китерә, ә аның бер генә — 4 тамыры гына бар, ягъни бер тамыр югалды.

Яңадан (3) тигезләмәсен алыйк һәм ике кисәген дә квадратка күтәрик.

$$(f(x))^2=(g(x))^2 \tag{5}$$

тигезләмәсен табабыз, аның тамырлары булып (3) тигезләмә тамырлары да, шулай ук $f(x)=-g(x)$ «чит» тигезләмә тамырлары да хезмәт итәләр, ягъни (5) тигезләмә (3) тигезләмәнең нәтиҗәсе булыр.

Мәсәлән, $x-1=3$ тигезләмәсенең тамыры 4. Бу тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка күтәрсәк, $(x-1)^2=9$ тигезләмәсе барлыкка килер, аның ике тамыры бар: 4 һәм -2. Димәк, $(x-1)^2=9$ тигезләмәсе $x-1=3$ тигезләмәсенең нәтиҗәсе. $x-1=3$ тигезләмәсеннән $(x-1)^2=9$ тигезләмәсенә күчкәндә $x=-2$ булган чит тамыр барлыкка килде.

Шулай итеп, *тигезләмәнең ике кисәген дә квадратка (һәм гомумән теләсә кайсы җөп дәрәҗәгә) күтәргәндә бирелгән тигезләмә өчен нәтиҗә тигезләмә барлыкка килә.* Димәк, әлеге рәвешүзгәртүдә чит тамырлар килеп чыгуы мөмкин. Тигезләмәнең ике кисәген дә бер үк так дәрәҗәгә күтәргәндә барлыкка килгән тигезләмә бирелгәне белән тигезкөчле була.

143. Ваклаучысында үзгәрешле булган тигезләмәләр.

$$\frac{p(x)}{q(x)}=0 \tag{1}$$

рәвешендәге тигезләмәне карыйк.

Мондый тигезләмәләрне чишү түбәндәге раслауга нигезләнгән: $\frac{m}{n}$ вакланмасы санаучысы нульгә тигез, ә ваклаучысы нульдән үзгә булганда гына нульгә тигез була (0 гә бүләргә ярамый!). Моны болай язалар:

$$\begin{cases} m=0, \\ n\neq 0. \end{cases}$$

Алда әйтелгәнчә $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ тигезләмәсен чишү ике этапта башкарыла: элек $p(x)=0$ тигезләмәсен чишәргә, ә аннан соң

x ның табылган кыйммәте өчен $q(x)$ ваклаучысы нульгә әйләнәме икәнен ачыкларга кирәк. Әгәр $q(x)=0$ булса, $p(x)=0$ тигезләмәсенең тамыры (1) тигезләмәсенең дә тамыры була; әгәр $q(x)=0$ булса, $p(x)=0$ тигезләмәсенең тамыры (1) тигезләмәнең тамыры була алмый.

Шул рәвешчә, $p(x)=0$ тигезләмәсе $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ тигезләмәсе өчен нәтиҗә тигезләмә (142 нче пункт) була. $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ тигезләмәсеннән $p(x)=0$ тигезләмәсенә күчкәндә (бу күчү ваклаучыдан котылу дип атала) чит тамырлар барлыкка килүе мөмкин. Аларны $q(x)=0$ шарты ярдәмендә (яки $p(x)=0$ тигезләмәсенең һәр тамырын (1) тигезләмәгә турыдан-туры куеп карау ярдәмендә) төшереп калдырырга була.

Мисал. $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $3x-6=0$ тигезләмәсеннән $x=2$ табабыз. $x=2$ булганда x^2-x-2 ваклаучысы нульгә әйләнгәнлектән, тигезләмәнең тамырлары юк.

144. Тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе. $f(x)=g(x)$ тигезләмәсенең *билгеләнү өлкәсе* дип, x үзгәрешлесенең $f(x)$ аңлатмасын да, $g(x)$ аңлатмасын да мәгънәле итә торган барлык кыйммәтләре күплегенә әйтәләр.

Мисал. Тигезләмәнең билгеләнү өлкәсен табарга:

а) $x^2-5x=1+2x$; б) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-2}=3$;

в) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[6]{x-2}$; г) $\log_3(x-3)=\log_3(5-x)$.

Чишү. а) x^2-5x һәм $1+2x$ аңлатмалары барлык x өчен билгеләнәләр. Димәк, тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе — барлык саннар турысы.

б) $\frac{x}{x-1}$ аңлатмасы $x=1$ булганда билгеләнми, ә $\frac{1}{x-2}$ аңлатмасы $x=2$ булганда билгеләнми. Димәк, тигезләмәнең билгеләнү өлкәсен $x\neq 1$, $x\neq 2$ шартлары белән бирергә мөмкин.

в) Җөп дәрәҗәдәге тамырны тамыраста аңлатмасының тискәре булмаган кыйммәтләре генә мәгънәле итә. Димәк, бер үк вакытта $x\geqslant 0$, $x-1>0$, $x-2>0$ шартлары үтәлергә тиеш. Бу тигезсезлекләр $x>2$ булганда барысы да дөрес, ягъни $[2;\ +\infty)$ — тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе.

г) Логарифм тамгасы астында уңай сан булган очракта гына логарифмның мәгънәсе була. Димәк, бер үк вакытта ике тигезсезлек үтәлергә тиеш: $x-3>0$, моннан $x>3$ һәм $5-x>0$ моннан $x<5$. Шулай итеп, $(3;\ 5)$ — тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе.

$f(x)=g(x)$ тигезләмәсенең тамырлары аның билгеләнү өлкәсенә керергә тиешлеге ачык. Ләкин кайчак тигезләмәне үзгәртү процессында аның билгеләнү өлкәсе үзгәрә (ешрак ул киңәя) һәм бу үзгәртүләр нәтиҗәсендә табылган кыйммәтләрнең кайберләре $f(x)=g(x)$ тигезләмәсенең билгеләнү өлкәсенә керәләр, ә кайберләре кермиләр. Ул чакта беренчеләре тигезләмә тамырлары булалар, ә икенчеләре — юк (алар чит тамырлар).

$\frac{3x-6}{x^2-x-6}=0$ (143 нче пункт) тигезләмәсен чишкәндә билгеләнү өлкәсе $x^2-x-2\neq 0$ шарты белән бирелә, ә инде $3x-6=0$ тигезләмәсенә күчсәк, аның билгеләнү өлкәсе — барлык саннар турысы (билгеләнү өлкәсе киңәйде). $3x-6=0$ тигезләмәсенең $x=2$ тамыры баштагы тигезләмәнең билгеләнү өлкәсенә керми, һәм, димәк, чит тамыр була.

Гомуми нәтиҗә шундый: *әгәр тигезләмәне үзгәртү процессында аның билгеләнү өлкәсе киңәйсә, чит тамырлар барлыкка килүе мөмкин.* Шуңа күрә үзгәрешләрнең барлык табылган кыйммәтләрен баштагы тигезләмәгә куеп, яки баштагы тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе ярдәмендә тикшерергә кирәк.

Мисал. $\lg(x-5)=\lg(2x-9)$ тигезләмәсен чишәргә (1).

Чишү. Әгәр $\lg a=\lg b$ булса, логарифмик функциянең монотонлык үзлегеннән $a=b$ була (әгәр $a\neq b$, мәсәлән $a<b$ булса, $\lg a\neq\lg b$ була, ә атап әйткәндә, $\lg a<\lg b$ була). Димәк, бирелгән тигезләмәдән

$$x-5=2x-9 \qquad (2)$$

тигезләмәсенә күчәргә мөмкин, аннан $x=4$ не табабыз. Ләкин (1) тигезләмәсеннән (2) тигезләмәгә күчкәндә билгеләнү өлкәсе киңәйде: (1) тигезләмәдә ул $x>5$ тигезсезлеге белән бирелсә, (2) тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе булып барлык санлы туры хезмәт итә. Шуңа күрә, (2) тигезләмәнең $x=4$ тамыры (1) тигезләмә өчен чит тамыр булып чыгуы мөмкин. Бу очракта ул шулай булып чыга да, чөнки $x=4$ (1) тигезләмәсенең билгеләнү өлкәсенә керми. ($x>5$ тигезсезлеген канәгатьләндерми). Шулай итеп, $x=4$ — чит тамыр, ягъни бирелгән тигезләмәнең тамырлары юк.

145. Рациональ тигезләмәләр. Әгәр $f(x)$ һәм $g(x)$ аңлатмалары рациональ булсалар, $f(x)=g(x)$ тигезләмәсе *рациональ* дип атала. Шуның белән бергә, әгәр $f(x)$ һәм $g(x)$ бөтен аңлатмалар булса, тигезләмә дә *бөтен* дип, әгәр $f(x)$ һәм $g(x)$ аңлатмаларының һич югында берсе вакланмалы булса, рациональ $f(x)=g(x)$ тигезләмәсе дә *вакланмалы* дип атала.

Мәсәлән, сызыкча (136 нчы пункт), квадрат (137 нче пункт) тигезләмәләр бөтен тигезләмәләр булалар.

Рациональ тигезләмәне чишү өчен, түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) барлык вакланмаларның уртак ваклаучысын табарга;

2) тигезләмәнең ике кисәген дә уртак ваклаучыга тапкырлап, вакланмалы тигезләмәне бөтенгә үзгәртергә;

3) табылган бөтен тигезләмәне чишәргә;

4) уртак ваклаучыны нульгә әйләндерә торган тамырларны төшереп калдырырга.

Мисал. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Барлык вакланмаларның уртак ваклаучысы $-2x(2-x)$. Һәр вакланма өчен өстәмә тапкырлаучылар табып, ваклаучылардан котылыйк:

$$\overset{2x}{\frac{2}{2-x}}+\overset{x(2-x)}{\frac{1}{2}}=\overset{2}{\frac{4}{x(2-x)}};$$

$$4x+x(2-x)=8;$$
$$x^2-6x+8=0.$$

$x^2-6x+8=0$ тигезләмәсеннән $x_1=2$, $x_2=4$ (137 нче пункт) килеп чыга. Табылган тамырлар $2x(2-x)$ аңлатмасын нульгә әйләндерәләрме икәнен, ягъни $2x(2-x)\neq 0$ шарты үтәлүен тикшерик, 2 саны бу шартны канәгатьләндерми. Димәк, $x=4$ — тигезләмәнең бердәнбер тамыры.

146. $p(x)=0$ тигезләмәсен аның сул кисәген тапкырлаучыларга таркату юлы белән чишү. Бу юлның (методның) эчтәлеге түбәндәгедән гыйбарәт. $p(x)=0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк булсын, монда $p(x)$ n нчы дәрәҗә күпбуын. Күпбуынны тапкырлаучыларга тарката алдык дип уйлыйк: $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)$, монда $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — дәрәҗәләре n нан ким булган күпбуыннар. Ул чакта $p(x)=0$ тигезләмәсе $p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)=0$ рәвешен алыр. Әгәр a $p(x)=0$ тигезләмәсенең тамыры булса, ул чакта $p_1(a)\cdot p_2(a)\cdot p_3(a)=0$ була, һәм шуңа күрә $p_1(a)$, $p_2(a)$, $p_3(a)$ саннарының һич югында берсе нульгә тигез. Димәк, a — түбәндәге тигезләмәләрнең һич югында берсенең тамыры була:

$$p_1(a)=0;\ p_2(a)=0,\ p_3(a)=0.$$

Киресе дә дөрес: әгәр $x=b$ һәм $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ тигезләмәләренең һич югында берсенең тамыры булса, ул $p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)=0$ тигезләмәсенең, ягъни $p(x)=0$ тигезләмәсенең дә тамыры була.

Шулай итеп, әгәр $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot p_3(x)$, (биредә $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — күпбуыннар) булса, $p(x)=0$ тигезләмәсе урынына $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ тигезләмәләр җыелмасын чишәргә кирәк. Бу тигезләмәләрнең табылган барлык тамырлары һәм бары тик алар гына $p(x)=0$ тигезләмәсенең тамырлары булалар.

1 нче мисал. $x^3+2x^2+3x+6=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең сул кисәген тапкырлаучыларга таркатыйк. $x^2(x+2)+3(x+2)=0$, моннан $(x+2)(x^2+3)=0$. Димәк, яки $x+2=0$, яки $x^2+3=0$. Беренче тигезләмәдән $x=-2$ не табабыз, икенче тигезләмәнең тамырлары юк. **Җавап:** -2.

Тапкырлаучыларга таркату методын $p(x)=0$ рәвешендәге теләсә нинди тигезләмәләр өчен дә кулланырга ярый, $p(x)$ аңлатмасының күпбуын булуы мәҗбүри түгел: $p(x)=p_1(x)\cdot p_3(x)$ булса да, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ аңлатмалары арасында күпбуынга караганда катлаулырак аңлатмалар булуы бар (мәсәлән, иррациональ, логарифмик һ. б.). $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ тигезләмәләре тамырлары арасында $p(x)=0$ тигезләмәсе өчен чит тамырлар да булуы мөмкин.

2 нче мисал. $x\sqrt{x}-9\sqrt{x}=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $\sqrt{x}(x^2-9)=0$, димәк, $\sqrt{x}=0$, яисә $x^2-9=0$. $\sqrt{x}=0$ тигезләмәсеннән $x=0$, $x^2-9=0$ тигезләмәсеннән $x=\pm 3$ табабыз.

Ләкин $x=-3$ — чит тамыр, баштагы тигезләмәне канәгатьләндерми, чөнки бу кыйммәт өчен $\sqrt{x}$ аңлатмасы билгеләнмәгән.

Димәк, тигезләмәнең ике тамыры бар: 3; 0.

147. Тигезләмәләрне яңа үзгәрешле кертеп чишү. Бу методның әчтәлеген мисалларда аңлатыйк.

1 нче мисал. $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x^2-3x=y$ дип билгеләп, $y^2+3y-28=0$ тигезләмәсен, аны чишеп, $y_1=-7$, $y_2=4$ не табабыз. Хәзер мәсьәлә тигезләмәләр җыелмасын чишүгә кайтып кала:

$$x^2-3x=-7; \qquad x^2-3x=4 \text{ ягъни}$$
$$x-3x+7=0; \qquad x-3x-4=0.$$

Беренче квадрат тигезләмәнең реаль тамырлары юк, чөнки аның дискриминанты тискәре сан.

Икенче тигезләмәдән $x_1=4$, $x_2=-1$ килеп чыга. Алар бирелгән тигезләмәнең реаль тамырлары.

2 нче мисал. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x^2+2x-3=y$ дип билгелик, ул чакта $x^2+2x-8=$ $=(x^2+2x-3)-5=y-5$ була һәм тигезләмә

$\dfrac{24}{y-5}-\dfrac{15}{y}=2$ рәвешен ала.

Бу тигезләмәне чишеп (145 нче пункт), $y_1=12{,}5$ һәм $y_2=-3$ не табабыз.

Ләкин $y=x^2+2x-3$. Димәк, безгә $x^2+2x-3=12{,}5$ һәм $x^2+2x-3=-3$ яки $x^2+2x-15{,}5=0$ һәм $x^2+2x=0$ тигезләмәләрен чишәсе кала.

Беренче тигезләмәдән табабыз: $x_1=\frac{-2+\sqrt{66}}{2}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{66}}{2}$; икенче тигезләмәдән табабыз: $x_3=0$, $x_4=-2$. Шулай итеп, бирелгән тигезләмәнең дүрт тамыры табылды.

148. Биквадрат тигезләмәләр. $ax^4+bx^2+c=0$, $(a\neq 0)$ рәвешендәге тигезләмә *биквадрат тигезләмә* дип атала. Биквадрат тигезләмә яңа үзгәрешле кертү юл белән чишелә: $x^2=y$ дип билгеләп, $ay^2+by+c=0$ квадрат тигезләмәсенә килербез.

Мисал. $x^4+4x^2-21=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x^2=y$ дип алып, $y^2+4y-21=0$ квадрат тигезләмәсен, аннан $y_1=-7$, $y_2=3$ не табабыз. Инде мәсьәлә $x^2=-7$, $x^2=3$ тигезләмәләрен чишүгә кайтып кала. Беренче тигезләмәнең реаль тамырлары юк, икенче тигезләмәдән $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$ не табабыз, алар бирелгән биквадрат тигезләмәнең тамырлары булыр.

149. Тигезләмә төзеп мәсьәләләр чишү. Физика, механика, экономика һәм күп кенә башка практик фәннәрнең күптөрле сораулары китереп чыгара торган күпсанлы мәсьәләләр тигезләмәләр ярдәмендә чишеләләр. Иң элек тигезләмәләр ярдәмендә мәсьәләләр чишүнең гомуми тәртибен искә төшерик.

1) Үзгәрешлеләр кертәләр, ягъни x, y, z хәрефләре белән мәсьәләдә табарга тиешле яки эзләгән зурлыкларны табу өчен кирәк булган билгесез зурлыкларны билгелиләр.

2) Кертелгән үзгәрешлеләр һәм мәсьәләдә бирелгән саннар һәм алар арасындагы бәйләнешләр ярдәмендә тигезләмәләр системасы (яки тигезләмә) төзиләр.

3) Төзелгән тигезләмәләр системасын (яки тигезләмәне) чишәләр һәм табылган чишелешләр арасыннан мәсьәлә шартына туры килгәннәрен сайлап алалар.

4) Әгәр x, y, z хәрефләре белән эзләгән зурлыклар билгеләнмәгән булса, ул чакта табылган чишелешләр ярдәмендә мәсьәлә соравына җавап табалар.

1 нче мәсьәлә. 60 т йөкне бер урыннан икенчесенә күчерү өчен берничә машина сорыйлар. Юл төзек булмаганлыктан, һәр машинага тиешлесеннән 0,5 т га кимрәк төяргә туры килә, шуңа күрә тагын өстәмә 4 машина кирәк була. Башта ничә машина сораган булганнар?

Чишү. Башта соралган машиналар санын x дип билгелик, чынлыкта $x+4$ машина чакырыла. 60 т йөкне күчерергә кирәк булганлыктан, бер машинага $\frac{60}{x}$ т йөк төяргә уйланыла, ә чынлыкта $\frac{60}{x+4}$ т төялә, ягъни уйлаганга караганда 0,5 т кимрәк. Нәтиҗәдә без

$$\frac{60}{x}-\frac{6}{x+4}=0,5.$$

тигезләмәсен табабыз. Бу тигезләмәнең ике тамыры бар: -24 һәм 20. Мәсьәләнең мәгънәсенә -24 саны туры килмәве ачык. Шулай итеп, башта 20 машина соралган.

2 нче мәсьәлә. Хәрәкәт тизлеге 20 км/сәг булган моторлы көймә ике пункт арасын елга буйлап агым уңаена бара һәм тукталышларсыз 6 сәг 15 минутта кире әйләнеп кайта. Пунктлар арасындагы ераклык 60 км га тигез. Елганың агым тизлеген табарга.

Чишү. Елганың агым тизлеге — x км/сәг булсын. Үз тизлеге 20 км/сәг булган көймә агым уңаена $(20+x)$ км/сәг, ә агымга каршы $(20-x)$ км/сәг тизлек белән бара. Агым уңаена бару вакыты $\frac{60}{20+x}$ сәг, ә кире кайту вакыты $\frac{60}{20-x}$ сәг була. Бару һәм кайту өчен 6 сәг 15 мин. Ягъни $\frac{25}{4}$ сәг вакыт сарыф ителгәнне искә алып, тигезләмә төзибез:

$$\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4}.$$

Бу тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1=4$, $x_2=-4$. $x=-4$ кыйммәте мәсьәлә шартына туры килми. Димәк, елганың агым тизлеге 4 км/сәг.

3 нче мәсьәлә. Икеурынлы санның берәмлекләр цифры дистәләр цифрыннан 2 гә зур. Эзләгән сан белән аның цифрлары суммасы тапкырчыгышы 144 кә тигез булса, бу икеурынлы санны табарга.

Чишү. Теләсә нинди икеурынлы сан $10x+y$ рәвешендә язылырга мөмкин булуын искә төшерик, монда x — дистәләр цифры, ә y — берәмлекләр цифры. Шарт буенча, әгәр x — дистәләр цифры булса, ул чакта берәмлекләр цифры $x+2$ була. Тигезләмә төзибез:

$$(10x+(x+2))(x+(x+2))=144.$$

Бу тигезләмәне чишеп, $x_1=2$, $x_2=-3\frac{2}{11}$ не табабыз. Икенче тамыр мәсьәлә шартына туры килми. Шулай итеп, дистәләр цифры 2, берәмлекләр цифры 4.

Димәк, эзләгән сан 24 кә тигез.

4 нче мәсьәлә. Ике эшче бергә эшләп, ниндидер эшне 6 сәгатьтә башкаралар. Беренчесе үзе генә эшләп, барлык

эшне икенчесе үзе генә эшләгәнгә караганда 5 сәгатькә тизрәк башкара. Аларның һәркайсы аерым-аерым эшләп, барлык эшне ничә сәгатьтә башкара алыр?

Чишү. Бу мәсьәләне (яки аңа ошаш «эш» тибындагы мәсьәләне) чишкәнче, түбәндәгене билгеләп үтик: хезмәт җитештерүчәнлеге, ягъни эшнең вакыт берәмлегендә башкарылган өлеше (аны A хәрефе белән билгелик) һәм барлык эшне башкару өчен кирәкле вакыт (аны t дип билгелик) — үзара кире зурлыклар, ягъни $At=1$. Шуңа күрә, әгәр беренче эшчегә барлык эшне башкару өчен x сәгать вакыт кирәк булса, икенчесенә — $(x+5)$ сәгать кирәк булачак, беренче эшче 1 сәгатьтә эшнең $\frac{1}{x}$ ен, ә икенчесе 1 сәгатьтә эшнең $\frac{1}{x+5}$ ен башкара. Шарт буенча алар бергә эшләп, эшне 6 сәгатьтә башкарганнар. Беренче эшче 6 сәгатьтә эшнең $\frac{6}{x}$ ен, ә икенчесе 6 сәгатьтә эшнең $\frac{6}{x+5}$ сын башкара. Алар икесе бергә барлык эшне башкарып бетерүләрен, ягъни башкарылган эшнең өлеше 1 гә тигез икәнлеген искә алып, тигезләмә төзибез:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1,$$

Аны чишеп, $x=10$ ны табабыз.

Шулай итеп, беренче эшче үзе генә эшне 10 сәгатьтә, ә икенчесе — 15 сәгатьтә башкара ала.

5 нче мәсьәлә. Сыешлыгы 54 л лы кислота тутырылган савыттан берничә литрны агызып алалар һәм савытны су белән тутыралар, соңыннан шул ук кадәр катнашманы тагын агызып алалар. Шуннан соң савытта калган катнашмада 24 л чиста кислота калганлыгы ачыклана. Беренче мәртәбә күпме кислота агызып алганнар?

Чишү. Беренче мәртәбә x л кислота агызып алынган булсын. Димәк, савытта $(54-x)$ л кислота кала. Савытны су белән тутыргач, 54 л катнашма һәм аңарда $(54-x)$ л кислота хасил була. Димәк, 1 л катнашмада $\frac{54-x}{54}$ л кислота (эремә концентрациясе) бар. Икенче мәртәбә алынган x л катнашма составында $\frac{54-x}{54}\cdot x$ л кислота була. Шулай итеп, беренче мәртәбә x л, икенчесендә $\frac{54-x}{54}\cdot x$ л кислота, ә барысы бергә $54-24=30$ литр кислота агызып алганнар. Нәтиҗәдә түбәндәге тигезләмәне төзибез:

$$x+\frac{54-x}{54}\cdot x=30$$

Аны чишеп, ике тамыр табабыз: $x_1=90$ һәм $x_2=18$. Беренчесенең мәсьәлә шартын канәгатьләндермәве ачык.

Димәк, беренче мәртәбә 18 л кислота агызып алынган.

6 нчы мәсьәлә. 45% ы бакыр булган бакыр белән аккургаш эретмәсе кисәгенең массасы 12 кг. Яңа эретмәдә 40% бакыр булсын өчен, бу кисәккә күпме саф аккургаш өстәргә кирәк?

Чишү. x кг массалы аккургаш өстәгәннәр дип билгелик. Ул чакта 40% ы бакыр булган $(12+x)$ кг массалы эретмә хасил булыр. Димәк, яңа эретмәдә $0{,}4(12+x)$ кг бакыр бар. Баштагы эретмәнең массасы 12 кг, 45% ы бакыр, ягъни анда бакыр $0{,}45\cdot 12$ кг була.

Бакырның массасы баштагы эретмәдә дә, яңасында да бер үк икәнен искә алып, тигезләмә төзибез:

$$0{,}4(12+x)=0{,}45\cdot 12.$$

Бу тигезләмәне чишеп, $x=1{,}5$ икәнен табабыз.

Димәк, баштагы эретмәгә 1,5 кг аккургаш өстәргә кирәк.

7 нче мәсьәлә. Составында 5% һәм 40% никель булган ике сорт корыч бар. Яңадан эретеп, никеле 30% булган 140 т корыч табу өчен теге һәм бу сорттагы корычны күпме алырга кирәк?

Чишү. Беренче сорт корычның массасы x т булсын, ул чакта икенче сорт корыч $(140-x)$ т алыныр. Беренче сорт корычта никель 5%; димәк, беренче сортлы x т корычта $0{,}05x$ т никель бар. Икенче сорт корычта никель 40%, димәк, $(140-x)$ т икенче сорт корычта $0{,}4(140-x)$ т никель бар. Мәсьәлә шарты буенча, алынган ике сортны катнаштырганнан соң 30% никельле 140 т корыч табыла, ягъни яңадан эреткәннән соң корычта $0{,}3\cdot 140$ т никель булырга тиеш. Бу кадәр никель беренче сорт корычтагы $0{,}5x$ т һәм икенче сорт корычтагы $0{,}4(140-x)$ т никельдән тора. Тигезләмә төзибез:

$$0{,}05x+0{,}4(140-x)=0{,}3\cdot 140,$$

аны чишеп, $x=40$ ны табабыз. Димәк, никеле 5% булган корычны 40 т, ә никеле 40% булган корычны 100 т алырга кирәк.

150. Иррациональ тигезләмәләр. Үзгәрешлесе радикал тамгасы яки вакланмалы дәрәҗәгә күтәрү тамгасы астында торган тигезләмә *иррациональ тигезләмә* дип атала. Мәсәлән, $\sqrt{x-2}=2x-1$, $x^{\frac{1}{3}}-5=0$ һ. б. тигезләмәләре иррациональ.

Иррациональ тигезләмәләр чишүнең ике методын карыйк: тигезләмәнең ике кисәген дә бер үк дәрәҗәгә күтәрү методы һәм яңа үзгәрешлеләр кертү методы.

Тигезләмәнең ике кисәген дә бер үк дәрәҗәгә күтәрү методы түбәндәгедән гыйбарәт:

а) бирелгән иррациональ тигезләмәне

$$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$$

рәвешенә китерәләр;

б) табылган тигезләмәнең ике кисәген дә n нчы дәрәҗәгә күтәрәләр: $(\sqrt[n]{f(x)})^n=(\sqrt[n]{g(x)})^n$;

в) $(\sqrt[n]{a})^n=a$ тигезлегеннән чыгып

$$f(x)=g(x)$$

тигезләмәсен табалар;

г) тигезләмәне чишәләр һәм дөреслеген тикшерәләр, чөнки тигезләмәнең ике кисәген дә бер үк җөп дәрәҗәгә күтәрүдән чит тамырлар (142 нче пункт) килеп чыгарга мөмкин. Бу тикшерү күпчелек очракларда үзгәрешленең табылган кыйммәтләрен баштагы тигезләмәгә кую ярдәмендә башкарыла:

1 нче мисал. $\sqrt[6]{x-3}=2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике кисәген дә алтынчы дәрәҗәгә күтәрик. $x-3=64$, моннан $x=67$.

Тикшерү. x урынына 67 не бирелгән тигезләмәгә куеп, $\sqrt[6]{67-3}=2$, ягъни $2=2$ — дөрес тигезлек табабыз.

Җавап: 67.

2 нче мисал. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәне

$$\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}$$

рәвешенә үзгәртик һәм ике кисәген дә квадратка күтәрик:

$$(\sqrt{2x+6})^2=(6-\sqrt{x-1})^2.$$

моннан,

$$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1,\ \text{ягъни}$$
$$12\sqrt{x-1}=29-x.$$

Тигезләмәнең ике кисәген дә тагын квадратка күтәрәбез:

$144(x-1)=(29-x)^2$, ягъни $x^2-202x+985=0$, моннан $x_1=5$; $x_2=197$.

Тикшерү. 1) $x=5$ булганда

$$\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6.$$

Димәк, $x=5$ бирелгән тигезләмәнең тамыры.

2) $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$. Шулай итеп, $x=197$ — чит тамыр.

Җавап: 5.

3 нче мисал. $(x-2)^{\frac{2}{5}}-(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Яңа үзгәрешле кертү методын кулланыйк. $y=(x-2)^{\frac{1}{5}}$ дип билгелик. Ул чакта $(x-2)^{\frac{2}{5}}=y^2$ була һәм $y^2-y-2=0$ тигезләмәсен табабыз, аннан $y_1=2$; $y_2=-1$.

Хәзер мәсьәлә ике тигезләмә чишүгә кайтып калды: $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$; $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$. $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$ тигезләмәсенең ике кисәген дә бишенче дәрәҗәгә күтәрсәк, $x-2=32$, моннан $x=34$.

$(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$ тигезләмәсенең тамыры юк, чөнки ваклanмалы дәрәҗәгә күтәрү тамгасы астында тискәре булмаган сан торырга тиеш, ә тискәре булмаган санның теләсә кайсы дәрәҗәсе — тискәре булмаган сан.

Җавап: 34.

151. Күрсәткечле тигезләмәләр. $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ рәвешендәге *күрсәткечле тигезләмә* $f(x)=g(x)$ тигезләмәсе белән тамырдаш, монда $a>0$, $a\neq 1$.

Күрсәткечле тигезләмәләр чишүнең төп ике методы бар: 1) күрсәткечләрне тигезләү методы, ягъни бирелгән тигезләмәне $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ рәвешенә, ә аннан $f(x)=g(x)$ рәвешенә үзгәртү; 2) яңа үзгәрешле кертү методы.

1 нче мисал. $2^{3x^2+3}=2^{10x}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бу тигезләмә $3x^2+3=10x$ тигезләмәсе белән тамырдаш, аннан $3x^2-10x+3=0$ тигезләмәсен, бу квадрат тигезләмәне чишеп, $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$ не табабыз.

2 нче мисал. $\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0,04^{x-1}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Барлык дәрәҗәләрне бер нигезгә $\frac{1}{5}$ гә китерик. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right)^{x-1}$ тигезләмәсен $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$ рәвешенә үзгәртәбез. Табылган тигезләмә $x=2x-3$ тигезләмәсе белән тамырдаш, аннан $x=3$ табабыз.

3 нче мисал. $4^x+2^{x+1}-24=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Яңа үзгәрешле кертү методын кулланыйк. $4^x=(2^x)^2$, $2^{x+1}=2\cdot 2^x$ булганлыктан, бирелгән тигезләмәне

$$(2^x)^2+2\cdot 2^x-24=0$$

рәвешендә күчереп язарга мөмкин.

$2^x = y$ дип билгеләп, яңа үзгәрешле кертик. $y^2 + 2y - 24 = 0$ квадрат тигезләмәсен табабыз, аның тамырлары $y_1 = 4$, $y_2 = -6$.

Хәзер мәсьәлә $2^x = 4$ һәм $2^x = -6$ тигезләмәләре җыелмасын чишүгә кайтып кала.

Беренче тигезләмәдән $x = 2$ табабыз, икенче тигезләмәнең тамырлары юк, чөнки теләсә нинди x өчен $2^x > 0$.

Җавап: 2.

152. Логарифмик тигезләмәләр. Иң гади *логарифмик* тигезләмәләр

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

рәвешендә булалар.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ тигезләмәсен чишү өчен, түбәндәгеләрне эшләргә кирәк:

1) $f(x) = g(x)$ тигезләмәсен чишәргә;

2) табылган тамырлар арасыннан $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерә торганнарын сайлап алырга, $f(x) = g(x)$ тигезләмәсенең калган тамырлары $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ тигезләмәсе өчен чит тамырлар булалар.

Логарифмик тигезләмәләр чишүнең төп ике методы бар: 1) тигезләмәне $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, ә аннан соң $f(x) = g(x)$ рәвешенә үзгәртүгә нигезләнгән метод; 2) яңа үзгәрешле кертү методы.

1 нче мисал. $\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бирелгән тигезләмәдән $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$ тигезләмәсенә күчеп, чишәбез. $x^2 - x - 12 = 0$, аннан $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. x ның табылган кыйммәтләрен $x^2 - 3x - 5 > 0$ һәм $7 - 2x > 0$ тигезсезлекләре ярдәмендә тикшерик. -3 саны бу тигезсезлекләрне канәгатьләндерә, ә 4 саны — юк. Димәк, 4 — чит тамыр.

Җавап: -3.

2 нче мисал. $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Логарифмнар суммасы тапкырчыгыш логарифмына тигез (120 нче пункт) дигән үзлектән файдаланып, тигезләмәне

$$\lg(x + 4)(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$$

рәвешенә үзгәртәбез һәм аннан соң

$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$ дип язабыз. Соңгы тигезләмәдән $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$ не табабыз.

Тикшерү үткәрәсе калды. Аны түбәндәге тигезсезлекләр системасы ярдәмендә башкарырга мөмкин:

$$\begin{cases} x+4>0\\ 2x+3>0,\\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Табылган -1 һәм $-5{,}5$ кыйммәтләрен бу тигезсезлекләргә куеп исәпләгәннән соң -1 нең барлык тигезсезлекләрне канәгатьләндерүен, ә $-5{,}5$ нең — канәгатьләндермәвен күрәбез, мәсәлән, соңгы кыйммәт өчен беренче тигезсезлек үтәлми. Димәк, $-5{,}5$ — чит тамыр.

Җавап: -1.

3 нче мисал. $\log_2^2 x+\log_2 x+1=\frac{7}{\log_2 0{,}5x}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $\log_2 0{,}5x=\log_2 x+\log_2 0{,}5=\log_2 x-1$ булганлыктан, бирелгән тигезләмәне түбәндәгечә күчереп язарга мөмкин:

$$\log_2^2 x+\log_2 x+1=\frac{7}{\log_2 x-1}$$

$\log_2 x=y$ дип билгеләп, яңа үзгәрешле кертик: $y^2+y+1=\frac{7}{y-1}$, һәм $(y-1)(y^2+y+1)=7$; $y^3-1=7$; $y^3=8$; $y=2$. Ләкин $y=\lg_2 x$, шуңа күрә $\log_2 x=2$ тигезләмәсеннән $x=4$ була.

Җавап: 4.

153. Күрсәткечле-логарифмик тигезләмәләр чишүгә мисаллар.

1 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$x^{1-\lg x}=0{,}01. \tag{1}$$

Чишү. Тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе: $x>0$. (1) тигезләмәнең ике кисәгендәге аңлатмалар бу өлкәдә уңай кыйммәтләр генә алалар; шуңа күрә аның ике кисәген дә 10 нигезе буенча логарифмлап,

$$\lg x^{1-\lg x}=\lg 0{,}01.$$

тигезләмәсен табабыз. Ул (1) тигезләмәсе белән тамырдаш. Аңардан $(1-\lg x)\lg x=-2$ тигезләмәсе килеп чыгар. $u=\lg x$ дип билгелибез: $(1-u)u=-2$. Соңгы тигезләмәне чишик, $u_1=-1$, $u_2=2$ не табабыз. $\lg x=-1$, $\lg x=2$ тигезләмәләре җыелмасын чишәсе кала. Бу җыелмадан $x=0{,}1$ һәм $x=100$ не табабыз, алар — (1) тигезләмәсенең тамырлары.

Монда $f(x)=g(x)$ тигезләмәсеннән $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ тигезләмәсенә күчү өчен логарифмлау методы кулланылды.

2 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

$$\log_x(3x^{\log_5 x}+4)=2\log_5 x \tag{2}$$

Чишү. Логарифм билгеләмәсен кулланып, (2) тигезләмәне

$$x^{2\log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4$$

рәвешенә китерәбез.

$u = x^{\log_5 x}$ дип билгеләп, $u^2 - 3u - 4 = 0$ тигезләмәсен табабыз, аның тамырлары $u_1 = -1$, $u_2 = 4$.

Хәзер мәсьәлә түбәндәге тигезләмәләр җыелмасын чишүгә кайтып кала:

$$x^{\log_5 x} = -1, \quad x^{\log_5 x} = 4.$$

$x^{\log_5 x} > 0$ булганлыктан, ә $-1 < 0$, җыелманың беренче тигезләмәсенең тамырлары юк. Җыелманың икенче тигезләмәсенең ике кисәген дә 5 нигезе буенча логарифмлап, табабыз:

$$\log_5^2 x = \log_5 4, \text{ ягъни } \log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4}.$$

Димәк, $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$ — (2) тигезләмә тамырлары.

154. Иң гади тригонометрик тигезләмәләр. $\sin x = a$, биредә $|a| \leqslant 1$, тигезләмәсенең чиксез күп тамырлары була. Мәсәлән, $\sin x = \frac{1}{2}$ тигезләмәсен түбәндәге кыйммәтләр канәгатьләндерә: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi$, $x_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$, $x_6 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ һ. б. ш. $\sin x = a$, биредә $|a| \leqslant 1$, тигезләмәсенең барлык тамырлары табыла торган гомуми формуласы мондый:

$$x \approx (-1)^n \arcsin a + \pi n \tag{1}$$

Биредә n теләсә нинди бөтен кыйммәтләр алырга мөмкин; аларның һәрберсенә тигезләмәнең билгеле бер тамыры туры килә; бу формулада (шулай ук иң гади тригонометрик тигезләмәләр чишелә торган башка формулаларда да) n *параметр* дип атала. Гадәттә, $n \in Z$ дип язалар, моның белән n параметры теләсә нинди кыйммәтләр ала алуын басым ясап күрсәтәләр.

$\cos x = a$, биредә $|a| \leqslant 1$, тигезләмәсенең чишелешләрен түбәндәге формула белән табалар;

$$x = \pm a \arccos a + 2\pi n, \; n \in Z. \tag{2}$$

$\operatorname{tg} x = a$ тигезләмәсе мондый формула буенча чишелә:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in Z, \tag{3}$$

ә $\operatorname{ctg} x = a$ тигезләмәсе

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \; n \in Z \tag{4}$$

формуласы буенча чишелә.

1 нче мисал. $\sin x = \frac{1}{2}$ **тигезләмәсен чишәргә.**

Чишү (1) формула буенча табабыз:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ **(п. 106 ны кара) булганга күрә, җавапта**

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \ (n \in Z)$ **килеп чыга:**

2 нче мисал. $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **тигезләмәсен чишәргә.**

Чишү. (2) формуладан файдаланып, табабыз:

$$3x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \ n \in Z.$$

$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ **(п 107 не кара)**

булганга күрә, $3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ **була, моннан**

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \ n \in Z.$$

3 нче мисал. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$ **тигезләмәсен чишәргә.**

Чишү. (3) формуладан файдаланып, табабыз:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$$

моннан:

$$x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Кайбер очракларда аерым формулалардан файдалану уңай икәнен искәртеп үтәбез:

1) $\sin x = 0; \ x = \pi n.$
2) $\sin x = 1; \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$
3) $\sin x = -1; \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$
4) $\cos x = 0; \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$
5) $\cos x = 1; \ x = 2\pi n.$
6) $\cos x = -1; \ x = \pi + 2\pi n.$
7) $\operatorname{tg} x = 0; \ x = \pi n.$
8) $\operatorname{ctg} x = 0; \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Барлык формулаларда да n **— теләсә нинди бөтен сан.**

155. Тригонометрик тигезләмәләр чишүнең методлары. Тригонометрик тигезләмәләрне чишүнең төп ике методы бар: 1) тапкырлаучыларга таркату методы; 2) яңа үзгәрешлене кертү методы.

1 нче мисал. $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. 1 не сул кисәккә күчерәбез һәм, сул кисәкнең рәвешен үзгәртеп, аны тапкырлаучыларга таркатабыз.

$\sin 5x+\sin x$ өчен синуслар суммасы формуласын кулланабыз һәм $2\sin^2 x=1-\cos 2x$ икәненнән файдаланабыз. Ул вакытта тигезләмә $2\sin 3x\cos 2x+(1-\cos 2x)-1=0$ рәвешен алыр һәм алга таба $\cos 2x(2\sin 3x-1)=0$ булыр. Хәзер мәсьәлә $\cos 2x=0$; $3\sin 3x-1=0$ тигезләмәләр җыелмасын чишүгә кайтарылып калды.

$\cos 2x=0$ тигезләмәсеннән табабыз: $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, ягъни $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

$2\sin 3x-1=0$ тигезләмәсеннән $\sin 3x=\frac{1}{2}$ не табабыз һәм димәк, $3x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k$ була; $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ булганлыктан, $3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ һәм $x=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

2 нче мисал. $2\cos^2 x+14\cos x=3\sin^2 x$ тигезләмәсен чишәргә,

Чишү. $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ булганга күрә, тигезләмәне түбәндәгечә күчереп язарга була:

$2\cos^2 x+14\cos x-3(1-\cos^2 x)=0$, шулай булгач, $5\cos^2 x+14\cos x-3=0$.

$\cos x=y$ дип алсак, $5y^2+14y-3=0$ квадрат тигезләмәсе килеп чыга. Бу тигезләмәне чишеп табабыз: $y_1=\frac{1}{5}$, $y_2=-3$. Димәк, я $\cos x=\frac{1}{5}$ була, моннан $x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, я $\cos x=-3$, бу тигезләмәнең чишелешләре булмый, чөнки $|\cos x|\leqslant 1$.

Җавап: $x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n$, $n\in Z$.

Яңа үзгәрешлене кертү методы *бериш* тигезләмәләр дип аталган тигезләмәләрне, ягъни $a\sin x+b\cos x=0$ (1 нче дәрәҗәдәге бериш тигезләмә), $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (2 нче дәрәҗәдәге бериш тигезләмә) рәвешендәге тигезләмәләрне чишкәндә кулай.

$a\neq 0$ очрагын карыйк. Беренче тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos x$ ка, икенче тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos^2 x$ ка бүлик. Нәтиҗәдә $\operatorname{tg} x$ ка карата алгебраик булган, һәм шуңа күрә $\operatorname{tg} x=y$ алыштыруы белән чишелә торган түбәндәге тигезләмәләрне табабыз:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0,$$
$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

$a \neq 0$ булганда, x ның $\cos x = 0$ булырлык кыйммәтләре бериш тигезләмәне канәгатьләндерми. Шуңа күрә $a \neq 0$ очрагында бериш тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos x$ (яки $\cos^2 x$) ка бүлү тамырын югалтуга китерми.

3 нче мисал. $8 \sin x - 7 \cos x = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике кисәген дә буынлап $\cos x$ ка бүлеп, $8 \operatorname{tg} x - 7 = 0$ не табабыз. Моннан $\operatorname{tg} x = \frac{7}{8}$ һәм $x = \operatorname{arctg} \frac{7}{8} + \pi n,\ n \in Z$.

4 нче мисал. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Әлеге икенче дәрәҗә бериш тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos^2 x$ ка бүлеп, $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$ тигезләмәсен табабыз.

Алга таба $u = \operatorname{tg} x$ дип алабыз, ул вакытта $u^2 + 2u - 3 = 0$ квадрат тигезләмәсенә киләбез, аннан $u_1 = -3$, $u_2 = 1$.

$\operatorname{tg} x = -3$, $\operatorname{tg} x = 1$ тигезләмәләр җыелмасын чишсәк:

$$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

5 нче мисал. $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Табабыз:

$$5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x);$$
$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

Табылган тигезләмәдә $a \sin^2 x$ рәвешендәге буын юк, ягъни $a = 0$. Биредә тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos^2 x$ ка бүләргә ярамый, чөнки $\cos^2 x = 0$ булган x ның кыйммәтләре (1) тигезләмәне канәгатьләндерә, шуңа күрә $\cos^2 x$ ка бүлү тамырларны югалтуга китерә. Икенче төрле эшлибез: (1) тигезләмәнең сул кисәген тапкырлаучыларга таркатып,

$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$ не табабыз.

Инде хәзер мәсьәлә

$$\cos x = 0; \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0 \qquad (2)$$

тигезләмәләр җыелмасын чишүгә кайтарылып кала.

(2) җыелманың беренче тигезләмәсеннән $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ ны табабыз.

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ булган беренче дәрәҗә бериш тигезләмәнең ике кисәген дә $\cos x$ ка бүлеп, $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$ не табабыз, моннан $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$, ягъни $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ була.

Шулай итеп, тигезләмәнең ике төрле чишелешен таптык:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad k\in Z,\quad n\in Z.$$

156*. Универсаль алыштырып кую (тригонометрик тигезләмәләр өчен). Әгәр $x\neq\pi+2\pi n$ булса, түбәндәге бердәйлекләр дөрес була:

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Чыннан да, табабыз:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x.$$

Шулай итеп, $\sin x$ һәм $\cos x$ $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ аша рациональ аңлатыла, шуңа күрә дә $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$ алыштырып куюы *универсаль* дип атала. Ул $R(\sin x;\ \cos x)=0$ (биредә $R(\sin x;\ \cos x)$ — $\sin x$ һәм $\cos x$ ка карата рациональ аңлатма) рәвешендәге тигезләмәләрне чишкәндә кулланыла ала.

Универсаль алыштырып кую $x\neq\pi+2\pi n$ булганда гына кулланганга күрә, $x=\pi+2\pi n$ саннары бирелгән тигезләмәнең чишелешләре түгелме икәнен тикшереп карарга кирәк.

1 нче мисал. $3\sin x+4\cos x=5$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $\sin x$ һәм $\cos x$ ны $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ аша (1) формулалар белән аңлатып һәм $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$ дип алып, рациональ тигезләмәгә киләбез:

$$3\cdot\frac{2u}{1+u^2}+4\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}=5.$$

Бу тигезләмәне чишеп, $u=\frac{1}{3}$ не табабыз. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ тигезләмәсеннән табабыз:

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n, \text{ ягъни } x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Тикшерү ярдәмендә $x=\pi+2\pi n$ кыйммәтләре бирелгән тигезләмәне канәгатьләндермәгәнен күрәбез. Шулай итеп, **җавап:**

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi r,\ n\in Z.$$

2 нче мисал. $3\sin 2x+\cos 2x+1=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Универсаль алыштырып куюдан файдаланабыз. $\sin 2x$ һәм $\cos 2x$ ны $\operatorname{tg} x$ аша аңлатып һәм $\operatorname{tg} x=u$ дип алып, рациональ тигезләмә табабыз:

$$\frac{6u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}+1=0,$$

моннан $u=-\frac{1}{3}$. $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{3}$ тигезләмәсеннән

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k\ (k\in Z) \text{ ны табабыз.}$$

Ләкин тагын бирелгән тигезләмәне x ның $2x=\pi+2\pi n$ ягъни $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ кыйммәтләре канәгатьләндерәме икәнен тикшерергә кирәк. Табабыз:

$$3\sin(\pi+2\pi n)+\cos(\pi+2\pi n)+1=$$
$$=3\sin\pi+\cos\pi+1=3\cdot 0-1+1=0.$$

Тикшерү $\frac{\pi}{2}+\pi n$ кыйммәтләре тигезләмәнең чишелешләре икәнен күрсәтә. Шулай итеп, бирелгән тигезләмәнең чишелешләре түбәндәгечә:

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k\in Z,\ n\in Z.$$

157*. Ярдәмче аргумент кертү методы (тригонометрик тигезләмәләр өчен). Кайвакыт тригонометрик тигезләмәләрне чишкәндә $a\cos x+b\sin x$ аңлатмасын $A\sin(x+\varphi)$ (биредә

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

(п. 132 не кара), аңлатмасына алыштыру файдалы. Бу очракта φ не ***ярдәмче аргумент*** дип атыйлар.

1 нче мисал. $8\cos x + 15\sin x = 17$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Тигезләмәнең ике кисәген дә $\sqrt{8^2+15^2}=17$ гә бүлеп, табабыз:

$$\frac{8}{17}\cos x + \frac{15}{17}\sin x = 1.$$

$\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$ булганга күрә, $\frac{8}{17} = \sin\varphi$ һәм $\frac{15}{17} = \cos\varphi$ булырлык φ бар. Соңгы тигезләмәне түбәндәгечә күчереп язайык:

$$\sin\varphi\cos x + \sin x\cos\varphi = 1.$$

Ләкин $\sin\varphi\cos x + \sin x\cos\varphi = \sin(x+\varphi)$. Димәк, $\sin(x+\varphi) = 1$, моннан $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi \cdot \varphi = \arcsin\frac{8}{17}$ булганга күрә, нәтиҗәдә бирелгән тигезләмәнең түбәндәге чишелешләрен табабыз: $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{8}{17} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

2 нче мисал. $5\sin x - 12\cos x + 13\sin 3x = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Табабыз:

$$\sqrt{5^2+12^2}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}\sin x - \frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}\cos x\right) = -13\sin 3x.$$

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = -\sin 3x.$$

$$\frac{5}{13} = \cos\varphi;\ \frac{12}{13} = \sin\varphi \text{ дип куйыйк:}$$

$$\sin x\cos\varphi - \cos x\sin\varphi = -\sin 3x$$

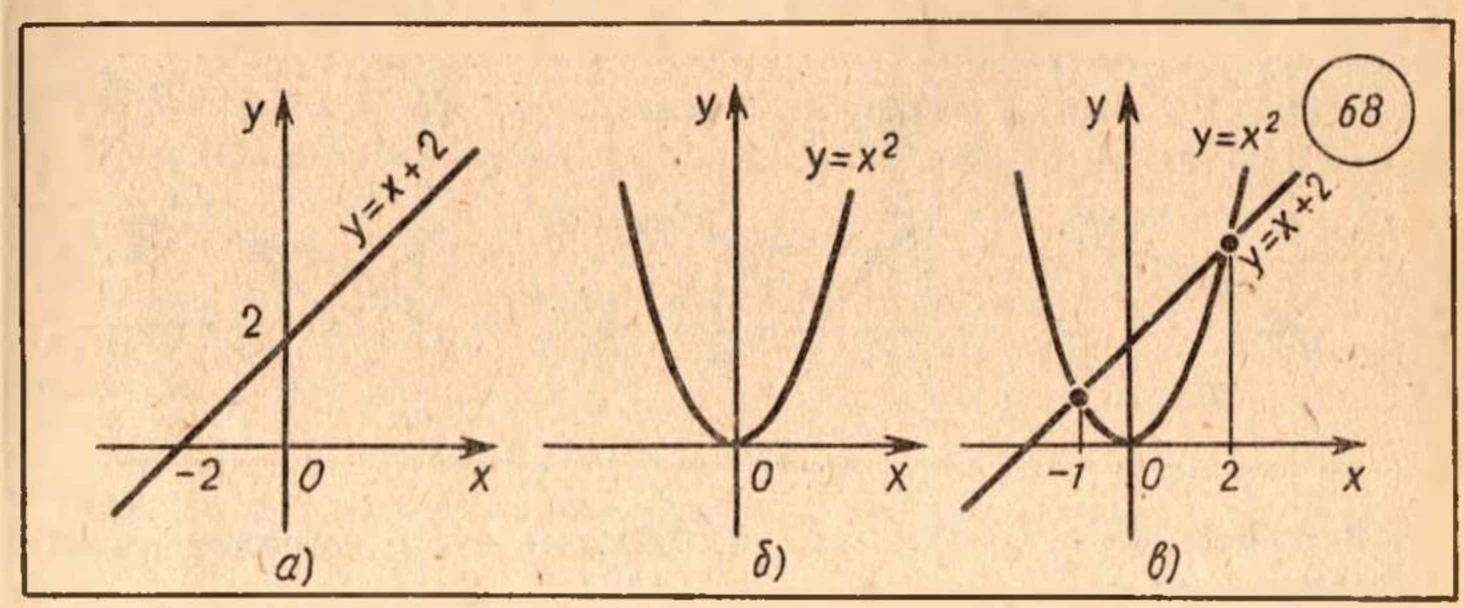
һәм, димәк:

$$\sin(x-\varphi) + \sin 3x = 0;\ 2\sin\left(2x - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

$\sin\left(2x - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(x + \frac{\varphi}{2}\right) = 0$ тигезләмәләр җыелмасын чишкәннән соң $x = \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \pi k$ килеп чыга. $\varphi = \arccos\frac{5}{13}$ икәнен истә тотып, нәтиҗәдә бирелгән тигезләмәнең түбәндәге чишелешләрен табабыз:

$$x = \frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi n}{2},\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

158. Тигезләмәләрне график юл белән чишү. Практикада бик еш тигезләмәләрне *график метод* белән чишү файдалы-



рак. Ул түбәндәгедән гыйбарәт: $f(x)=0$ тигезләмәсен чишү өчен $y=f(x)$ функциясенең графигын төзиләр һәм графикның x күчәре белән кисешү нокталарының абсциссаларын табалар. Мәсәлән, $ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсен чишү өчен $y=ax^2+bx+c$ квадратик функциясенең графигын төзү һәм бу графикның x күчәре белән кисешү нокталарының абсциссаларын табу җитә.

Мәсәлән, $y=-x^2+6x-5$ функциясенең графигы (59 нчы *в* рәсем) x күчәрен (1; 0) һәм (5; 0) нокталарында кисеп үтә, димәк, $-x^2+6x-5=0$ тигезләмәсенең ике тамыры була: $x_1=1$ һәм $x_2=5$, $y=x^2-4x+5$ функциясенең графигы (59 нчы *б* рәсем) абсцисса күчәрләрен кисми, димәк $x^2-4x+5=0$ тигезләмәсенең реаль тамырлары юк.

Еш кына $f(x)=0$ тигезләмәсен тигезкөчле $g(x)=h(x)$ тигезләмәсе белән алыштыралар, аннан соң $y=g(x)$ һәм $y=h(x)$ функцияләренең графикларын төзиләр (әгәр бу $y=f(x)$ функциясенең графигын төзүгә караганда җиңелрәк булса) һәм төзелгән графикларның кисешү нокталарының абсциссаларын табалар.

Мәсәлән, $x^3-3x+1=0$ тигезләмәсен чишү өчен тигезләмәне $x^3=3x-1$ рәвешенә китерергә һәм бу графикларның кисешү нокталарының абсциссаларын табарга була.

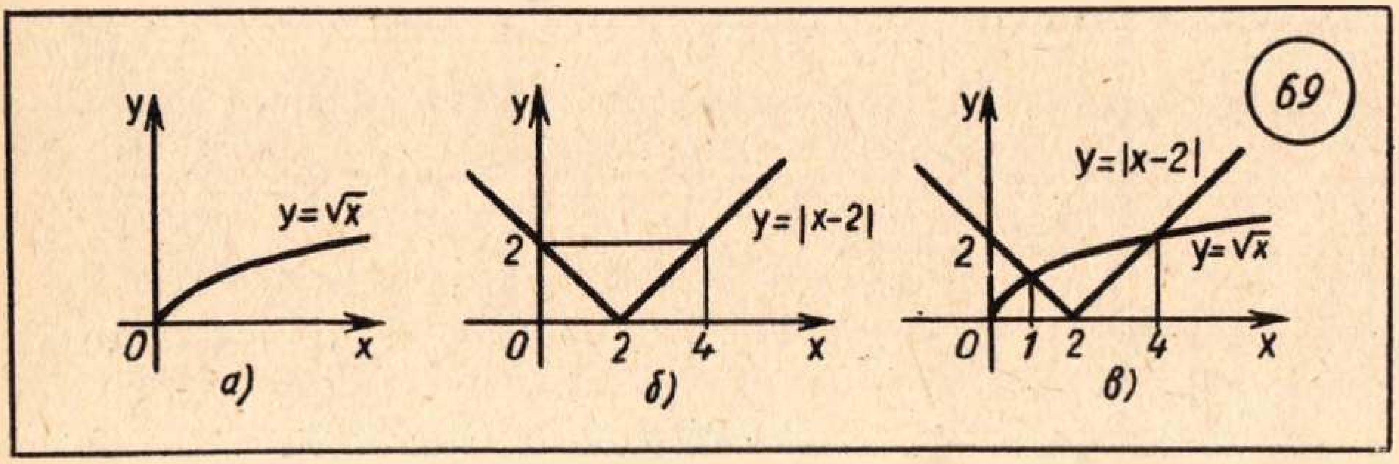
1 нче мисал. $x^2-x-2=0$ тигезләмәсен график юл белән чишәргә.

Чишү. Тигезләмәне

$$x^2=x+2$$

рәвешендә язу максатка ярашлы. Хәзер тигезләмәне чишү $y=x^2$ һәм $y=x+2$ функция графикларының кисешү нокталарының абсциссаларын табуга китерелүе мөмкин (68 нче рәсем, *а*, *б*).

68 нче *в* рәсемдә бер үк координаталар системасында $y=x^2$ һәм $y=x+2$ функцияләре графиклары төзелгән. Бу графикларның кисешү нокталары A һәм B ның абсциссала-



69

рын табабыз: $x_A = -1$; $x_B = 2$. Шулай итеп, бирелгән тигезләмәнең ике тамыры бар: -1; 2.

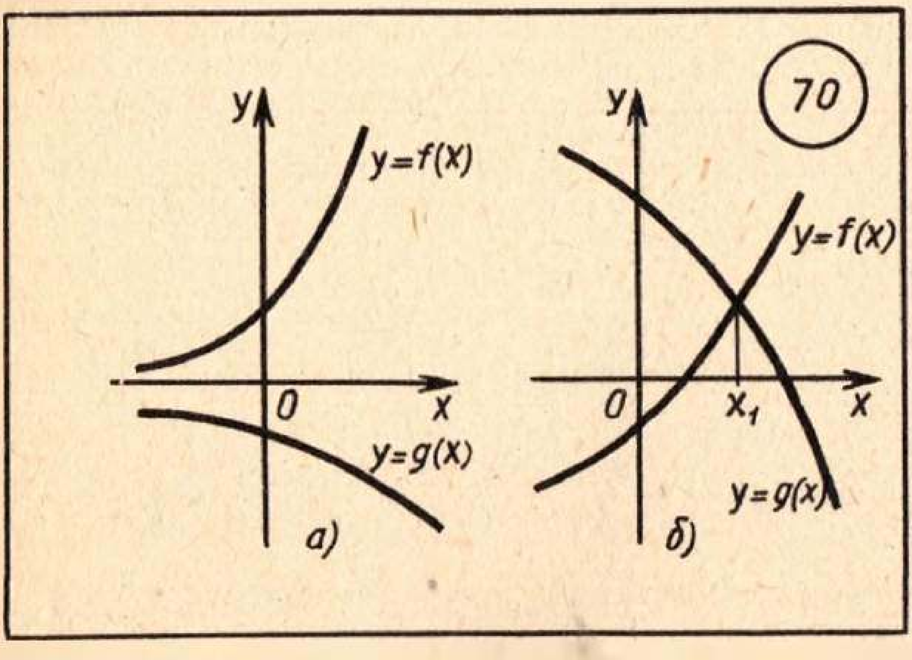
2 нче мисал. $\sqrt{x} = |x-2|$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бер координаталар системасында $y=\sqrt{x}$ һәм $y=|x-2|$ функцияләренең графикларын төзибез. $y=\sqrt{x}$ функциясенең графигы 69 нчы *а* рәсемдә сурәтләнгән. $y=|x-2|$ функциясе графигын төзү өчен ике очракны карыйк: әгәр $x \geqslant 2$ булса, $x-2 \geqslant 0$ була һәм шуңа күрә $|x-2| = x-2$; әгәр дә $x < 2$ булса, $x-2 < 0$ була, һәм шуңа күрә $|x-2| = 2-x$. Шулай итеп, $y = |x-2|$ язуы

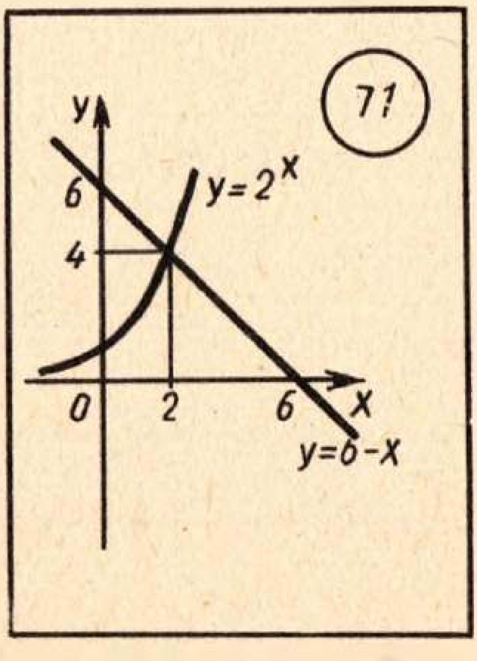
$$y = \begin{cases} x-2, & \text{әгәр } x \geqslant 2 \text{ булса,} \\ 2-x, & \text{әгәр } x < 2 \text{ булса,} \end{cases}$$

язуына эквивалентлы.

Бу функциянең графигы 69 нчы *б* рәсемдә сурәтләнгән. 69 нчы *в* рәсемдә ике график бер үк координаталар системасында сурәтләнгән. Алар абсциссалары $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ булган ике ноктада кисешәләр. Бу бирелгән тигезләмәнең ике тамыры.



70



71

$f(x)=g(x)$ тигезләмәсен график юл белән чишү методы тигезләмә чишүнең *функциональ методы* белән бәйләнгән. Ул шуңа нигезләнгән: әгәр $y=f(x)$ һәм $y=g(x)$ функцияләренең берсе үссә, ә икенчесе кимесә, $f(x)=g(x)$ тигезләмәсенең я тамырлары булмый (70 нче *а* рәсем), я бер генә тамыры була (70 нче *б* рәсем).

3 нче мисал. $2^x=6-x$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $x=2$ тигезләмәнең тамыры булуын җиңел искәрәбез. $y=2^x$ функциясе үсә, ә $y=6-x$ функциясе кими, шуңа күрә тигезләмәнең башка тамырлары юк (71 нче рәсем).

159*. Параметрлы тигезләмәләр. x, a үзгәрешлеле тигезлек

$$f(x;\ a)=0$$

бирелсен ди.

Әгәр һәрбер реаль a кыйммәте өчен бу тигезләмәне x ка карата чишү мәсьәләсе куелса, ул вакытта $f(x;\ a)=0$ тигезләмәсе *x үзгәрешлеле* һәм *a параметрлы* тигезләмә дип атала. a параметрлы тигезләмәне чишү — a ның һәр кыйммәте өчен x ны бу тигезләмәне канәгатьләндерүче кыйммәтләрен табу ул.

1 нче мисал. $2a(a-2)x=a-2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Барыннан да элек параметрның x янындагы коэффициентларын нульгә әйләндерүче кыйммәтләрен карап үтик (параметрның бу кыйммәтләрендә тигезләмәнең ике кисәген дә x янындагы коэффициентка бүлеп булмый, ә параметрның калган кыйммәтләрендә бүлеп була). Мондый кыйммәтләр булып $a=0$, $a=2$ тора, $a=0$ булганда тигезләмә $0\cdot x=-2$ рәвешен ала. Бу тигезләмәнең чишелешләре юк. $a=2$ булганда тигезләмә $0\cdot x=0$ рәвешендә була, мондый тигезләмәнең чишелеше булып теләсә нинди реаль сан хезмәт итә. $a\neq 0$ һәм $a\neq 2$ булганда тигезләмәне $x=\dfrac{a-2}{2a(a-2)}$ рәвешенә китерергә мөмкин, моннан $x=\dfrac{1}{2a}$ не табабыз.

Шулай итеп, әгәр $a=0$ булса, тигезләмәнең тамырлары булмый; әгәр $a=2$ булса, тамыр — теләсә нинди реаль сан була; әгәр $a\neq 0$ һәм $a\neq 2$ булса, $x=\dfrac{1}{2a}$ була.

2 нче мисал. $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Параметрның $a=1$ кыйммәтен аерып күрсәтик. Эш менә нәрсәдә, $a=1$ булганда, бирелгән тигезләмә квадратик түгел, $a\neq 1$ булганда ул квадратик. Димәк, аны һәр очракта үзенчә чишәргә кирәк. $a=1$ булганда тигезләмә $6x+7=0$ рәвешендә була, моннан $x=-\dfrac{7}{6}$ не табабыз. $a\neq 1$ очрагында квадрат тигезләмә өчен параметрның тигезләмәнең дискриминантын нульгә әйләндерүче кыйммәтләрен аерып күрсәтик. $\frac{D}{4} = 5a + 4$. Димәк, $a = -\frac{5}{4}$ без игътибар итәргә тиешле параметрның кыйммәте.

Әгәр $a < -\frac{4}{5}$ булса, $D < 0$, һәм, димәк, тигезләмәнең реаль тамырлары юк; әгәр $a > -\frac{4}{5}$ һәм $a \neq 1$ булса, $D > 0$ була һәм тамырлары:

$$x = -\frac{2(a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1},$$

әгәр $a = -\frac{4}{5}$ булса, $D = 0$ һәм тамыры:

$$x = -\frac{2a+1}{a-1}, \text{ ягъни } x = -\frac{1}{3}.$$

Шулай итеп, $a < -\frac{4}{5}$ булганда, реаль тамырлар юк; $a = 1$ булганда, $x = -\frac{7}{6}$; $a = -\frac{4}{5}$ булганда, $x = -\frac{1}{3}$; $a > -\frac{4}{5}$ һәм $a \neq 1$ булганда

$$x = -\frac{(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

3 нче мисал. a параметрының нинди кыйммәтләре өчен

$$x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

тигезләмәсенең ике төрле тискәре тамыры була?

Чишү. Тигезләмәнең ике төрле реаль тамырлары x_1 һәм x_2 булу шартыннан чыгып, аның дискриминанты уңай була дибез. Табабыз:

$$D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24 = 4(a-1)(a-6).$$

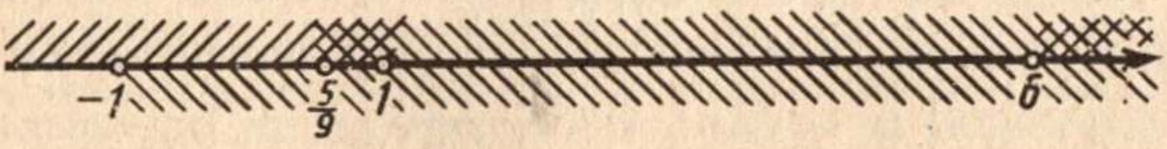
Димәк, $4(a-1)(a-6) > 0$ тигезсезлеге үтәлергә тиеш.

Виет теоремасы буенча табабыз:

$$x_1 + x_2 = -2(a+1),$$
$$x_1 x_2 = 9a - 5$$

$x_1 < 0$ һәм $x_2 < 0$ шарты үтәлсен өчен $-2(a+1) < 0$ һәм $9a - 5 > 0$ булырга тиеш.

Нәтиҗәдә түбәндәге тигезсезлекләр системасына киләбез (п. 177 не кара):



72

$$\begin{cases} 4(a-1)(a-6)>0, \\ -2(a+1)<0, \\ 9a-5>0. \end{cases}$$

Системаның беренче тигезләмәсеннән (п. 180, 183 не кара) $a<1$; $a>6$; икенчесеннән $a>-1$; өченчесеннән $a>\frac{5}{9}$ килеп чыга. Координаталы туры ярдәмендә (72 нче рәсем) табабыз: $\frac{5}{9}<a<1$ яки $a>6$.

§ 15. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр

160. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләрне чишү. *Ике үзгәрешлеле* $f(x;\ y)=0$ тигезләмәсен тикшерик.

Үзгәрешлеләрнең ике үзгәрешлеле тигезләмәне дөрес тигезлеккә әйләндерүче кыйммәтләр пары *тигезләмәнең чишелеше* дип атала. Әгәр ике үзгәрешле — x, y белән тигезләмә бирелсә, аның чишелешенең язмасында беренче урында x үзгәрешлесенең кыйммәте, ә икенче урында — y кыйммәте куела.

(10; 0), (16; 2), (—2; —4) парлары $x-3y=10$ тигезләмәсенең чишелешләре була. Шул ук вакытта (1; 5) пары тигезләмәнең чишелеше булмый.

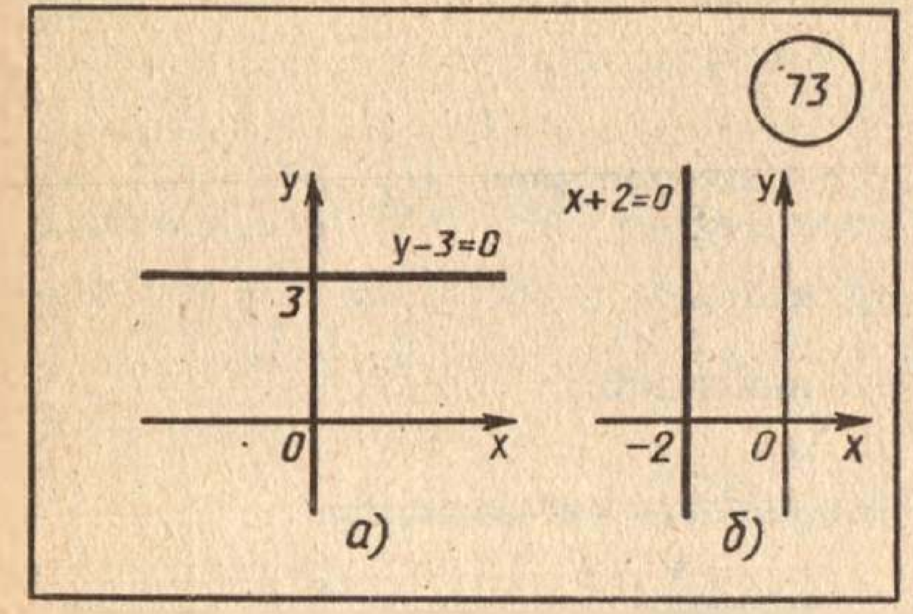
Бу тигезләмәнең башка чишелешләре дә бар. Аларны табу өчен бер үзгәрешлене икенчесе аша аңлату җайлы, мәсәлән, x ны y аша аңлатып $x=10+3y$ ны табабыз. y ның ирекле кыйммәтен сайлап алып, x ның тиңдәшле кыйммәтен исәпләп чыгарабыз. Мәсәлән, әгәр $y=7$ булса, $x=10+3\cdot7=31$, димәк, (31; 7) пары тигезләмәнең чишелеше була; әгәр $y=-2$ булса, $x=10+3(-2)=4$, димәк, (4; —2) пары шулай ук бирелгән тигезләмәнең чишелеше була һ. б.

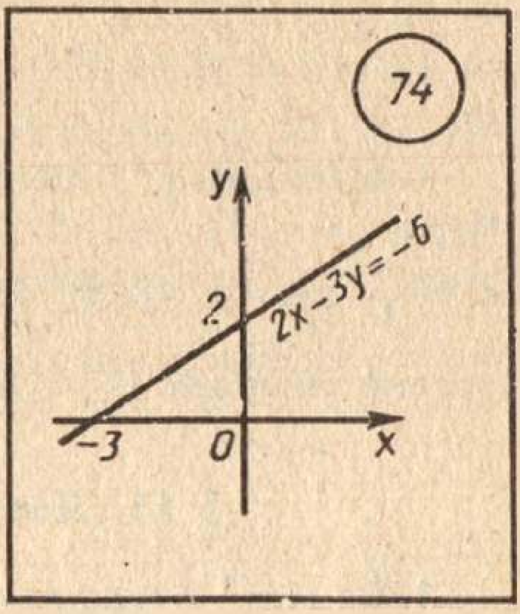
Ике үзгәрешлеле тигезләмәләрнең чишелешләре бер үк булса, алар *тигезкөчле тигезләмәләр* дип аталалар.

Ике үзгәрешлеле тигезләмәләр өчен тигезләмәнең тигезкөчле рәвешүзгәртүләре турындагы 5.1 һәм 5.2 теоремалары (п. 135 не кара) дөрес була.

161. Ике үзгәрешлеле тигезләмәләрнең графиклары. Ике үзгәрешлеле $f(x;\ y)=0$ тигезләмәсе бирелсен ди. Әгәр аның барлык чишелешләрен координаталар яссылыгындагы нокталар белән сурәтләсәк, яссылыкта ниндидер нокталар күплеге килеп чыгар. Әлеге нокталар күплеге $f(x;\ y)=0$ тигезләмәсенең графигы дип атала.

Мәсәлән, $y-x^2=0$ тигезләмәсенең графигы $y=x^2$ параболасы (9 нчы рәсем); $y-x=0$ тигезләмәсенең графигы — туры (беренче һәм өченче координаталар почмакларының биссектрисалары) (8 нче рәсем); $y-3=0$ тигезләмәсенең графигы





x күчәренә параллель булган туры (73 нче рәсем, *а*), ә $x+2=0$ тигезләмәсенеке — y күчәренә параллель булган туры (73 нче рәсем, *б*) була. $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=0$ тигезләмәсенең графигы бер нокта — (1; 2) була, чөнки шушы ноктаның координаталары гына бу тигезләмәне канәгатьләндерә.

162. Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә һәм аның графигы. $ax+by=c$ рәвешендәге тигезләмә (биредә x, y — үзгәрешлеләр, ә a, b, c — саннар) сызыкча тигезләмә дип атала; a һәм b саннары үзгәрешлеләрнең коэффициентлары, c — иркле буын дип атала.

Үзгәрешле коэффициентларының берсе генә нульгә тигез булмаса да, теләсә нинди $ax+by=c$ сызыкча тигезләмәсенең графигы туры була; әгәр $b=0$ булса, бу туры y күчәренә параллель, әгәр $a=0$ булса, бу туры x күчәренә параллель.

Мисал. $2x-3y=-6$ тигезләмәсенең графигын төзергә.

Чишү. Бу сызыкча тигезләмәнең графигы туры була. Турыны төзү өчен аның ике ноктасын белү җитә, $2x-3y=-6$ тигезләмәсенә x урынына 0 кыйммәтен куеп, $-3y=-6$ ны табабыз, моннан $y=2$, $2x-3y=-6$ тигезләмәсенә y урынына 0 кыйммәтен куеп, $2x=-6$ ны табабыз, моннан $x=-3$.

Шулай итеп, графикның ике ноктасын таптык: (0; 2) һәм (−3; 0). Алар аша туры үткәреп, $2x-3y=-6$ тигезләмәсенең графигын табабыз (74 нче рәсем).

Әгәр сызыкча тигезләмә $0\cdot x+0\cdot y=c$ рәвешендә булса, ике очрак булуы мөмкин:

1) $c=0$; бу очракта тигезләмәне теләсә нинди $(x; y)$ пары канәгатьләндерә, шуңа күрә тигезләмәнең графигы барлык координаталар яссылыгы була;

2) $c\neq 0$; бу очракта тигезләмәнең чишелеше булмый, димәк, аның графигында бер нокта да булмый.

§ 16. Тигезләмәләр системалары

163. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системалары. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә $f(x;\ y)=0$ һәм $g(x;\ y)=0$ бирелсен.

Әгәр ике үзгәрешлеле ике тигезләмәнең барлык гомуми чишелешләрен табу мәсьәләсе куелса, *тигезләмәләр системасын* чишәргә кирәк дип әйтәләр. Үзгәрешлеләрнең системаның һәр тигезләмәсен дөрес тигезлеккә әйләндерүче һәрбер кыйммәтләр пары *тигезләмәләр системасының чишелеше* дип атала. Системаны чишү — аның барлык чишелешләрен табу яки аларның булмавын исбатлау ул. Системаны тәшкил итүче тигезләмәләр фигуралы җәя белән берләшәләр. Мәсәлән,

$$\begin{cases} x-3x=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

язуы $x-3y=10$ һәм $3x-2y=2$ тигезләмәләренең системаны тәшкил итүен аңлата. Әгәр ике системаның чишелешләре бер үк булса, бу тигезләмәләр системалары *тигезкөчле* дип атала. Әгәр, аерым очракта, ике системаның да чишелешләре булмаса, бу системалар шулай ук тигезкөчле була. Тигезләмәләр системасын чишү өчен гадәттә, бирелгән системаны гадирәк, яки ниндидер сәбәпләр буенча «җайлырак» булган, ләкин беренчесенә тигезкөчле икенче система белән алыштыралар. Мондый алыштыру мөмкинлеге түбәндәге ике теореманы китереп чыгара.

Т.5.5. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы бирелсен. Әгәр системаның бер тигезләмәсен үзгәрешсез калдырып, ә системаның икенче тигезләмәсе аңа тигезкөчле тигезләмә белән алыштырылса, килеп чыккан система бирелгән системага тигезкөчле була.

Мәсәлән,

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

системалары тигезкөчле.

Нәтиҗә. *Әгәр системаның һәр тигезләмәсе тигезкөчле тигезләмә белән алыштырылса, бирелгәнгә тигезкөчле система килеп чыга.*

Шулай итеп, түбәндәге системалар тигезкөчле була:

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} x=3y+10, \\ x=\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Т.5.6. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасы бирелсен. Әгәр системаның бер тигезләмәсен үзгәрешсез калдырып, ә икенче тигезләмә системаның ике тигезләмәсенең суммасы яки аермасы белән алыштырылса, килеп чыккан система бирелгәнгә тигезкөчле була.

Шулай итеп,

$$\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} (x-3y)+(3x-2y)=10+2, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$$

системалары тигезкөчле: без $x-3y=10$ тигезләмәсен бирелгән системаның ике тигезләмәсенең суммасы белән алыштырдык, ә $3x-2y=2$ тигезләмәсен үзгәрешсез калдырдык.

164. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын алыштырып кую юлы белән чишү. Алыштырып кую юлы түбәндәгедән гыйбарәт:

1) Системаның бер тигезләмәсен y ны x аша, яки x ны y аша аңлаткан рәвешкә китерәләр.

2) Табылган аңлатманы y урынына (яки x урынына) икенче тигезләмәгә куялар. Нәтиҗәдә бер үзгәрешлеле тигезләмә чыга.

3) Бу тигезләмәнең тамырларын табалар.

4) y ның x аша (яки x ның y аша) аңлатмаларын кулланып, тиңдәшле y (яки x) кыйммәтен табалар.

Мисал. $\begin{cases} x-3y=10, \\ x^2-24y=10 \end{cases}$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Беренче тигезләмәдән $x=3y+10$ ны табабыз, $3y+10$ аңлатмасын x урынына системаның икенче тигезләмәсенә куябыз. $(3y+10)^2-24y=100$ не табабыз, моннан $y_1=0$, $y_2=-4$ не табабыз, x ның тиңдәшле кыйммәтләрен $x=3y+10$ тигезләмәсеннән табабыз. $y=0$ булганда, $x=10$, $y=-4$ булганда, $x=-2$. Шулай итеп, системаның ике чишелеше бар: $(-2;\ -4)$ һәм $(10;\ 0)$.

165. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын кушу юлы белән чишү. *Кушу методы.* 5.5 һәм 5.6 (п. 163) теоремаларына нигезләнгән. Аның асылын мисаллар өстендә аңлатыйк.

1 нче мисал. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x-y=16 \end{cases}$ (1)

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Системаның икенче тигезләмәсенең ике кисәген дә 3 кә тапкырлап, 5.5 теоремасы буенча бирелгәнгә тигезкөчле булган система табабыз. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 9x-3y=48. \end{cases}$ (2)

Хәзер табылган системаның ике тигезләмәсен кушабыз. 5.6 теоремасы буенча

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ (2x+3y)+(9x-3y)=7+48 \end{cases}$$

системасы (2) системага тигезкөчле. (3) система үз чиратында

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 11x=55 \end{cases}$$

рәвешенә китерелә.

$11x=55$ тигезләмәсеннән $x=5$ килеп чыга. Бу кыйммәтне $2x+3y=7$ тигезләмәсенә куеп, $y=-1$ не табабыз.

Шулай итеп, $(5;\ -1)$ — (3) системаның чишелеше, димәк, аңа тигезкөчле булган (1) системасының да чишелеше була.

2 нче мисал. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ 2x^2+2y^2+x-3y-5=0 \end{cases}$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Әгәр системаның беренче тигезләмәсенең ике кисәген дә 2 гә тапкырласак һәм системаның икенче тигезләмәсеннән табылган тигезләмәне алсак, икенче дәрәҗә үзгәрешлеле буыннар үзара бетерешәләр:

$$(2x^2+2y^2+x-3y-5)-(2x^2+2y^2-4x+2y)=0,$$
$$5x-5y-5=0,$$
$$x-y-1=0.$$

Без гадирәк система таптык:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ x-y-1=0. \end{cases}$$

Аны алыштырып кую методы белән җиңел чишәргә була: $y=x-1$, димәк,

$$x^2+(x-1)^2-2x+(x-1)=0,$$
$$2x^2-3x=0,$$
$$x_1=0,\ x_2=1{,}5.$$

$x=0$ булганда, $y=x-1=0-1=-1$, $x=1{,}5$ булганда, $y=x-1=1{,}5-1=0{,}5$. Җавап: $(0;\ -1)$ һәм $(1{,}5;\ 0{,}5)$.

166. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын яңа үзгәрешлеләр кертү юлы белән чишү. *Яңа үзгәрешлеләр кертү* юлы ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын чишкәндә түбәндәге ысулларның берсендә кулланыла: 1) системаның бер тигезләмәсенә генә бер яңа үзгәрешле кертелә; 2) ике тигезләмә өчен дә бер үк вакытта ике үзгәрешле кертелә.

1 нче мисал. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5 \end{cases}$

системасын чишәргә.

Чишү. $\frac{x}{y}=z$ дип алыйк, ул вакытта $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ була һәм системаның беренче тигезләмәсе $z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}$ рәвешендә булыр. Табылган тигезләмәне яңа z үзгәрешлесенә карата чишик:

$$6z^2-13z+6=0,\ \text{моннан}$$

$$z_1=\frac{2}{3},\ z_2=\frac{3}{2}.$$

Шулай итеп, яки $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, ягъни $y=\frac{3x}{2}$, яки $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, ягъни $y=\frac{2x}{3}$ була.

Шулай итеп, бирелгән системаның беренче тигезләмәсе ике тигезләмәгә таркала: $y=\frac{3x}{2}$ һәм $y=\frac{2x}{3}$. Моның аркасында без ике система җыелмасын чишәргә тиеш:

$$\begin{cases} y=\frac{3x}{2}, \\ x+y=5 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} y=\frac{2x}{3}, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Беренче системадан $x=2$, $y=3$, икенчесеннән $x=3$, $y=2$ не табабыз.

Җавап: (2; 3) һәм (3; 2).

2 нче мисал.

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ xy+2(x+y)=26 \end{cases}$$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. $x+y=u$, $xy=v$ дип алыйк. Ул вакытта $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$ була һәм система

$$\begin{cases} u^2-2v+u=32, \\ v+2u=26 \end{cases} \qquad (1)$$

рәвешен ала.

Табылган системаны алыштырып кую методы белән чишәргә мөмкин. Икенче тигезләмәдә v ны u аша аңлатып, $v=26-2u$ дип алабыз. Һәм, нәтиҗәне беренче тигезләмәгә куеп,

$$u^2-2(26-2u)+u=32\ \text{не табабыз,}$$

$$u^2+5u-84=0,$$
$$u_1=-12,\ u_2=7.$$

Тиңдәшле рәвештә $v_1=50$, $v_2=12$ не табабыз.

Шулай итеп, (1) системаның ике чишелешен таптык:

$$\begin{cases} u_1=-12, \\ v_1=50 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} u_2=7, \\ v_2=12. \end{cases}$$

Баштагы үзгәрешлеләргә кайтып, ике система җыелмасын табабыз:

$$\begin{cases} x+y=-12, \\ xy=50 \end{cases} \quad \text{һәм} \quad \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12. \end{cases}$$

Аларның һәркайсын алыштырып кую методы белән чишәргә җиңел (мәсәлән, беренче тигезләмәдә y ны x аша аңлатып). Беренче системаның реаль чишелешләре юк, ә икенчесенең ике чишелеше бар: (3; 4) һәм (4; 3). Алар бирелгән системаның чишелешләре була да инде.

167. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын график юл белән чишү. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын график юл белән чишү өчен бер үк координаталар системасында тигезләмәләрнең графикларын төзергә һәм бу графикларның кисешү нокталарының координаталарын табарга кирәк.

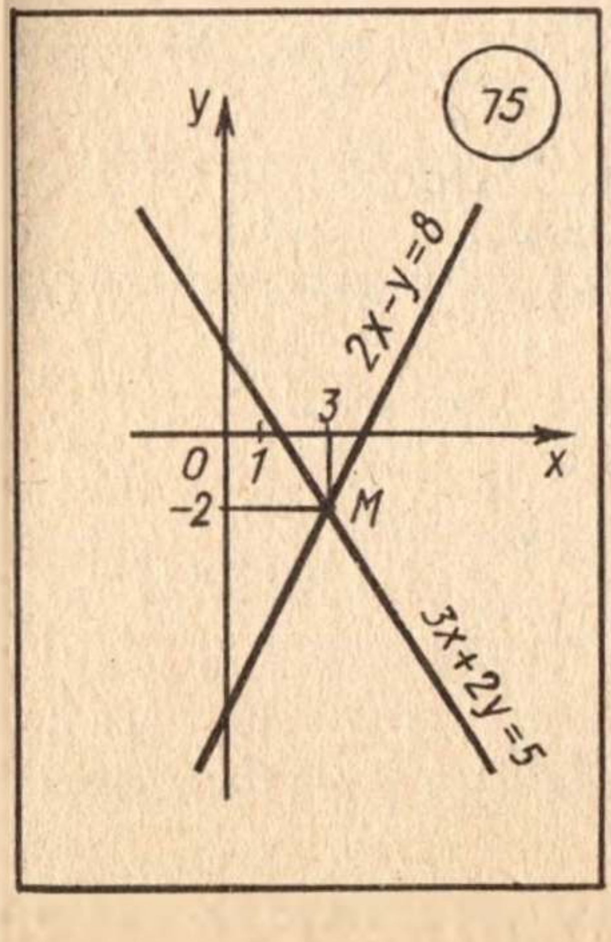
1 нче мисал. Сызыкча тигезләмәләр системасын график юл белән чишәргә:

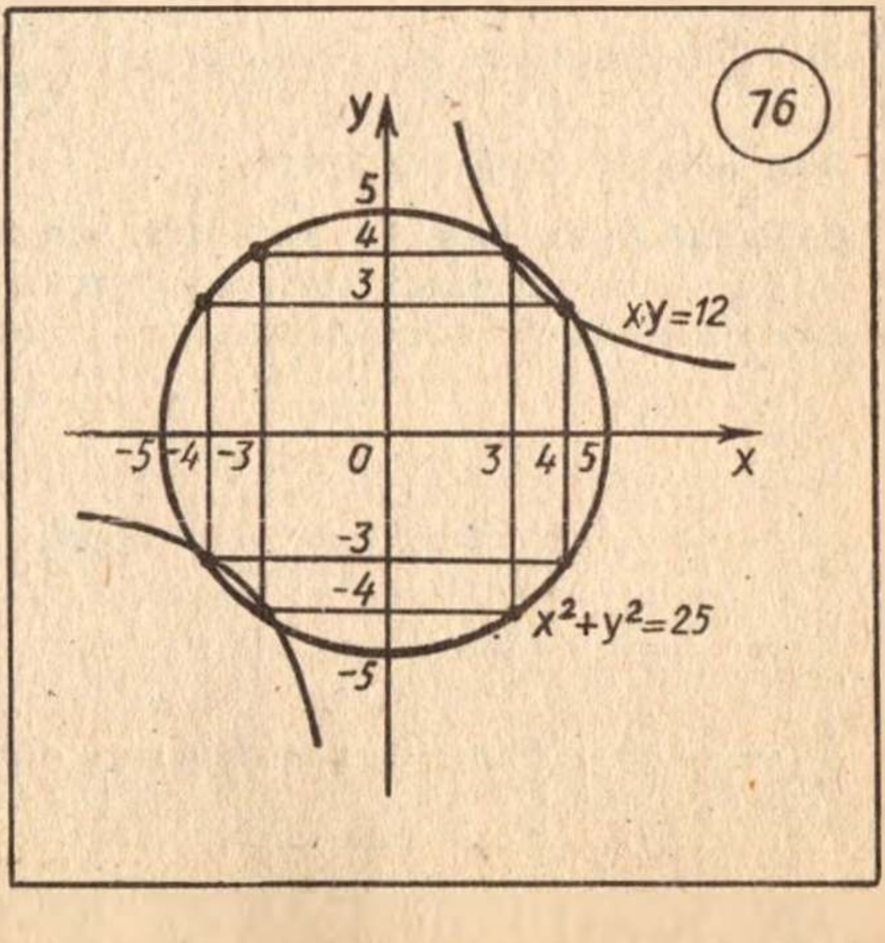
$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8. \end{cases}$$

Чишү. $3x+2y=5$ тигезләмәсенең графигын ике нокта, мәсәлән (1; 1) һәм (3; -2) нокталары буенча төзибез (75 нче рәсем).

$2x-y=8$ тигезләмәсенең графигын (0; -8) һәм (4; 0) нокталары буенча төзибез (75 нче рәсем).

Табылган турылар параллель түгел, аларның кисешүе бу-





лып $M(3;\ -2)$ ноктасы хезмәт итә. Димәк, $(3;\ -2)$ — бирелгән системаның чишелеше.

2 нче мисал. Тигезләмәләр системасын график юл белән чишәргә:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

Чишү. $x^2+y^2=25$ тигезләмәсенең графигы үзәге координаталар башлангычында, ә радиусы 5 кә тигез булган әйләнә була. $xy=12$ тигезләмәсенең графигы $y=\frac{12}{x}$ гиперболасы була (82 нче пунктны кара). Бер үк координаталар системасында графикларны төзеп (76 нчы рәсем), әйләнә белән гиперболаның кисешү нокталарының: A, B, C, D координаталарын табабыз: $A(4;\ 3)$; $B(3;\ 4)$; $C(-4;\ -3)$; $D(-3;\ -4)$. Димәк, бирелгән системаның чишелеше түбәндәгечә була:

$$(4;3),\ (3;\ 4),\ (-4;\ -3),\ (-3;\ -4).$$

168. Ике үзгәрешлеле сызыкча ике тигезләмә системасын тикшерү. Ике үзгәрешлеле сызыкча ике тигезләмә бирелсен һәм үзгәрешлеләр алдындагы барлык коэффициентлар нульдән аермалы булсын ди:

$$a_1x+b_1y=c_1 \text{ һәм } a_2x+b_2y=c_2.$$

Бу сызыкча тигезләмәләрнең һәркайсының графигы булып туры хезмәт итә (п. 162 не кара). Әгәр $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ булса, бу турылар бер ноктада кисешәләр; әгәр $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ булса, бу турылар тәңгәл киләләр; әгәр $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ булса, бу турылар параллель була һәм алар тәңгәл килмиләр.

Моннан шундый нәтиҗә чыга, *ике үзгәрешлеле сызыкча ике тигезләмә системасының*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ *булса, бердәнбер чишелеше була,*

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ *булса, чиксез күп чишелеше була,*

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ *булса, чишелешләре булмый.*

Мәсәлән,

$$\begin{cases} 5x+2y-3=0, \\ 3x+4y-7=0 \end{cases}$$

системасының бер чишелеше була, чөнки $\frac{5}{3} \neq \frac{2}{4}$.

$$\begin{cases} 2x-4y+1=0, \\ 4x-8y+3=0 \end{cases}$$

системасының чишелешләре булмый, чөнки $\frac{2}{4}=\frac{-4}{-8} \neq \frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} 3x-y-4=0, \\ -9x+3y+12=0 \end{cases}$$

системасының чишелешләре чиксез күп, чөнки $\frac{3}{-9}=\frac{-1}{3}=\frac{-4}{12}$.

169*. Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын тапкырлау һәм бүлү методлары белән чишү. Тигезләмәләр системаларын чишкәндә тапкырлау һәм бүлү методлары түбәндәге раслауга нигезләнгән:

Т.5.7. Әгәр $f_2(x;\ y)=g_2(x;\ y)$ тигезләмәсенең ике кисәге берьюлы $(x;\ y)$ ның бернинди кыйммәтендә нульгә әйләнмәсә, ул вакытта системалар

$$\begin{cases} f_1(x;\ y)=g_1(x;\ y), \\ f_2(x;\ y)=g_2(x;\ y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;\ y)=g_1(x;\ y), \\ f_1(x;\ y)\,f_2(x;\ y)=g_1(x;\ y)\,g_2(x;\ y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;\ y)=g_1(x;\ y), \\ \dfrac{f_1(x;\ y)}{f_2(x;\ y)}=\dfrac{g_1(x;\ y)}{g_2(x;\ y)} \end{cases}$$

тигезкөчле була.

1 нче мисал.

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y} \end{cases}$$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Беренче тигезләмәне карыйк. Аның сул кисәге $y=0$ булганда нульгә әйләнә. Әгәр $y=0$ булса, $x=0$ булганда уң кисәге 0 гә әйләнә. Ләкин $x=0$ булганда, сул кисәгенең мәгънәсе юк. Димәк, системаның беренче тигезләмәсенең ике кисәген дә нульгә әйләндерә торган $(x;\ y)$ парлары юк. Шуңа күрә икенче тигезләмәне үзгәрешсез калдырып, беренче тигезләмәне системаның ике тигезләмәсенең тапкырчыгышы белән алмаштырырга мөмкин. Табабыз:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{20y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{16x}{5y}}=(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}),\\ \sqrt{\frac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$$

Бу системаның беренче тигезләмәсен үзгәртеп, $8=(x+y)-(x-y)$, ягъни $y=4$ не табабыз. y ның табылган кыйммәтен икенче тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$\sqrt{\frac{4x}{5}}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}. \qquad (1)$$

Бу иррациональ тигезләмәне чишик (п. 150 не кара). Эзлекле рәвештә табабыз:

$$\left(\sqrt{\frac{4x}{5}}\right)^2=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})^2,$$

$$\frac{4x}{5}=x+4-2\sqrt{x^2-16}+x-4,$$

$$5\sqrt{x^2-16}=3x,$$

$$25x^2-400=9x^2,$$

$$x^2=25,\ x_1=5,\ x_2=-5.$$

Икенче кыйммәте (1) тигезләмәне канәгатьләндерми, ягъни чит тамыр була. Димәк, системаның бер чишелеше (5; 4) бар.

2 нче мисал. $\begin{cases}(x-y)xy=30,\\ (x+y)xy=120\end{cases}$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. $(x;\ y)$ ның бернинди дә кыйммәтендә системаның икенче тигезләмәсенең ике кисәге дә берьюлы нульгә әйләнми. Димәк, бирелгән системадан түбәндәге системага бүлү методын кулланып күчәргә мөмкин:

$$\begin{cases}(x-y)xy=30,\\ \frac{(x-y)xy}{(x+y)xy}=\frac{30}{120}.\end{cases}$$

Бу системаның икенче тигезләмәсеннән табабыз:

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{4},\ 4x-4y=x+y,\ 3x=5y,\ y=\frac{3x}{5}.$$

y ның x аша табылган кыйммәтен системаның беренче тигезләмәсенә куябыз. $\left(x - \frac{3}{5}x\right)$. $x \cdot \frac{3}{5}x = 30$ һәм алга таба $\frac{6}{25}x^3 = 30$, $x^3 = 125$, $x = 5$ килеп чыга. $y = \frac{3}{5}x$ тигезләмәсеннән $x = 5$ булса, $y = 3$ булганын табабыз. Шулай итеп, (5; 3) — системаның чишелеше.

170. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр системалары. Күрсәткечле һәм логарифмик тигезләмәләр системасын чишү нинди дә булса принципиаль яңа моментларны үз эченә алмый. Логарифмик һәм күрсәткечле тигезләмәләрне чишүдәге гадәти алымнар (п. 151, 152 не кара) һәм тигезләмәләр системасын чишүдәге гадәти алымнар кулланыла (п. 164—166, 169 ны кара).

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases}\log_2 x + \log_4 y = 4,\\ 3^{x^2} = 9 \cdot 3^{15y+2}.\end{cases}$$

Чишү. Системаның беренче тигезләмәсен карыйк. $\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2$ икәненнән файдаланыйк (п. 121 не кара). Ул вакытта тигезләмәне $\log_4 x^2 + \log_4 y = 4$ рәвешендә язарга мөмкин һәм алга таба $\log_4 x^2 y = 4$ була (п. 120 не кара), моннан $x^2 y = 4^4$, ягъни $x^2 y = 256$ була.

Хәзерге системаның икенче тигезләмәсен карыйк. Табабыз:

$$3^{x^2} = 3^2 \cdot 3^{15y+2}, \quad x^2 = 15y + 4.$$

Мәсьәлә түбәндәге тигезләмәләр системасын чишүгә китерелде:

$$\begin{cases}x^2 y = 256,\\ x^2 = 15y + 4.\end{cases}$$

Беренче тигезләмәгә x^2 урынына $15y + 4$ не куябыз:

$$(15y + 4)y = 256, \quad 15y^2 + 4y - 256 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -\frac{64}{15}.$$

Әгәр $y = 4$ булса, $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot 4 + 4 = 64$, ягъни $x^2 = 64$ була, моннан $x_1 = 8$, $x_2 = -8$ не табабыз. Әгәр $y = -\frac{64}{15}$ булса, $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot \left(-\frac{64}{15}\right) + 4 = -60$, ягъни $x^2 = -60$ була, ә бу тигезләмәләрнең реаль тамырлары булмый.

Шулай итеп, без үзгәрешлеләрнең ике пар кыйммәтләрен таптык:

$$\begin{cases}x_1 = 8,\\ y_1 = 4;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = -8,\\ y_2 = 4.\end{cases}$$

Бирелгән система $\log_2 x$, $\log_4 y$ аңлатмаларын эченә алганга күрә, $x>0$, $y>0$ шартлары үтәлергә тиеш. Шуңа күрә $\begin{cases} x_2=-8, \\ y_2=4 \end{cases}$ пары эзләнелә торган системаны канәгатьләндерми.

Җавап: (8; 4).

171*. Ике үзгәрешлеле тригонометрик тигезләмәләр системалары. Тригонометрик тигезләмәләр системаларын чишүдә тигезләмәләр системаларын чишүдәге гадәти алымнар һәм тригонометрия формулалары кулланыла.

Мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=1{,}5, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=1{,}25. \end{cases}$$

Чишү. $\sin x=u$, $\cos y=v$ дип алыйк. Ул вакытта $\begin{cases} u+v=1{,}5 \\ u^2+v^2=1{,}25 \end{cases}$ системасы килеп чыга. Бу системаның беренче тигезләмәсеннән $v=\frac{3}{2}-u$. Системаның икенче тигезләмәсенә v урынына табылган кыйммәтне куеп, табабыз:

$$\begin{cases} u^2+\left(\frac{3}{2}-u\right)^2=\frac{5}{4}, \\ 2u^2-3u+1=0, \end{cases}$$

$$u_1=1,\ u^2=\frac{1}{2}.$$

Әгәр $u=1$ булса, $v=\frac{3}{2}-u=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ була. Әгәр $u=\frac{1}{2}$ булса, $v=\frac{3}{2}-u=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ була.

Шулай итеп, без тигезләмәнең ике пар чишелешен таптык: $\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=\frac{1}{2}, \\ v_2=1. \end{cases}$ $u=\sin x$, $v=\cos y$ булганга күрә, безгә ике тигезләмәләр системасын чишәсе кала:

$$\begin{cases} \sin x=1, \\ \cos y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ һәм } \begin{cases} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \cos y=1. \end{cases}$$

$\sin x=1$ тигезләмәсеннән $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$. $\cos y=\frac{1}{2}$ тигезләмәсеннән $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$ табабыз.

Димәк, $\begin{cases}\sin x = 1,\\ \cos y = \frac{1}{2}\end{cases}$ системасының чишелеше шундый рәвештә була: $\begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},\\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{cases}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ тигезләмәсеннән $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ табабыз. $\cos y = 1$ тигезләмәсеннән $y = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ табабыз. Димәк, $\begin{cases}\sin x = \frac{1}{2},\\ \cos y = 1\end{cases}$ системасының чишелешләре шундый рәвештә була: $\begin{cases}x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z},\\ y = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{cases}$

Искәрмә. Тригонометрик тигезләмәләр системаларын чишүдә системаның беренче һәм икенче тигезләмәләренең чишелешләрен язганда параметрларның төрле тамгаланышларын (n, k, m, ...) куллану мөһим. Икенче сүз белән әйткәндә, әгәр системаның беренче тигезләмәсенең чишелешен язганда параметр өчен k хәрефе кулланылса, икенче тигезләмә өчен бу хәрефне кулланырга ярамый, карап үткән мисалда бу максаттан n хәрефе кулланылды.

172. Өч үзгәрешлеле өч тигезләмә системалары. *Өч үзгәрешлеле өч тигезләмә системасын карыйк:*

$$\begin{cases}f(x;\ y;\ z) = 0,\\ g(x;\ y;\ z) = 0,\\ h(x;\ y,\ z) = 0.\end{cases}$$

Системаның һәр тигезләмәсен канәгатьләндерә торган теләсә нинди саннар өчлеге бу системаның *чишелеше* дип атала.

Өч үзгәрешлеле өч тигезләмә системалары өчен ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системаларын чишүдә аналогик методлар кулланыла.

Мисал. $\begin{cases}x + y + z = 2,\\ 2x + 3y + z = 1,\\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9\end{cases}$

тигезләмәләр системасын чишәргә.

Чишү. Алыштырып кую методын кулланыйк. Беренче тигезләмәдә x ны y һәм z аша күрсәтәбез һәм нәтиҗәне системаның икенче һәм өченче тигезләмәләренә куеп, табабыз:

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ 2(2-y-z)+3y+z=1, \\ (2-y-z)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$$

һәм алга таба

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ y-z=-3, \\ y^2+z^2+yz-3z=0. \end{cases}$$

Килеп чыккан системаның соңгы ике тигезләмәсе үз чиратында ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын хасил итә. Бу системаны алыштырып кую методы белән чишеп, табабыз:

$$\begin{cases} y=z-3, \\ (z-3)^2+z^2+z(z-3)-3z=0, \end{cases}$$

ягъни,

$$\begin{cases} y=z-3, \\ z^2-4z+3=0. \end{cases}$$

$z^2-4z+3=0$ тигезләмәсеннән $z_1=1$, $z_2=3$ не табабыз. $y=z-3$ тигезләмәсеннән тиңдәшле рәвештә $y_1=-2$, $y_2=0$ не, $x=2-y-z$ тигезләмәсеннән $x_1=3$, $x_2=-1$ не табабыз.

Шулай итеп, мондый чишелешләрне таптык: $(3;\ -2;\ 1)$ һәм $(-1;\ 0;\ 3)$.

173. Мәсьәләләрне тигезләмәләр системасы төзү ярдәмендә чишү.

1 нче мәсьәлә. Ераклыклары 30 км га тигез булган ике пункттан бер-берсенә каршы-каршы ике җәяүле чыга. Әгәр беренчесе икенчесенә караганда 2 сәг кә иртәрәк чыкса, аларның очрашуы икенчесе чыкканнан соң 2,5 сәг тән соң булачак. Әгәр дә икенчесе беренчесенә караганда 2 сәг кә иртәрәк чыкса, ул вакытта аларның очрашуы беренчесе чыкканнан соң 3 сәг тән соң булачак. Һәр җәяүле нинди тизлек белән барган?

Чишү. Сәгатенә x километр — беренче җәяүленең тизлеге, сәгатенә y километр икенче җәяүленең тизлеге булсын ди. Әгәр беренчесе икенчесенә караганда 2 сәг кә иртәрәк чыкса, шарт буенча ул очрашуга кадәр 4,5 сәг, шул вакытта икенчесенә 2,5 сәг бара. 2,5 сәг тә беренче җәяүле $4{,}5x$ километр юл үтә, ә 2,5 сәг тә икенчесе $2{,}5y$ километр юл үтә. Аларның очрашуы икесенә бергә барлыгы 30 км юл үткәннәрен аңлата, ягъни $4{,}5x+2{,}5y=30$ — беренче тигезләмә.

Әгәр икенчесе беренчесенә караганда 2 сәг кә иртәрәк чыкса, шарт буенча ул очрашуга кадәр 5 сәг барыр, шул ук вакытта беренчесе 3 сәг бара. Алдагыча фикер йөртеп, без икенче тигезләмәне төзибез: $3x+5y=30$.

Нәтиҗәдә түбәндәге тигезләмәләр системасын табабыз:

$$\begin{cases}4{,}5x+2{,}5y=30,\\ 3x+\quad 5y=30,\end{cases}$$

моннан $x=5$, $y=3$ килеп чыга.

Җавап: беренче җәяүле 5 км/сәг тизлек белән, ә икенчесе 3 км/сәг тизлек белән бара.

2 нче мәсьәлә. Бер елдан соң саклык кассасы акча салучының җыелган акчасын 6 сум процентлы акчага арттырган. 44 сум акча өстәп, акча салучы акчасын тагын бер елга калдырган. Бер ел үтүгә яңадан процентлы арттыру башкарылган, һәм хәзер салынган акча процентлар белән 257,5 сум тәшкил иткән. Саклык кенәгәсенә башта нинди сумма салынган һәм саклык кассасы ничә процентка арттырып исәпли?

Чишү. x сум — баштагы кертем булсын ди, ә саклык кассасы елга $y\%$ арттырып исәпли. Ул вакытта ел ахырына баштагы кертемгә $\frac{y}{100}\cdot x$ сум акча кушыла. Шарт буенча $\frac{yx}{100}=6$ тигезләмәсен табабыз.

Ел ахырында акча салучы саклык кенәгәсенә тагын 44 сум акча керткән, шулай итеп җыелган акча икенче ел башында $x+6+44$, ягъни $(x+50)$ сум тәшкил итә. Арттырып исәпләүләрне санап икенче ел ахырына килеп чыккан сумма $\left(x+50+\frac{y}{100}(x+50)\right)$ сум тәшкил итә, һәм шарт буенча ул 257,5 сумга тигез. Бу икенче тигезләмәне төзергә мөмкинчелек бирә:

$$x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257{,}5.$$

Шулай итеп, без түбәндәге ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын таптык:

$$\begin{cases}\frac{yx}{100}=6\\ x+50+\frac{y}{100}(x+50)=257{,}5.\end{cases}$$

Ике тигезләмәнең дә рәвешләрен үзгәртеп, табабыз:

$$\begin{cases}xy=600,\\ 100x+50y+xy=20\,750.\end{cases}$$

Системаның икенче тигезләмәсен икенче һәм беренче тигезләмәләрнең аермасы белән алыштырып, табабыз:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ 100x + 50y = 20\,150. \end{cases}$$

Әлеге системаны алыштырып кую методы белән чишәргә мөмкин. Икенче тигезләмәдән $y = 403 - 2x$ ны табабыз. $403 - 2x$ аңлатмасын системаның беренче тигезләмәсенә y урынына куеп, $x(403 - 2x) = 600$ не табабыз, моннан ике тамыр: 200 һәм 1,5 килеп чыга. Беренче кыйммәт кенә мәсьәләнең мәгънәсенә туры килгәне аңлашыла.

$y = 403 - 2x$ тигезләмәсенә x урынына табылган кыйммәт 200 не куеп, $y = 3$ не табабыз. Шулай итеп, баштагы кертем 200 сум тәшкил иткән, ә саклык кассасы елга 3% арттырып исәпли.

VI БҮЛЕК. ТИГЕЗСЕЗЛЕКЛӘР

§ 17. Үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү

174. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне чишү белән бәйләнгән төп төшенчәләр. $f(x) > g(x)$ тигезсезлеге бирелгән булсын ди. Бирелгән үзгәрешлеле тигезсезлекне дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерүче үзгәрешленең теләсә нинди кыйммәте *тигезсезлекнең чишелеше* дип атала. *Үзгәрешлеле тигезсезлекне чишү* — аның барлык чишелешләрен табу яки аларның булмавын исбатлау ул.

Бер үзгәрешлеле ике тигезсезлекнең чишелешләре тәңгәл килсә, бу тигезсезлекләр *тигезкөчле* дип атала; аерым алганда, әгәр ике тигезсезлекнең дә чишелешләре булмаса, тигезсезлекләр тигезкөчле була.

Тигезсезлекләрне чишкәндә, гадәттә бирелгән тигезсезлекне икенче, гадирәк, ләкин бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек белән алыштыралар; килеп чыккан тигезсезлекне яңадан гадирәк тигезсезлек белән алыштыралар һ. б. ш. Андый алыштырулар түбәндәге раслауларга нигезләнеп башкарыла.

Т.6.1. Әгәр тигезсезлекнең бер кисәгеннән икенчесенә кушылучы капма-каршы тамгасы белән күчерелсә, бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Т.6.2. Әгәр бер үзгәрешлеле тигезсезлекнең һәр ике кисәген бер үк уңай санга тапкырласак яки бүлсәк, бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Т.6.3. Әгәр бер үзгәрешлеле тигезсезлекнең һәр ике кисәген бер үк тискәре санга тапкырласак яки бүлсәк, бу вакытта тигезсезлекнең тамгасы капма-каршыга үзгәртелсә, бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Мәсәлән, $x^2+5x<6$ һәм $x^2+5x-6<0$ тигезсезлекләре 6.1. теоремасы буенча тигезкөчле. $3x^2+6x<9$ һәм $x^2+2x<3$ тигезсезлекләре 6.2 теоремасы буенча тигезкөчле ($3x^2+6x<9$ тигезсезлегенең ике кисәген дә без уңай булган 3 санына бүлдек, әлеге тигезсезлекнең тамгасын $<$ үзгәрешсез калдырдык).

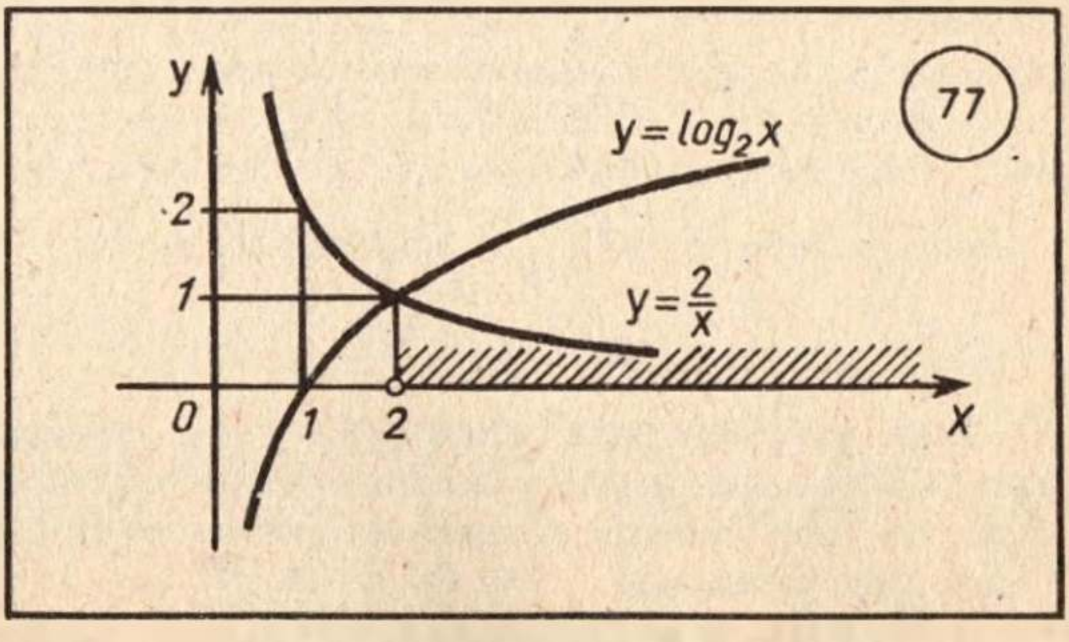
Кайвакыт практикада 6.2 һәм 6.3 теоремаларын берләштергән теоремалар файдалы.

Т.6.4. Әгәр тигезсезлекнең ике кисәген дә үзгәрешленең барлык кыйммәтләрендә уңай кыйммәтләр генә алучы бер үк аңлатмага тапкырласак яки бүлсәк, бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

Т.6.5. Әгәр тигезсезлекнең ике кисәген дә үзгәрешленең барлык кыйммәтләрендә тискәре кыйммәтләр генә алучы бер үк аңлатмага тапкырласак яки бүлсәк, бу вакытта тигезсезлекнең тамгасы капма-каршы үзгәртелсә, бирелгәнгә тигезкөчле тигезсезлек килеп чыга.

175. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләрне график юл белән чишү. $f(x)>g(x)$ тигезсезлекләрен график юл белән чишү өчен $y=f(x)$ һәм $y=g(x)$ функцияләренең графикларын төзергә кирәк һәм $y=g(x)$ функциясе графигының $y=g(x)$ функциясе графигыннан өстә ятучы x күчәренең аралыкларын сайлап алырга кирәк.

Мисал. $\log_2 x>\frac{2}{x}$ тигезсезлеген график юл белән чишәргә.



Чишү. Бер үк координаталар системасында $y=\log_2 x$ һәм $y=\frac{2}{x}$ функцияләре графикларын төзибез (77 нче рәсем). Рәсемнән $x>2$ булганда $y=\log_2 x$ функциясенең графигы $y=\frac{2}{x}$ функциясе графигыннан өстәрәк урнашуы күренә.

Җавап: $(2;\ +\infty)$.

176. Бер үзгәрешлеле сызыкча тигезсезлекләр. $ax<b$ рәвешендәге (яки тиңдәшле $ax<b$, $ax\geqslant b$, $ax\leqslant b$) тигезсезлек *сызыкча тигезсезлек* дип атала. Әгәр $a>0$ булса, $ax>b$ тигезсезлеге $x>\frac{b}{a}$ тигезсезлегенә тигезкөчле (Т.6.2 не карагыз), димәк, тигезсезлекнең чишелешләр күплеге $\left(\frac{b}{a};\ +\infty\right)$ аралык була. Әгәр $a<0$ булса, $ax>b$ тигезсезлеге $x<\frac{b}{a}$ тигезсезлегенә тигезкөчле (Т.6.3 не карагыз), димәк, тигезсезлекнең чишелешләре күплеге $\left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$ аралык була. Әгәр $a=0$ булса, тигезсезлек $0\cdot x>b$ рәвешендә була, ягъни $b\geqslant 0$ булганда аның чишелешләре булмый, $b<0$ булганда теләсә нинди x өчен дөрес була.

Үзгәртүләр барышында күп кенә тигезсезлекләр сызыкча тигезсезлекләргә китерелә.

Мисал. $2(x-3)+5(1-x)\geqslant 3(2x-5)$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Җәяләрне ачып, табабыз:

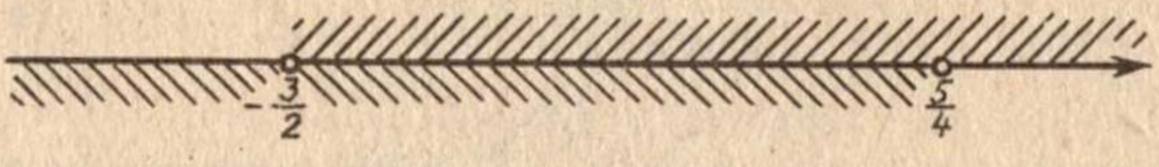
$$2x-6+5-5x\geqslant 6x-15,$$
$$-3x-1\geqslant 6x-15.$$

Алга таба

$$-3x-6x\geqslant -15+1,$$
$$-9x\geqslant -14. \qquad (1)$$

6.1 теоремасы буенча бу тигезсезлек бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле була. (1) тигезсезлекнең ике кисәген дә тискәре булган -9 санына бүләбез һәм тигезсезлекнең тамгасын үзгәртәбез. (6.3) теоремасы буенча (1) тигезсезлеккә тигезкөчле тигезсезлек табабыз: $x\leqslant\frac{14}{9}$. Димәк, бирелгән тигезсезлекнең чишелеше $\left(-\infty;\ \frac{14}{9}\right]$ аралык була.

177. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр системалары. Әгәр бирелгән тигезсезлекләрнең барлык чишелешләрен табу мәсьәләсе куелса, бер үзгәрешлеле берничә тигезсезлек *система хасил итә* дип әйтәләр.



78

Системаның һәр тигезсезлеген дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерүче үзгәрешленең кыйммәте *тигезсезлекләр системасының чишелеше* дип атала.

Системаны тәшкил итүче тигезсезлекләр фигуралы җәяләр белән берләштереләләр. Мәсәлән, $\begin{cases} 2x-1>3, \\ 3x-2<11 \end{cases}$ язуы $2x-1>3$ һәм $3x-2<11$ тигезсезлекләренең системаны хасил итүен аңлата.

Кайвакыт икеле тигезсезлек рәвешендәге язу кулланыла. Мәсәлән, $\begin{cases} 2x+1>1, \\ 2x+1<5 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасын икеле тигезсезлек рәвешендә язарга була: $1<2x+1<5$.

1 нче мисал. $\begin{cases} 5x+2>3x-1, \\ 3x+1>7x-4 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасын чишәргә.

Чишү. Системаның беренче тигезсезлеге тигезкөчле булган $x>-\frac{3}{2}$ тигезсезлегенә үзгәртелә, ә икенчесе $x<\frac{5}{4}$ тигезсезлегенә китерелә. Шулай итеп, мәсьәлә түбәндәге системаны чишүгә кайтарып калдырыла:

$$\begin{cases} x>-\frac{3}{2}, \\ x<\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Координаталар турысы ярдәмендә (78 нче рәсем) системаның чишелешләр күплеге $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{4}\right)$ интервал икәнен табабыз.

2 нче мисал. $\begin{cases} 3(x+1)-\frac{x-2}{4}<5x-7\cdot\frac{x+3}{2}, \\ 2x-\frac{x}{3}+6\leqslant 4x-3 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасын чишәргә.

Чишү. Системаның һәр тигезсезлегенең рәвешен үзәртеп, табабыз:

$$\begin{cases} x < -\frac{56}{5}, \\ x \geqslant \frac{27}{7}. \end{cases}$$

Бер үк вакытта $x < -\frac{56}{5}$ һәм $x \geqslant \frac{27}{7}$ тигезсезлекләрен канәгатьләндерүче x ның кыйммәтләре юк, димәк, бирелгән тигезсезлекләр системасының чишелешләре юк.

178. Бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр җыелмасы. Әгәр бирелгән тигезсезлекләрнең берсенең булса да чишелеше булган үзгәрешленең барлык кыйммәтләрен табу мәсьәләсе куелса, бер үзгәрешлеле берничә тигезсезлек *җыелма* хасил итә дип әйтәләр.

Җыелманы хасил итүче тигезсезлекләрнең берсен булса да дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерүче үзгәрешленең кыйммәте *тигезсезлекләр җыелмасының чишелеше* дип атала.

Мисал. $\frac{2x-3}{5} > \frac{3x-2}{2}$; $\frac{x}{3}+1 > \frac{3x}{2}$ тигезсезлекләр җыелмасын чишәргә.

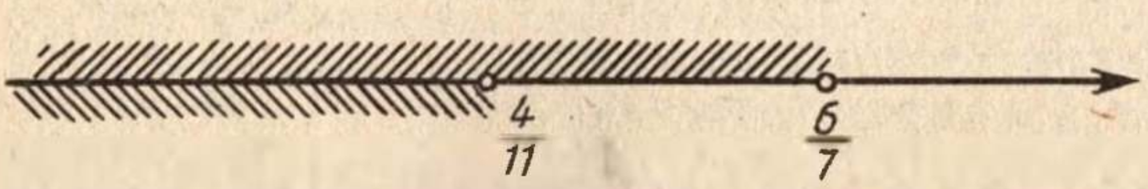
Чишү. Һәр тигезсезлекнең рәвешен үзгәртеп, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле җыелма табабыз: $x < \frac{4}{11}$, $x < \frac{6}{7}$. Санлы туры ярдәмендә, бирелгән җыелманың чишелеше $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right)$ аралык булганын табабыз (79 нчы рәсем).

179. Вакланмалы сызыкча тигезсезлекләр. Тигезсезлекләрне чишүгә мисаллар карыйк.

1 нче мисал. $\frac{2x+1}{3x-2} > 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Әгәр вакланманың санаучысының да һәм ваклаучысының да тамгалары бертөрле, ягъни икесе дә уңай, яки икесе дә тискәре булса, вакланма уңай була. Димәк, без ике тигезсезлекләр системасының җыелмасын табабыз:

$$\begin{cases}2x+1>0,\\3x-2>0\end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases}2x+1<0,\\3x-2<0.\end{cases}$$



79

Беренчесеннән $\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{2}{3}, \end{cases}$ ягъни $x > \frac{2}{3}$ не табабыз.

Икенчесеннән $\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x < \frac{2}{3}, \end{cases}$ ягъни $x < -\frac{1}{2}$ не табабыз.

Нәтиҗәдә бирелгән тигезсезлекнең түбәндәге чишелешләрен табабыз:

$$x < -\frac{1}{2};\ x > \frac{2}{3}.$$

2 нче мисал. $\frac{3x+7}{2x-7} \geqslant 5$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Эзлекле рәвештә табабыз:

$$\frac{3x+7}{2x-7} - 5 > 0,$$

$$\frac{3x+7-10x+35}{2x-7} \geqslant 0,$$

$$\frac{-7x+42}{2x-7} \geqslant 0.$$

Тигезсезлекнең тамгасын үзгәртеп, тигезсезлекнең ике кисәген дә -1 гә тапкырлыйбыз (Т.6.3, п. 174 не карагыз). Табабыз:

$$\frac{7x-42}{2x-7} \leqslant 0.$$

Вакланма ике очракта нульдән кечкенә яки нульгә тигез була: 1) әгәр санаучысы нульдән кечкенә яки нульгә тигез, ә ваклаучысы нульдән зур булса; 2) әгәр санаучысы нульдән зур яки нульгә тигез, ә ваклаучысы нульдән кечкенә булса. Димәк, без ике тигезсезлекләр системасын табабыз:

$$\begin{cases} 7x-42 \leqslant 0, \\ 2x-7 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x-42 \geqslant 0, \\ 2x-7 < 0. \end{cases}$$

Беренчесеннән $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \frac{7}{2}, \end{cases}$ ягъни $\frac{7}{2} < x \leqslant 6$ ны табабыз.

Икенчесеннән $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < \frac{7}{2}, \end{cases}$ ягъни системаның чишелешләре юк.

Димәк, бирелгән тигезсезлекнең чишелешләре күплеге $\left(\frac{7}{2};\ 6\right]$ аралык була.

180. Икенче дәрәҗә тигезсезлекләр. Биредә $ax^2+bx+c>0$ яки $ax^2+bx+c<0$, $a\neq 0$ рәвешендәге тигезсезлекләр турында сүз бара.

Т.6.6. Әгәр ax^2+bx+c квадрат өчбуынының дискриминанты тискәре, ә өлкән коэффициенты a уңай булса, ул вакытта x ның барлык кыйммәтләре өчен $ax^2+bx+c>0$ тигезсезлеге үтәлә.

Хәзер $D\geqslant 0$ булган очракны карыйк. $ax^2+bx+c>0$ (яки $ax^2+bx+c<0$) тигезсезлеген чишү өчен ax^2+bx+c квадрат өчбуынын $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ формуласы буенча тапкырлаучыларга таркатырга кирәк (п. 56 ны карагыз), аннан соң $a>0$ булганда тигезсезлекнең тамгасын саклап һәм $a<0$ булганда тигезсезлекнең тамгасын капмакаршыга үзгәртеп, $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ (яки $a(x-x_1)\times(x-x_2)<0$) тигезсезлегенең ике кисәген дә a санына бүләргә кирәк, ягъни $(x-x_1)(x-x_2)>0$ (яки $(x-x_1)(x-x_2)<0$) тигезсезлегенә күчәргә кирәк. Хәзер, әгәр тапкырлаучыларның тамгалары бертөрле (төрле) булса, ике санның тапкырчыгышы уңай (тискәре) булуыннан файдаланырга кирәк.

1 нче мисал. $2x^2+5x+2>0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $2x^2+5x+2$ өчбуынының тамырларын табыйк. $2x^2+5x+2=0$ тигезләмәсеннән $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$ не табабыз. Димәк, $2x^2+5x+2=2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, һәм без $2(x+2)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$ тигезсезлегенә киләбез һәм алга таба $(x+2)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$ була. $x+2$ һәм $x+\frac{1}{2}$ аңлатмалары бер үк тамгалы булырга тиеш, ягъни

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+\frac{1}{2}>0, \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} x+2<0, \\ x+\frac{1}{2}<0. \end{cases}$$

Беренче системадан $x>-\frac{1}{2}$ не, ә икенчесеннән $x<-2$ не табабыз.

2 нче мисал. $7x+10\geqslant 3x^2$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Тигезсезлекне $7x+10-3x^2\geqslant 0$ рәвешенә китерәбез, соңгы тигезсезлекнең ике кисәген дә -1 гә тапкырлап табабыз, $3x^2-7x-10\leqslant 0$. $3x^2-7x-10$ квадрат өчбуынының тамырлары мондый: $x_1=-1$, $x_2=\frac{10}{3}$. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркатабыз, нәтиҗәдә $3(x+1)\left(x-\frac{10}{3}\right)\leqslant 10$ була.

Соңгы тигезсезлектән тигезсезлекләр системасының җыелмасына күчәбез:

$$\begin{cases} x+1\leqslant 0, \\ x-\frac{10}{3}\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ x-\frac{10}{3}\leqslant 0. \end{cases}$$

Беренче системаның чишелешләре юк, ә икенчесеннән

$$-1\leqslant x\leqslant \frac{10}{3}.$$

3 нче мисал. $x^2-6x+9>0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. x^2-6x+9 квадрат өчбуынының бертөрле ике тамыры бар: $x_1=x_2=3$. Димәк, $x^2-6x+9=(x-3)^2$, һәм тигезсезлек $(x-3)^2>0$ рәвешендә була. Бу тигезсезлек, $x=3$ тән башка, барлык x лар өчен үтәлә.

4 нче мисал. $x^2\geqslant 25$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Эзлекле рәвештә табабыз: $x^2-25\geqslant 0$, $(x-5)\times$ $\times(x+5)\geqslant 0$, моннан:

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ x+5\geqslant 0 \end{cases} \text{ яки } \begin{cases} x-5\leqslant 0, \\ x+5\leqslant 0. \end{cases}$$

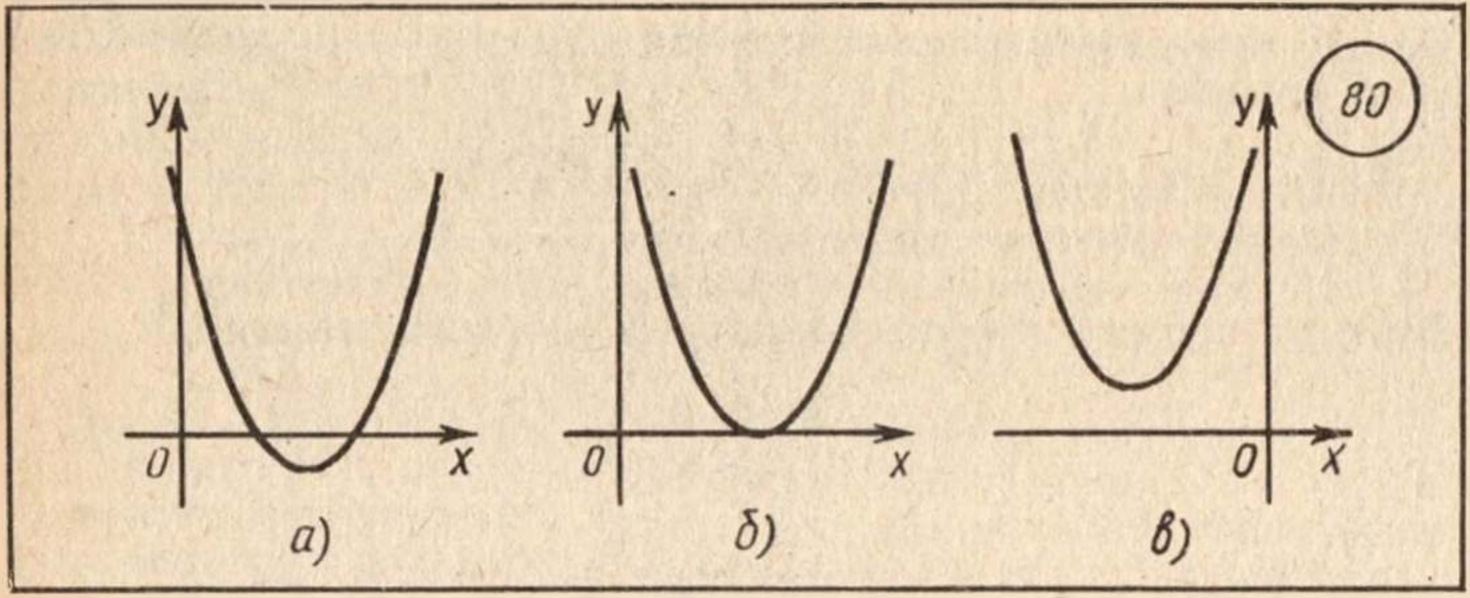
Беренче системадан $x\geqslant 5$ не, икенчесеннән $x\leqslant -5$ не табабыз.

181. Икенче дәрәҗә тигезсезлекләрне график юл белән чишү. $y=ax^2+bx+c$ рәвешендәге квадратик функциянең графигы парабола була; $a>0$ булганда — япьләре өскә, ә $a<0$ булганда япьләре аска юнәлә. Монда өч очрак булуы мөмкин: парабола x күчәре белән кисешә (ягъни ax^2+bx+ $+c=0$ тигезләмәсенең төрле ике тамыры була), параболаның түбәсе x күчәрендә ята (ягъни $ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсенең бер тамыры була), парабола x күчәре белән кисешми (ягъни $ax^2+bx+c=0$ тигезләмәсенең тамырлары булмый).

1 нче мисал. $2x^2+5x+2>0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $2x^2+5x+2=0$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. $y=2x^2+5x+2$ функциясенең графигы булып 80 нче *а* рәсемдә сурәтләнгән парабола хезмәт итә. Параболаның нокталары x күчәреннән өстә яткан x ның кыйммәтләре өчен $2x^2+5x+2>0$ тигезсезлеге үтәлә: бу $x<x_1$ яки $x>x_2$ булганда, ягъни $x<-2$ яки $x>-\frac{1}{2}$ булганда үтәлә. Димәк, бу тигезсезлекнең чишелешләре шундый: $x<-2$, $x>-\frac{1}{2}$ (п. 180, 1 нче мисалны карагыз).

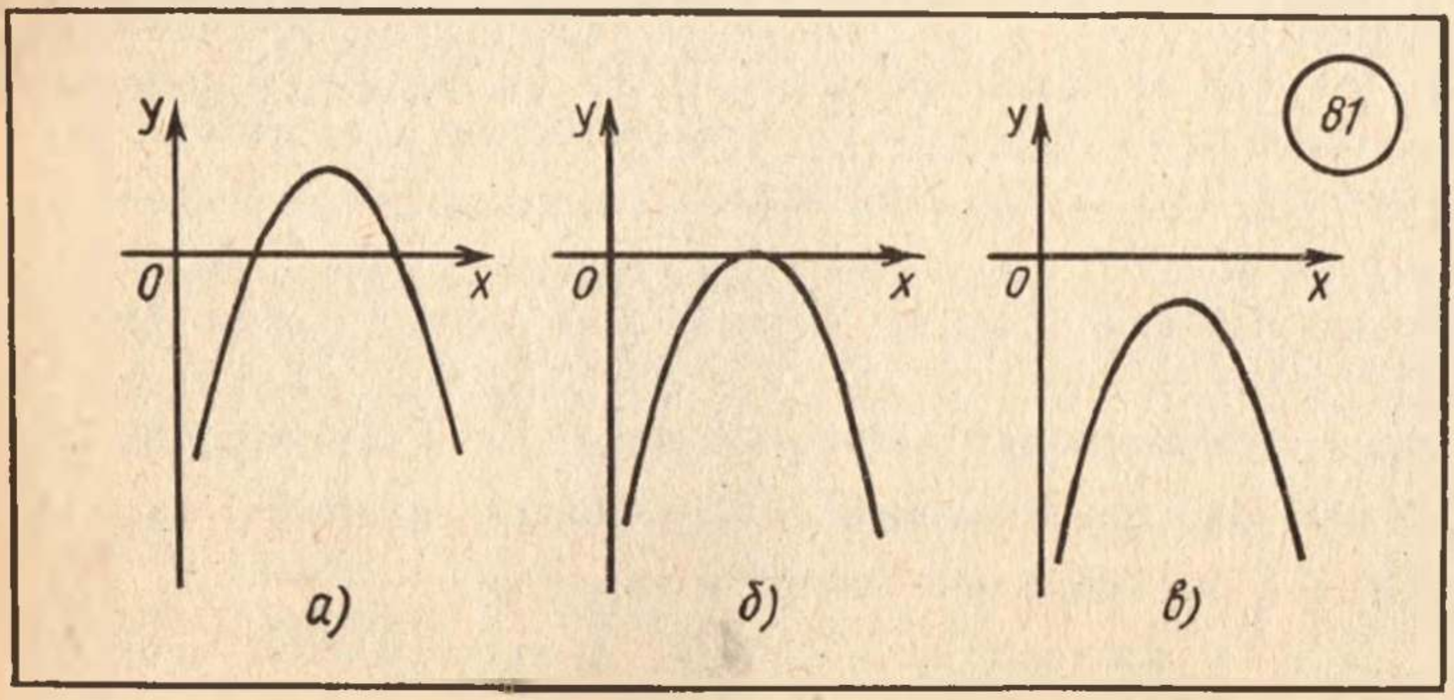
2 нче мисал. $3x^2-7x-10\leqslant 0$ тигезсезлеген чишәргә.



Чишү. $3x^2-7x-10=0$ тигезләмәсенең ике тамыры бар: $x_1=-1$, $x_2=\frac{10}{3}$. $y=3x^2-7x-10$ функциясенең графигы булып 80 нче *а* рәсемдә сурәтләнгән парабола хезмәт итә. Параболаның нокталары x күчәрендә яки аннан аста яткан x ның кыйммәтләре өчен $3x^2-7x-10\leqslant 0$ тигезсезлегә үтәлә: бу x $[x_1;\ x_2]$ аралыкта булганда үтәлә. Димәк, тигезсезлекнең чишелешләре күплеге $\left[-1;\ \frac{10}{3}\right]$ кисемтә була (п. 180, 2 нче мисалны карагыз).

3 нче мисал. $-x^2+4x-4>0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $-x^2+4x-4=0$ тигезләмәсенең бер тамыры бар: $x=2$. $y=-x^2+4x-4$ функциясенең графигы булып 81 нче *б* рәсемдә сурәтләнгән парабола хезмәт итә. Параболаның нокталары x күчәреннән өстә яткан x кыйммәтләре өчен $-x^2+4x-4>0$ тигезсезлегә үтәлә. Ләкин андый нокталар юк, димәк тигезсезлекнең чишелешләре булмый.



4 нче мисал. $-3x^2+x-5<0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $-3x^2+x-5=0$ тигезләмәсенең реаль тамырлары юк. $y=-3x^2+x-5$ функциясенең графигы булып 81 нче *в* рәсемендә сурәтләнгән парабола хезмәт итә. Параболаның нокталары x күчәреннән аста яткан x ның кыйммәтләре өчен $-3x^2+x-5<0$ тигезсезлеге үтәлә. Бөтен парабола x күчәреннән аста ятканга күрә, бу тигезсезлек x ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен үтәлә.

182. Модульләр белән бирелгән тигезсезлекләр. Үзгәрешлеләре модуль тамгасы астында булган тигезсезлекләрне чишкәндә модульнең билгеләмәсе кулланыла:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{ әгәр } f(x)\geqslant 0 \text{ булса,}\\ f(x), \text{ әгәр } f(x)<0 \text{ булса.}\end{cases}$$

Кайвакытта реаль сан модуленең геометрик интерпретациясен куллану файдалы, чөнки аның буенча $|a|$ — координаталар турысында яткан a ноктасының исәп башлангычы O дән ераклыгын белдерә, ә $|a-b|$ — координаталар турысында яткан a һәм b нокталары арасындагы ераклыкны аңлата (п. 27 не карагыз).

Моннан тыш, тигезсезлекнең ике кисәген дә квадратка күтәрү алымыннан файдаланырга мөмкин, ул түбәндәге теоремага нигезләнә.

Т.6.7. Әгәр $f(x)$ һәм $g(x)$ аңлатмалары теләсә нинди x та тискәре булмаган кыйммәтләр генә алсалар, $f(x)>g(x)$ һәм $(f(x))^2>(g(x)^2)$ тигезсезлекләре тигезкөчле була.

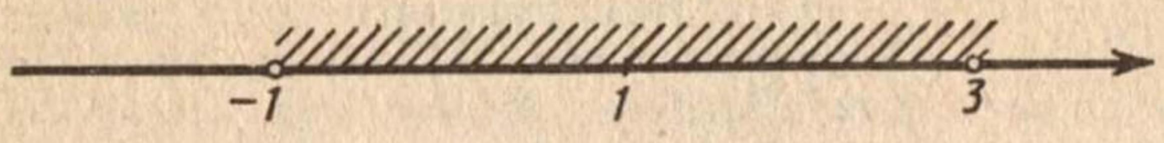
Модульләре булган тигезсезлекләрне чишкәндә бу теорема болай кулланыла.

$|f(x)|>|g(x)|$ тигезсезлеген чишәргә кирәк булсын. $|f(x)|\geqslant 0$, $|g(x)|\geqslant 0$, $(|f(x)|)^2=(f(x))^2$ һәм $(|g(x)|)^2=(g(x))^2$ бәйләнешләре $f(x)$ һәм $g(x)$ аңлатмаларының билгеләнү өлкәсеннән алынган x ның теләсә нинди кыйммәтләрендә дөрес булганлыктан, бирелгән тигезсезлек $(f(x))^2>(g(x))^2$ тигезсезлегенә тигезкөчле була.

1 нче мисал. $|x-1|<2$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү.

Беренче ысул. $|x-1|$ не координаталар турысында яткан x һәм 1 нокталары арасындагы ераклык дип карарга була. Димәк, безгә координаталар турысында 1 ноктасыннан 2 берәмлеккә ераклашкан барлык x нокталарын күрсәтергә кирәк. Координаталы туры ярдәмендә (82 нче рәсем) тигезсезлекләрнең чишелешләре күплеге $(-1;\ 3)$ аралык булганын табабыз.



82

Икенче ысул. Бирелгән тигезсезлекнең ике кисәген дә квадратка күтәреп, аңа тигезкөчле булган $(x-1)^2<4$ тигезсезлеген табабыз. Соңгы тигезсезлекне чишеп, $x^2-2x-3<0$ не табабыз, аннан $-1<x<3$ килеп чыга (180 яки 181 п. ны карагыз).

Өченче ысул. Санның модуле билгеләмәсе буенча

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ әгәр } x-1\geqslant 0 \text{ булса,} \\ -(x-1), \text{ әгәр } x-1<0 \text{ булса,} \end{cases}$$

шуңа күрә, бирелгән тигезсезлекне ике тигезсезлекләр системасының җыелмасы белән алыштырабыз:

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-1<2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0, \\ -(x-1)<2. \end{cases}$$

Беренче системадан $1\leqslant x<3$ не, икенче системадан $-1<x<1$ не табабыз. Бу чишелешләрне берләштергәннән соң $(-1;\ 3)$ аралык килеп чыга.

2 нче мисал. $|2x+5|\geqslant 7$ тигезсезлеген чишәргә.

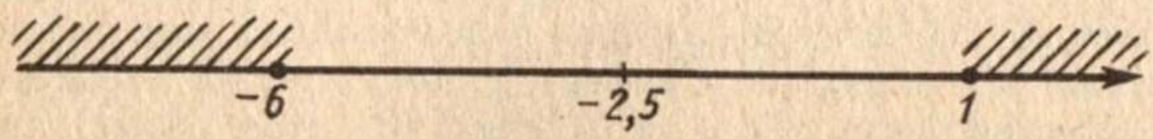
Чишү. $|x+2{,}5|\geqslant 3{,}5$ була. Безгә $-2{,}5$ ноктасыннан 3,5 тән зур яки тигез булган ераклыкта урнашкан координаталар турысындагы барлык x нокталарын күрсәтергә кирәк. Координаталар турысыннан файдаланып (83 нче рәсем) чишелешне табабыз: $x\leqslant -6$; $x\geqslant 1$.

3 нче мисал. $|2x-1|\leqslant|3x+1|$ тигезсезлеген чишәргә.

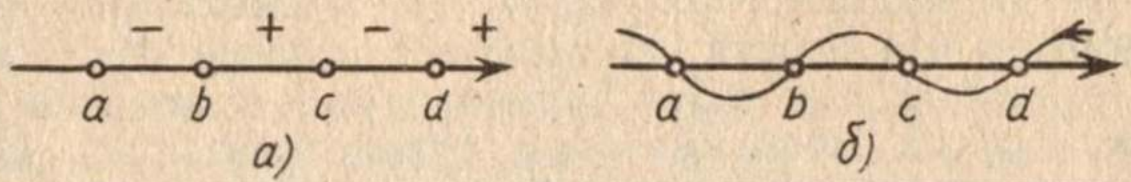
Чишү. Тигезсезлекнең ике кисәген дә квадратка күтәреп, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле булган $(2x-1)^2\leqslant(3x+1)^2$ тигезсезлеген табабыз. Соңгы тигезсезлекнең рәвешен үзгәртеп, $5x^2+10x\geqslant 0$ не табабыз, аннан $x\leqslant 2$; $x\geqslant 0$ килеп чыга.

4 нче мисал. $|2x+4|\leqslant 3x+2$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Әгәр $2x+4\geqslant 0$ булса, $|2x+4|=2x+4$ була, һәм, димәк, тигезсезлек $2x+4\leqslant 3x+2$ рәвешендә булыр. Әгәр



83



а)

б)

84

дә $2x+4<0$ булса, $|2x+4|=-(2x+4)$ була, һәм тигезсезлек $-2(x+4)\leqslant 3x+2$ рәвешен ала. Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекне ике система җыелмасы белән алмаштырырга мөмкин:

$$\begin{cases}2x+4\geqslant 0,\\ 2x+4\leqslant 3x+2;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x+4<0,\\ -(2x+4)\leqslant 3x+2.\end{cases}$$

Беренче системадан $x\geqslant 2$ килеп чыга, икенче системаның чишелешләре юк. Димәк, тигезсезлекнең чишелешләр күплеге — $[2;\ +\infty)$ нур.

183. Рациональ тигезсезлекләрне аралыклар методы[1] **белән чишү.** $\frac{p(x)}{f(x)}>0$ рәвешендәге рациональ тигезсезлекләрне чишү ($>$ тамгасы урынына теләсә нинди башка тамга булуы мөмкин), биредә $p(x)$ һәм $q(x)$ — күпбуыннар, түбәндәге фикерләүгә нигезләнгән.

$h(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ функциясен тикшерик, биредә $a<b<$ $<c<d$. Әгәр $x>d$ булса, $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ тапкырлаучыларының һәрберсе уңай була, һәм, димәк, $(d;\ +\infty)$ аралыкта $h(x)>0$ була. Әгәр $c<x<d$ булса, $x-d<0$ була, ә калган тапкырлаучылар элеккечә уңай була. Димәк, $(c;\ d)$ интервалда $h(x)<0$ була. $(b;\ c)$ интервалда аналогик рәвештә $h(x)>0$ була һ. б. (84, *а* рәсем).

$h(x)$ функциясенең тамгалары үзгәрүен дулкынсыман кәкре белән иллюстрацияләү уңайлы (аны «тамгалар кәкресе» дип атыйлар), аны өстән башлап, уңнан сулга таба сызалар (84, *б* рәсем). Бу иллюстрацияне болай аңларга кирәк: бу кәкре координаталар турысыннан өстә үткәндә шул аралыкларда $h(x)>0$ тигезсезлеге үтәлә, кәкре турыдан аста үткәндә шул аралыкларда $h(x)<0$ була.

Алда үткәргән фикерләүдә санаучыда һәм ваклаучыда сызыкча тапкырлаучыларның саны, шулай ук координаталар турысында санаучы һәм ваклаучы тамырларының үзара урнашуы әһәмиятле түгел иде. Шуңа күрә ул

$$f(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)}\tag{1}$$

---

[1] Бу методны кайвакыт интерваллар методы дип атыйлар.

рәвешендәге функциягә ярашлы, монда $a_1, a_2, \dots, a_n$; $b_1, b_2, \dots, b_k$ саннары парлап төрле-төрле. $f(x)$ функциясенең тамгалары үзгәрүен без шулай ук тамгалар кәкресе белән иллюстрацияли алабыз, аны өстән башлап уңнан сулга таба сызалар, һәм барлык координаталар турысындагы a_1; $a_2, \dots$; $b_1, b_2, \dots, b_k$ нокталары аша үткәреләр. *Аралыклар методы* менә шушыңа нигезләнгән инде, ул рациональ тигезсезлекләр чишкәндә уңышлы кулланыла.

1 нче мисал. $\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)}$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Тигезсезлекнең сул кисәгенең рәвешен үзгәртәбез:

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)}<0$$

һәм тигезсезлекнең ике кисәген дә 8 гә тапкырлыйбыз; бирелгәнгә тигезкөчле $\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}<0$ тигезсезлеген табабыз.

$f(x)=\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}$ функциясенең тамгалары үзгәрүен тамгалар кәкресе ярдәмендә сурәтлибез (85 нче рәсем, *а*). x ның кыйммәтләре, $f(x)<0$ булганда (штрихланган), түбәндәге тигезсезлекләргә туры килә:

$$x<-5;\ -\sqrt{2}<x<-\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}<x<\sqrt{3}.$$

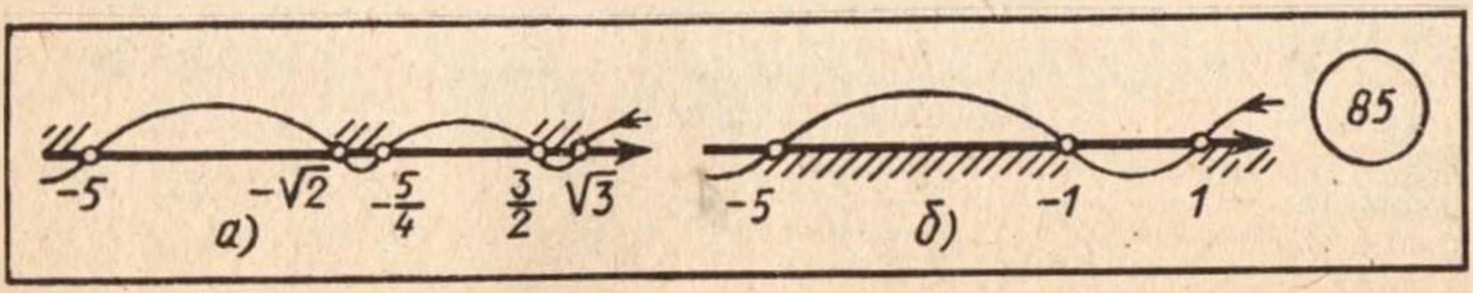
Болар баштагы тигезсезлекнең чишелешләре.

2 нче мисал. $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $\frac{x^2-x-6}{x^2-1}-1<0$ була, аннары $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0$ килеп чыга.

$f(x)=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ функциясе өчен тамгалар кәкресе сызабыз (85 нче рәсем, *б*). Аның ярдәмендә тигезсезлекнең чишелешләрен табабыз:

$$-5<x<-1;\ x>1.$$



85

3 нче мисал. $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x} \leqslant 0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $x=1$ һәм $x=-2$ булганда $(x-1)^4(x+2)^2$ аңлатмасы нульгә әйләнә, ә x ның калган кыйммәтләрендә уңай була. Бирелгән төгәл булмаган тигезсезлекне $x=1$ һәм $x=-2$ кыйммәтләре канәгатьләндерә, ягъни аның чишелешләре булалар. Хәзер $x \neq 1$, $x \neq -2$ булсын, ул вакытта, $(x-1)^4 \times \times (x+2)^2 > 0$ була, шуңа күрә бирелгән тигезсезлекнең ике кисәген дә $(x-1)^4(x+2)^2$ на бүлеп һәм бирелгән тигезсезлекнең тамгасын сакласак, бирелгән тигезсезлеккә тигезкөчле булган $\frac{x-1}{x} \leqslant 0$ тигезсезлеген табабыз (п. 174 не кара). Табылган тигезсезлекнең чишелешләре болай була: $0 < x \leqslant 1$. Җавапка алда билгеләнгән $x=-2$ чишелешен дә кертергә кирәк.

184. Күрсәткечле тигезсезлекләр. $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рәвешендәге тигезсезлекләрне чишкәндә $y=a^x$ күрсәткечле фукнциянең $a>1$ булганда үсүен һәм $0<a<1$ булганда кимүен истә тотарга кирәк (п. 94 не кара). Димәк, $a>1$ булган очракта $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ тигезсезлегеннән шул мәгънәдә булган $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенә күчәргә кирәк. $0<a<1$ булган очракта $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ тигезсезлегеннән капма-каршы мәгънәдә булган $f(x) < g(x)$ тигезсезлегенә күчәргә кирәк.

1 нче мисал. $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Монда дәрәҗәнең нигезе 1 дән зуррак, шуңа күрә күрсәткечләрне чагыштырганнан соң шул ук мәгънәдә булган тигезсезлекне язабыз: $3x+7<2x-1$. Тигезсезлекне чишкәннән соң $x<-8$ килеп чыга.

2 нче мисал. $(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leqslant 625$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $625=25^2=\left(\frac{1}{25}\right)^{-2}=(0{,}04)^{-2}$ булганга күрә бирелгән тигезсезлекне

$$(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leqslant (0{,}04)^{-2}$$

рәвешендә язарга була. $0<0{,}04<1$ булганга күрә, күрсәткечләрне чагыштырып капма-каршы мәгънәдә булган $5x- -x^2-8 \geqslant -2$ тигезсезлеген язып, эзлекле рәвештә чишәбез:

$$\begin{gathered}5x-x^2-8+2 \geqslant 0,\\ -x^2+5x-6 \geqslant 0,\\ x^2-5x+6 \leqslant 0,\\ (x-2)(x-3) \leqslant 0.\end{gathered}$$

Соңгы тигезсезлекне чишеп (п. 183 не яки п. 180 не кара), $2 \leqslant x \leqslant 3$ не табабыз.

Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекнең чишелешләре күплеге $[2;\ 3]$ кисемтә була.

185. Логарифмик тигезсезлекләр. $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рәвешендәге тигезсезлекләрне чишкәндә $y = \log_a x$ логарифмик функциясенең $a > 1$ булганда үсүен һәм $0 < a < 1$ булганда кимүен истә тотарга кирәк (п. 96 ны кара). Димәк, $a > 1$ булганда бирелгән тигезсезлектән шул ук мәгънәдә булган $f(x) > g(x)$ тигезсезлегенә күчәргә кирәк. $0 < a < 1$ булган очракта баштагы тигезсезлектән капма-каршы мәгънәдә булган $f(x) < g(x)$ тигезсезлегенә күчәргә кирәк. Шуның белән бергә логарифмик функциянең уңай саннар күплегендә генә билгеләнүен күздә тотарга кирәк. Димәк, $f(x) > 0$ һәм $g(x) > 0$ тигезсезлекләре үтәлергә тиеш. Нәтиҗәдә $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тигезсезлегеннән без түбәндәге тигезсезлекләр системасына күчәбез:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Искәртеп үтик, беренче системаны гадиләштерергә мөмкин: $f(x) > 0$ тигезсезлеге $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$ тигезсезлекләреннән чыга, шуңа күрә $f(x) > 0$ тигезсезлеген төшереп калдырырга мөмкин, ягъни системаны түбәндәге рәвештә язарга мөмкин:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогик рәвештә өстә язылган икенче системаны түбәндәгечә язарга мөмкин:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

1 нче мисал. $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > -2$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ булганга, бирелгән тигезсезлекне $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > \log_{\frac{1}{3}} 9$ рәвешендә язарга мөмкин. Аннары табабыз:

$$\begin{cases} 2x + 59 > 0, \\ 2x + 59 < 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -29{,}5, \\ x < -25; \end{cases}$$

моннан $-29{,}5 < x < -25$ була.

2 нче мисал. $\lg(x + 2) < 2 - \lg(2x - 6)$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Барлык логарифмнарның мәгънәсе булсын өчен $x + 2 > 0$ һәм $2x - 6 > 0$ тигезсезлекләре үтәлергә тиеш. Логарифмнарның үзлекләрен кулланып, бирелгән тигезсезлекнең рәвешен үзгәртәбез:

$$\lg(x+2)+\lg(2x-6)<2,\ \lg(x+2)(2x-6)<\lg 100.$$

Шулай итеп, бирелгән тигезсезлек тигезсезлекләр системасына тигезкөчле була:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 2x-6>0, \\ (x+2)(2x-6)<100. \end{cases}$$

Эзлекле килеш табабыз:

$$\begin{cases} x>-2, \\ x>3, \\ x^2-x-56<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ (x+7)(x-8)<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ -7<x<8. \end{cases}$$

Координаталар турысы ярдәмендә (86 нчы рәсем) соңгы системаның, һәм, димәк, бирелгән тигезсезлекнең чишелешләре күплеге булып (3; 8) аралык икәнен табабыз.

186. Иррациональ тигезсезлекләр. *Иррациональ тигезсезлекләрне* чишкәндә түбәндәге раслау кулланыла:

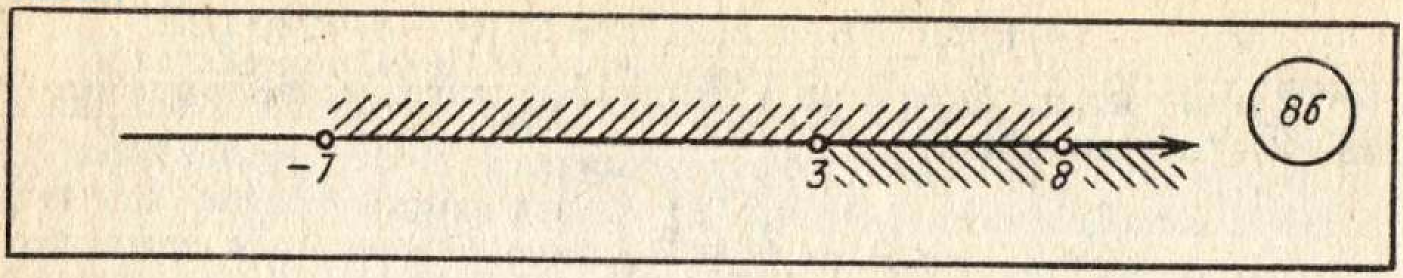
Т.6.8. Әгәр ниндидер X күплегендә тигезсезлекнең ике кисәге дә тискәре булмаган кыйммәтләр генә алсалар, тигезсезлекнең ике кисәген дә квадратка (яки теләсә нинди җөп дәрәҗәгә) күтәрсәк һәм башлангыч тигезсезлекнең тамгасын сакласак, бирелгән тигезсезлеккә (X күплегендә) тигезкөчле тигезсезлек табарбыз. Тигезсезлекнең ике кисәген дә бер үк так дәрәҗәгә күтәрү (тигезсезлекнең тамгасын саклап) һәрвакытта тигезсезлекнең тигезкөчле рәвешүзгәртүе була.

$\sqrt{f(x)}<g(x)$ рәвешендәге тигезсезлекне карыйк. (1)

Бу тигезсезлекнең чишелеше бер үк вакытта $f(x)\geqslant 0$ тигезсезлегенең чишелеше һәм $g(x)>0$ тигезсезлегенең чишелеше булуы үзеннән-үзе аңлашыла ((1) тигезсезлектән $g(x)>\sqrt{f(x)}\geqslant 0$ килеп чыга). Димәк, (1) тигезсезлек түбәндәге тигезсезлекләр системасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ \sqrt{f(x)}<g(x). \end{cases}$$

Бу системада беренче ике тигезсезлекнең шартлары үтәлгәндә, системаның өченче тигезсезлегенең ике кисәге дә билгеләнгәнгә һәм тискәре булмаган кыйммәтләр генә алганга күрә, аларны квадратка күтәрү — тигезсезлекнең тигезкөчле рәвешүзгәртүе ул. Бу рәвешүзгәртүне башкарып, түбәндәге системаны табабыз:



$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Шулай итеп, $\sqrt{f(x)} < g(x)$ тигезсезлеге түбәндәге тигезсезлекләр системасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Хәзер $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рәвешендәге тигезсезлекне карыйк.

Алда каралганча, $f(x) \geqslant 0$ дип нәтиҗә ясыйбыз, ләкин алдагы очрактан аермалы буларак, бирегә $g(x)$ тискәре булмаган кыйммәтләр, шулай ук тискәре кыйммәтләр дә алуы мөмкин. Шуңа күрә бирелгән (2) тигезсезлекне түбәндәге һәр очрак өчен тикшереп карыйк: $g(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$. Системалар җыелмасы табабыз:

$$\left[\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x). \end{cases}\right.$$

Бу системаларның беренчесеннән соңгы тигезсезлекне төшереп калдырырга мөмкин — ул системаның беренче ике тигезсезлегеннән килеп чыга. Икенче системада соңгы тигезсезлекнең ике кисәген дә квадратка күтәрергә мөмкин.

Соңыннан түбәндәге нәтиҗәгә киләбез: $\sqrt{f(x)} > g(x)$ тигезсезлеге ике система җыелмасына тигезкөчле:

$$\left[\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}\right.$$

1 нче мисал. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Бу тигезсезлек түбәндәге тигезсезлекләр системасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Системаны чишеп, табабыз: $x \geqslant 4$.

2 нче мисал. $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. Бирелгән тигезсезлек ике система җыелмасына тигезкөчле:

$$\begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x^2-3x+2\geqslant 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2. \end{cases}$$

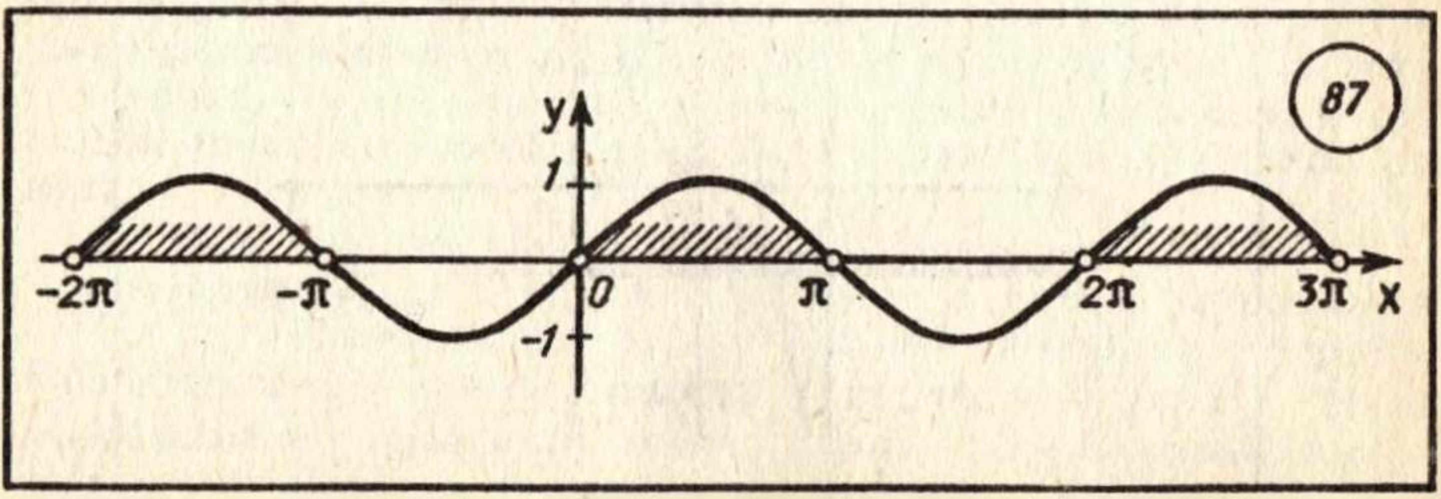
Икенче системаның икенче тигезсезлеген шул ук системадагы өченче тигезсезлекнең нәтиҗәсе буларак төшереп калдырырга мөмкин.

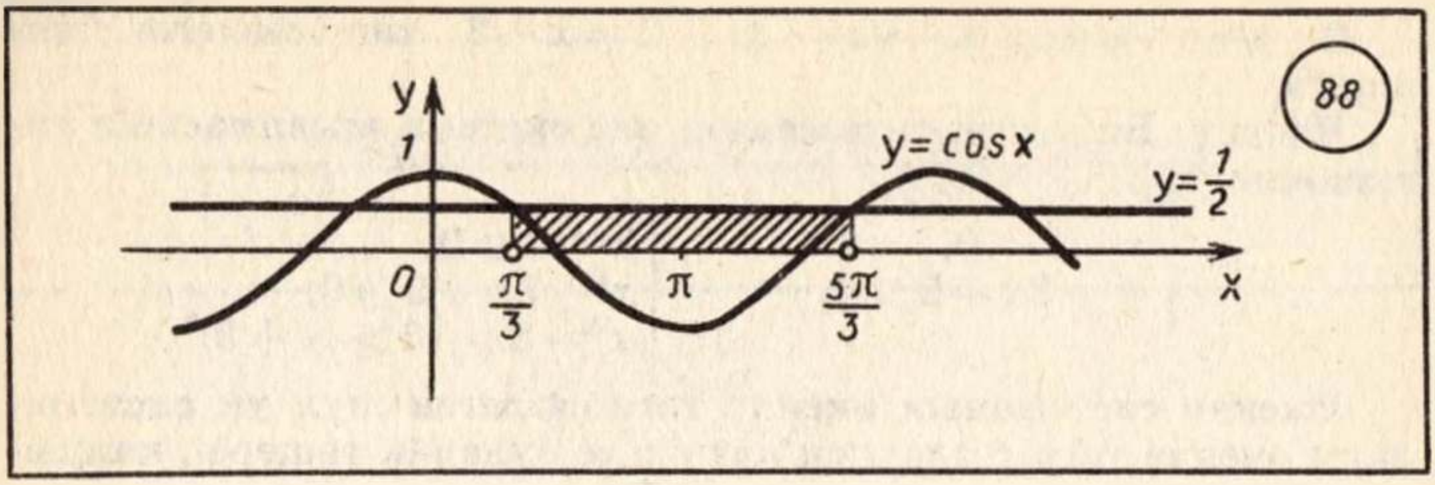
Беренче системаны чишкәннән соң $x<-3$ не табабыз, икенче системадан $-3\leqslant x<-\frac{7}{9}$ не табабыз. Табылган чишелешләрне берләштереп, $x<-\frac{7}{9}$ не табабыз.

187. Тригонометрик тигезсезлекләрне чишү. Иң гади *тригонометрик тигезсезлекләрне,* ягъни $f(x)>a$ (яки $f(x)<a$), биредә $f(x)$ тригонометрик функцияләрнең берсе рәвешендәге тигезсезлекләрне, график юл белән чишүгә мисаллар карап үтик.

1 нче мисал. $\sin x>0$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $y=\sin x$ функциясенең графигын төзик һәм x күчәрендә x аргументының графикның x күчәреннән өстә ятучы нокталарына тиңдәш кыйммәтләрен сайлап алыйк. x күчәренең шундый нокталарын эченә алган аралыкларның берсе $(0;\ \pi)$ интервал була (87 нче рәсем), ә барлык андый интервallар чиксез күп, өстәвенә $y=\sin x$ функциясе периодик булганга күрә, аларның һәрберсе $(0;\ \pi)$ аралыктан x күчәре буйлап $2\pi k$ га (биредә $k\in \boldsymbol{Z}$) күчеп табыла. Шулай итеп, бирелгән тигезсезлекнең чишелеше булып $(0+2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, ягъни $(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in\boldsymbol{Z}$ рәвешендәге интерваллар берләшмәсе хезмәт итә. Аны болай язарга мөмкин: $2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.





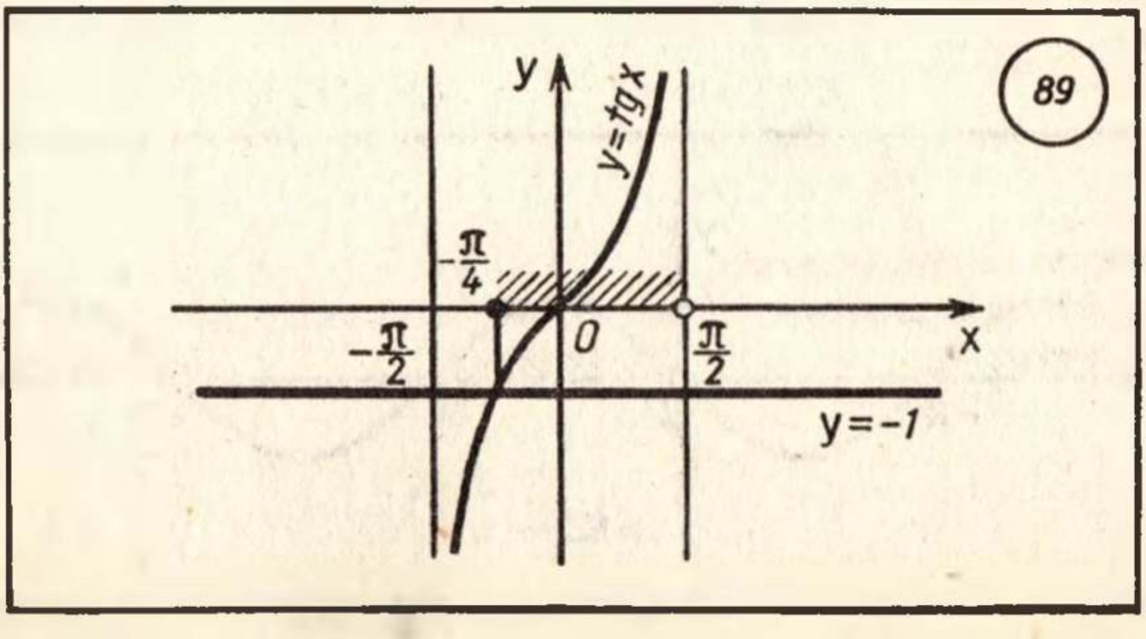
2 нче мисал. $\cos x < \frac{1}{2}$ тигезсезлеген чишәргә.

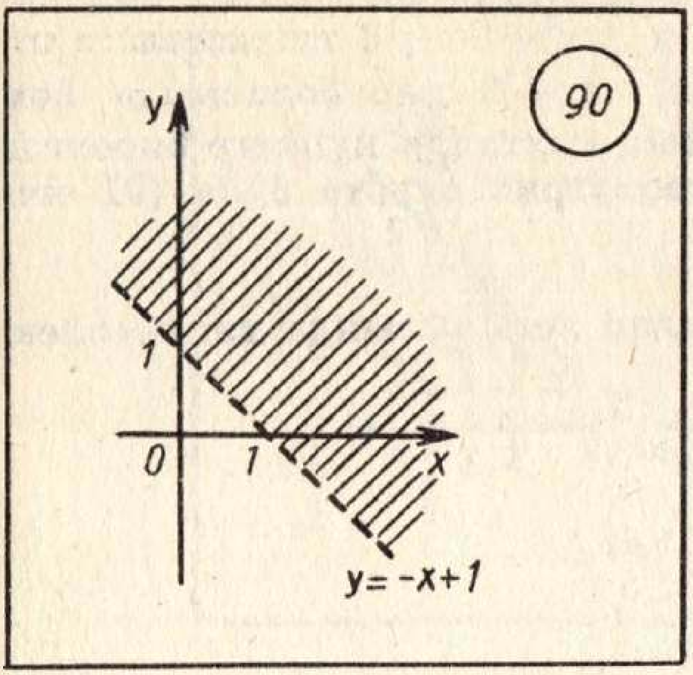
Чишү. $y = \cos x$ функциясенең графигын төзик һәм $y = \frac{1}{2}$ турысын үткәрик. Безне x аргументының $y = \frac{1}{2}$ турысыннан аста ятучы графикның нокталарына тиңдәш кыйммәтләре кызыксындыра. Безгә кирәкле аралыкларның берсе $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right)$ интервал була (88 нче рәсем). $y = \cos x$ функциясенең периодиклыгыннан файдаланып, җавапны язабыз:

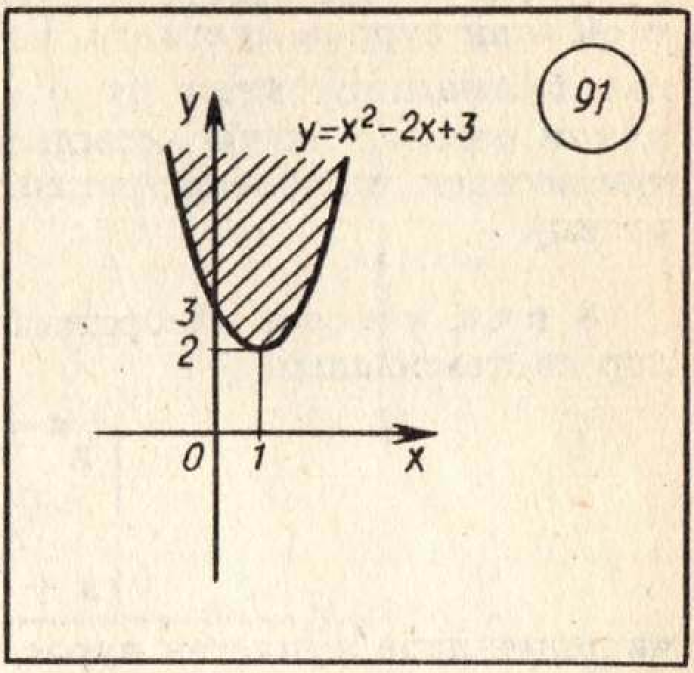
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3 нче мисал. $\operatorname{tg} x \geqslant -1$ тигезсезлеген чишәргә.

Чишү. $y = \operatorname{tg} x$ функциясенең графигын төзик һәм $y = -1$ турысын үткәрик. Безне x ның $y = -1$ турысыннан аста ятмаучы графикның нокталарына тиңдәш кыйммәтләре кызыксындыра. Безгә кирәкле аралыкларның берсе $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервал була (89 нчы рәсем), ә шундый аралыклар чиксез күп, өстәвенә $y = \operatorname{tg} x$ функциясе периодик булганга күрә, һәрберсе $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$ дан x күчәре буйлап πk га (биредә $k \in \boldsymbol{Z}$) күчеп та-




90


91

была. Болар чишелешне түбәндәгечә язарга мөмкинлек бирә:

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

188. Тигезсезлекләр һәм ике үзгәрешлеле тигезсезлекләрнең системалары. $f(x;\ y) > g(x;\ y)$ тигезсезлеген тикшерик. *Ике үзгәрешлеле тигезсезлекнең чишелеше* дип үзгәрешлеләрнең тигезсезлекне дөрес санлы тигезсезлеккә әйләндерүче кыйммәтләре пары атала. Реаль саннар пары $(x;\ y)$ координаталар яссылыгындагы ноктаны беркыйммәтле билгеләве билгеле. Бу тигезсезлекнең яки ике үзгәрешлеле тигезсезлекләр системасының чишелешләрен координаталар яссылыгындагы нокталар күплеге рәвешендә геометрик сурәтләргә мөмкинлек бирә.

1 нче мисал. Координаталар яссылыгында $x+y-1>0$ тигезсезлегенең чишелешләре күплеген сурәтләргә.

Чишү. Бу тигезсезлекне $y>-x+1$ рәвешенә китерәбез. Координаталар яссылыгында $y=-x+1$ турысын төзик. $y=x+1$ турысыннан өстәрәк ятучы теләсә нинди ноктаның ординатасы шул ук абсциссалы, ләкин турыда ятучы ноктаның ординатасыннан зуррак булганга күрә, бу турыдан өстәрәк урнашкан яссылыкның нокталар күплеге бирелгән тигезсезлек чишелешләренең геометрик сурәте була (90 нчы рәсем).

2 нче мисал. Координаталар яссылыгында $x(x-2) \leqslant \leqslant y-3$ тигезсезлегенең чишелешләр күплеген сурәтләргә.

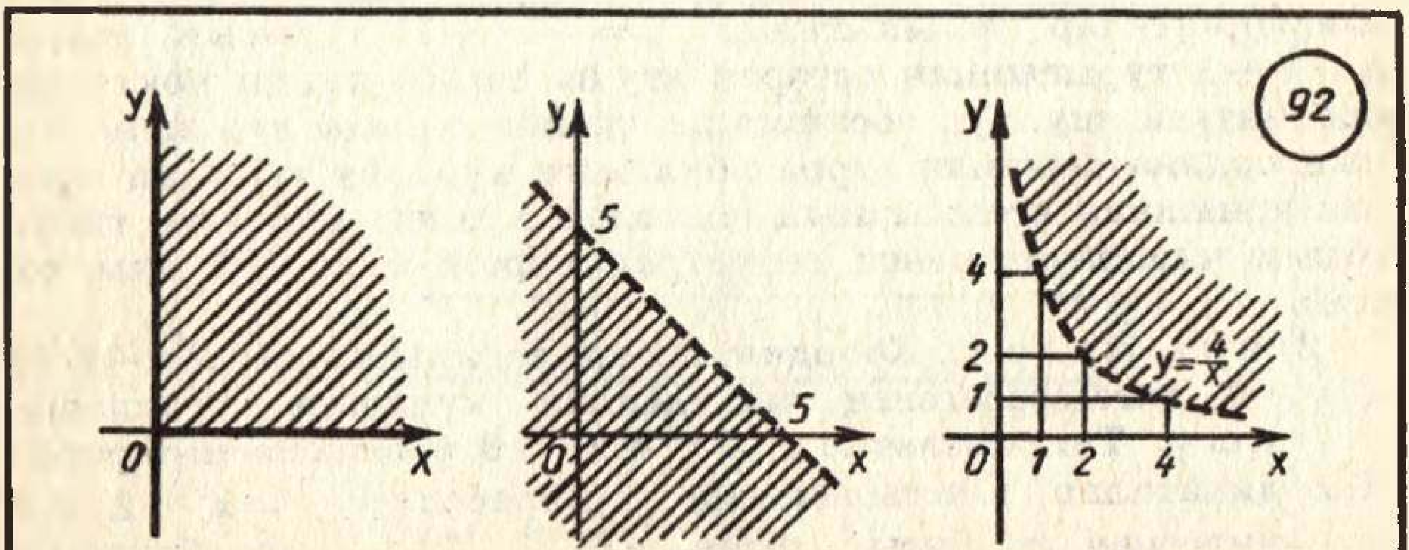
Чишү. Тигезсезлекне $y \geqslant x^2-2x+3$ рәвешенә китерәбез. Координаталар яссылыгында парабола — $y=x^2-2x+3$ функциясенең графигын төзик, $y=x^2-2x+3$ параболасыннан өстәрәк ятучы теләсә нинди ноктаның ординатасы шул ук абсциссалы, ләкин параболада ятучы ноктаның ординатасыннан зуррак булганга, һәм $y \geqslant x^2 - 2x + 3$ тигезсезлеге төгәл булмаганга күрә бу $y = x^2 - 2x + 3$ параболасында һәм аннан өстәрәк ятучы яссылыкның нокталар күплеге бирелгән тигезсезлек чишелешләренең геометрик сурәте була (91 нче рәсем).

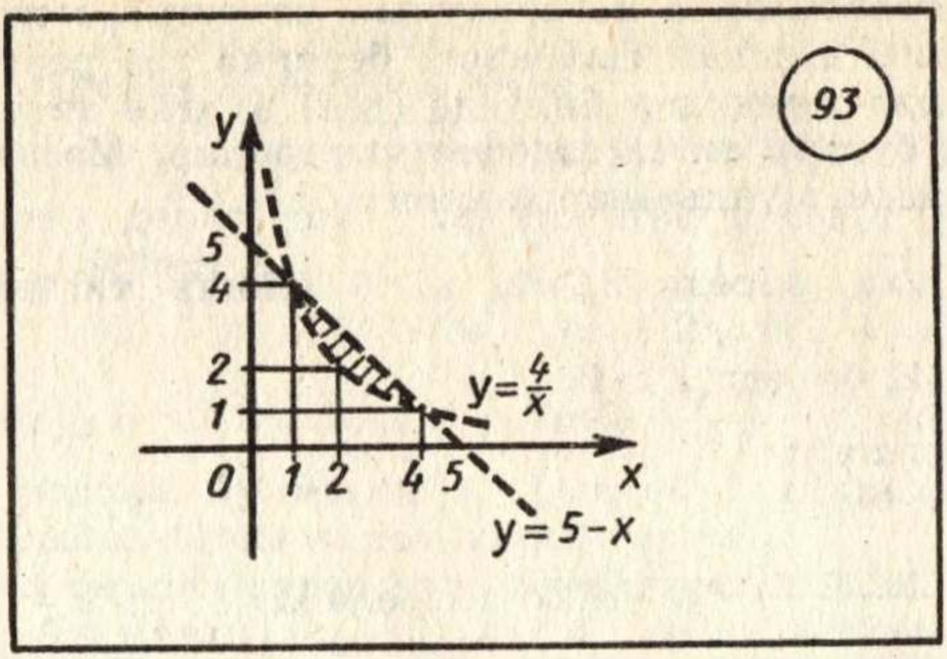
3 нче мисал. Координаталар яссылыгында тигезсезлекләр системасының

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ xy > 4, \\ x + y < 5 \end{cases}$$

чишелешләре күплеген сурәтләргә.

Чишү. $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ тигезсезлекләр системасы чишелешләренең геометрик сурәте булып беренче координаталар почмагының нокталары күплеге тора (92 нче рәсем, *а*). $x + y < 5$ яки $y < 5 - x$ тигезсезлеге чишелешләренең геометрик сурәте $y = 5 - x$ функциясенең графигы булып хезмәт иткән турыдан аста ятучы нокталар күплегеннән тора (92 нче рәсем, *б*). Ниһаять, $xy > 4$ тигезсезлегенең, яки $y > \frac{4}{x}$ тигезсезлегенең, чөнки биредә $x > 0$, чишелешләренең геометрик сурәте $y = \frac{4}{x}$ функциясенең графигы булып хезмәт иткән гипербола кәкресеннән өстә ятучы нокталар күплегеннән тора. Нәтиҗәдә, беренче координаталар почмагында $y = 5 - x$ функциясенең графигы булып хезмәт иткән турыдан аста ятучы




93

һәм $y = \frac{4}{x}$ функциясенең графигы булып хезмәт иткән гиперболадан өстә ятучы координаталар яссылыгының нокталар күплеген табабыз (93 нче рәсем).

§ 18. Тигезсезлекләрне исбатлау

189. Аерма тамгасын бәяләү методы. Бу методның асылы шуннан гыйбарәт: $f(x;\ y;\ z) > g(x;\ y;\ z)$ $(f < g,\ f \geqslant g,\ f \leqslant g)$ тигезсезлекләренең дөреслеген раслау өчен $f(x;\ y;\ z) - g(x;\ y;\ z)$ аермасын төзиләр һәм аның уңай (тиңдәш рәвештә тискәре, тискәре түгел, уңай түгел) икәнен исбатлыйлар.

Мисал. Әгәр $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ булса, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ булганын исбатларга.

(Ике тискәре булмаган санның арифметик уртасы аларның геометрик уртасыннан кечкенә түгел); бу тигезсезлек ***Коши тигезсезлеге*** дип атала).

Чишү. $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$ аермасын төзик. Табабыз:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ тигезсезлеге x һәм y ның теләсә нинди тискәре булмаган кыйммәтләрендә дөрес була. Димәк, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, өстәвенә монда тигезлек $x = y$ булганда гына урынлы.

Коши тигезсезлегеннән, атап әйткәндә, барлык $x > 0$ өчен дөрес булган $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ тигезсезлеге чыга.

190. Тигезсезлекләрне исбатлауның синтетик методы. Бу методның асылы шуннан гыйбарәт: берничә төр рәвешүзгәртүләр ярдәмендә нииндидер билгеле (төп) булган тигезсезлекләрдән кирәк булган тигезсезлекне чыгаралар. Мәсәлән, төп тигезсезлекләрдән шундыйлар санала:

1) $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, биредә $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (Коши тигезсезлеге);

2) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, биредә $x > 0$;

3) $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$;
4) $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

Мисал. $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$ (биредә a, b, c, d — тискәре булмаган саннар) икәнен исбатларга.

Чишү: Биредә төп тигезсезлек сыйфатында тискәре булмаган саннар $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$ өчен төзелгән Коши тигезсезлеген кулланабыз. $\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}$ була. Хәзер Коши тигезсезлеген a һәм b саннарына, шулай ук c һәм d га кулланып, табабыз:

$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$. Ләкин $\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. Шулай итеп, $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$ була. $a = b = c = d$ булган очракта тигезлек була.

191. Тигезсезлекләрне каршы куеп исбат итү. Бу методның асылы түбәндәгедән гыйбарәт. Тигезсезлекнең дөреслеген исбатларга кирәк булсын:

$$f(x;\ y;\ z) > g(x;\ y;\ z). \qquad (1)$$

Киресен фараз итәләр, ягъни үзгәрешлеләрнең бер генә булса да җыелмасына

$$f(x;\ y;\ z) \leqslant g(x;\ y;\ z) \qquad (2)$$

тигезсезлеге дөрес дип уйлыйлар. Тигезсезлекләрнең үзлекләрен кулланып, (2) тигезсезлекнең рәвешен үзгәртәләр. Әгәр бу рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә ялган тигезсезлек килеп чыга икән, (2) тигезсезлекне дөрес дип фараз итүнең дөрес булмаганын аңлата, шуңа күрә дә (1) тигезсезлек дөрес була.

1 нче мисал. Әгәр $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$ булса, $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ икәнен исбатларга.

Чишү. Киресен фараз итик, ягъни ниндидер a, b, c, d кыйммәтләренең җыелмасы өчен

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

тигезсезлеге дөрес дип уйлыйк. Ике кисәген дә квадратка күтәрик. Табабыз:

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd,$$

моннан $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$, алга таба $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$ була. Ләкин бу тискәре булмаган bc һәм ad саннарыннан төзелгән Коши тигезсезлегенә капма-каршы килә.

Димәк, безнең фараз итү дөрес түгел, ягъни теләсә нинди тискәре булмаган a, b, c, d ның кыйммәтләре өчен $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ тигезсезлекләре дөрес була.

2 нче мисал. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \leqslant \cos^2\alpha$ тигезсезлеген исбатларга.

Чишү. Киресен фараз итик, ягъни $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > \cos^2\alpha$ тигезсезлеге үтәлерлек α һәм β бар дип уйлыйк. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2}$ (п. 131 не кара) һәм $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (п. 129 ны кара) формулаларын кулланып, $\frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2} > \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ не табабыз, моннан $\cos 2\beta > 1$ килеп чыга. Ләкин β ның теләсә нинди кыйммәтендә $\cos 2\beta \leqslant 1$ булганлыктан, без каршылыкка очрадык. Димәк, безнең фараз итү дөрес түгел, шуңа күрә $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \leqslant \cos^2\alpha$ тигезсезлеге дөрес була.

192*. Тигезләмәләр чишкәндә тигезсезлекләрне куллану. $f(x) = g(x)$ тигезләмәсен чишәргә кирәк булсын ди. Һәм бер үк вакытта $y = f(x)$ функциясенең иң зур кыйммәте, ә $y = g(x)$ функциясенең иң кечкенә кыйммәте булган A саны бар ди. Ул вакытта $f(x) = g(x)$ тигезләмәсенең тамырлары булып $f(x) = A$, $g(x) = A$ тигезләмәләренең уртак тамырлары санала, һәм фәкать алар гына. Бу метод тигезләмәләр чишүдә функциональ методның аерым очрагы булып тора (п. 158 не кара).

Мисал. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - (x-1)^4$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Бер яктан, барлык $x \neq 0$ өчен $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$ була (п. 189 ны кара). Икенче яктан, барлык x лар өчен $2 - (x-1)^4 \leqslant 2$ тигезсезлеге үтәлә. Димәк, бирелгән тигезләмәнең тамырлары булып $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ һәм $2-(x-1)^4=2$ тигезләмәләренең уртак тамырлары санала (билгеле, әгәр уртак тамырлары булса; әгәр булмаса, тигезләмәнең тамырлары булмый).

$x^2+\frac{1}{x^2}=2$ тигезләмәсеннән $x_1=1$, $x_2=-1$ не табабыз. $2-(x-1)^4=2$ тигезләмәсеннән $x=1$ не табабыз. Бу тигезләмәләрнең уртак тамырлары $x=1$ кыйммәте, димәк, ул бирелгән тигезләмәнең бердәнбер тамыры була.

VII БҮЛЕК. МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРЫ

§ 19. Санлы эзлеклелекләр

193. **Эзлеклелекнең билгеләмәсе.** Һәр натураль санга тиңдәшле рәвештә билгеле бер реаль сан куелсын, ди: 1 санына a_1 саны туры килә, 2 санына — a_2 саны, 3 санына — a_3 саны, ..., n санына — a_n саны һ. б. Ул вакытта *санлы эзлеклелек* бирелгән дип әйтәләр, һәм шулай язалар: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Башкача язарга мөмкин: (a_n). $a_1, a_2, a_3, \ldots, \ldots, a_n, \ldots$ саннары *санлы эзлеклелекнең буыннары* дип атала: a_1 — эзлеклелекнең беренче буыны, a_2 — икенче буыны, ..., a_n — n нчы буыны.

1 нче мисал. $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$. Бу эзлеклелек шулай итеп төзелгән: һәр натураль санга аның квадраты туры килә. Биредә $a_n=n^2$.

2 нче мисал. Теләсә нинди чиксез унарлы вакланма өчен унарлы якынлашуларының киме яки артыгы белән эзлеклелек төзергә мөмкин. Мәсәлән, $e=2{,}71828\ldots$ санына эзлеклелек унарлы якынлашуның киме белән түбәндәге рәвештә була:

$$2;\ 2{,}7;\ 2{,}71;\ 2{,}718;\ 2{,}7182;\ 2{,}71828;\ \ldots.$$

194. **Эзлеклелекне бирү ысуллары.** Эзлеклелекне бирүнең төп өч ысулы бар.

1. *Аналитик ысул* — эзлеклелек n-нчы буын формуласы белән бирелә. Мәсәлән, $a_n=\frac{n}{n+1}$ формуласы белән $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ эзлеклелеге бирелә, аның буыннары:

$$a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};\ a_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3};\ a_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4},\ \ldots,$$

ягъни эзлеклелек $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ була.

2. *Рекуррент ысул* — эзлеклелекнең теләсә кайсы буыны, кайсыдыр буыннан башлап, үзеннән алда килгән буыннары аша күрсәтелә. Эзлеклелекне бу ысул белән биргәндә беренче буынын (яки берничә башлангыч буыннарын) һәм эзлеклелекнең теләсә нинди буынын алдагы билгеле буыннар аша табарга мөмкинлек бирүче формуланы күрсәтәләр.

Мисал. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

$$a_3=a_1+a_2=1+1=2;\quad a_6=a_4+a_5=3+5=8;$$
$$a_4=a_2+a_3=1+2=3;\quad a_7=a_5+a_6=5+8=13;$$
$$a_5=a_3+a_4=2+3=5;\quad a_8=a_6+a_7=8+13=21\ \ldots$$

була.

Соңыннан шундый эзлеклелек килеп чыга:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots.$$

Аның һәр буыны, беренче икесеннән башка, алдагы ике буынның суммасына тигез.

3. *Телдән әйтелгән ысул* — эзлеклелекне тасвирлап бирү. Мәсәлән, e санының унарлы якынлашуларының киме белән алынган эзлеклелеге шул ысул белән бирелә (п. 193 не кара).

195. Эзлеклелекнең үсүе һәм кимүе. Әгәр эзлеклелекнең һәр буыны аннан соң килүче буыннан кечкенә булса, ягъни теләсә нинди n өчен $a_n<a_{n+1}$ булса, бу эзлеклелек (a_n) үсүче дип атала. Әгәр эзлеклелекнең һәр буыны аннан соң килүче буыннан зуррак булса, ягъни теләсә нинди n өчен $a_n>a_{n+1}$ булса, мондый эзлеклелек (a_n) кимүче дип атала.

Мисаллар карап үтик:

1) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$ — үсүче эзлеклелек.

2) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots,\ 3n-1,\ \ldots$ — үсүче эзлеклелек.

3) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$ — үсүче эзлеклелек.

4) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$ — кимүче эзлеклелек.

5) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ — кимүче эзлеклелек.

6) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \ldots,\ (-1)^n\cdot n$ — бу эзлеклелек үсүче дә, кимүче дә түгел.

7) $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots,\ 3,\ \ldots$ — биредә без *даими* яки стационар эзлеклелекне күрәбез.

196. Арифметик прогрессиянең билгеләмәсе. Икенчесеннән башлап һәр буыны алдагы буынга бер үк d санын кушып табылган (a_n) эзлеклелеген *арифметик прогрессия* дип атыйлар. d саны — *прогрессиянең аермасы.* Шулай итеп, арифметик прогрессия $a_{n+1}=a_n+d$ тигезлеге белән рекуррент бирелгән эзлеклелек була. Мәсәлән, $a_5=a_4+d$; $a_{94}=a_{93}+d$ һ. б.

$d > 0$ булганда арифметик прогрессия үсә, ә $d < 0$ булганда кими.

1 нче мисал. 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... эзлеклелеге — арифметик прогрессия, аның $a_1 = 3$, $d = 2$ була.

2 нче мисал. $a_1 = -2$, $d = 0{,}5$ бирелсен ди. Бу шартлар белән арифметик прогрессия бирелә, аның $a_2 = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$; $a_3 = a_2 + d = -1{,}5 + 0{,}5 = -1$; $a_4 = a_3 + d = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$; $a_5 = a_4 + d = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$; $a_6 = a_5 + d = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$ була.

Арифметик прогрессияне таптык: -2; $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; 0; 0,5; ....

3 нче мисал. Даими булган 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... эзлеклелеге арифметик прогрессия була, аның $a_1 = 2$, $d = 0$ була.

Кайвакыт арифметик прогрессия булган бөтен эзлеклелекне түгел, бары беренче берничә буынын гына тикшерәләр. Бу очракта *чикле арифметик прогрессия* турында сүз йөртәләр.

Кайвакыт (a_n) эзлеклелегенең арифметик прогрессия икәнен күрсәтү өчен, түбәндәге билгене кулланалар:

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots .$$

197. Арифметик прогрессиянең үзлекләре

1^0. *Арифметик прогрессиянең n-нчы буынының формуласы:*

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

2^0. ***Арифметик прогрессиянең беренче n буынының суммасы:***

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Биредә $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ була.

3^0. ***Арифметик прогрессиянең характеристик үзлеге:*** әгәр эзлеклелекнең һәр буыны, беренчесеннән тыш (һәм соңгысыннан чикле арифметик прогрессия очрагында), моннан алдагы һәм моннан соңгы буыннарының арифметик уртасына тигез булса, һәм бары тик шул вакытта гына, эзлеклелек арифметик прогрессия була:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

1 нче мисал. Йөгерүче йөгерүенең беренче минутында 400 м, ә һәр киләсе минутында алдагысына караганда 5 м га кимрәк йөгереп үткән. 1 сәг тә ул нинди юл үткән?

Чишү. Беренче минутта йөгерүче 400 м үткән, икенчесендә — 395 м, өченчесендә — 390 м һ. б. 400, 395, 390 ... саннары арифметик прогрессияне тәшкил итә, биредә $a_1=400$, $d=-5$ була. 1 сәг, ягъни 60 мин эчендә үткән юл прогрессиянең беренче 60 буынының суммасына тигез. (2) формуланы кулланып, табабыз:

$$S_{60}=\frac{2a_1+d\cdot 59}{2}\cdot 60=\frac{800-59\cdot 5}{2}\cdot 60=15\,150.$$

Шулай итеп, 1 сәг эчендә йөгерүче 15 км 150 м юл үткән.

2 нче мисал. Арифметик прогрессиянең 13 нче буынын 3 нче буынга бүлгәндә өлештә 3 чыга, ә 18 нче буынын 7 нче буынга бүлгәндә өлештә 2 чыга, калдыкта 8 була. Прогрессиянең 20 нче буынын табарга.

Чишү. Шарт буенча $a_{13}=3a_3$, ә $a_{18}=2a_7+8$ була (п. 3 не кара). n нчы буынының формуласы буенча $a_3=a_1+2d$, $a_{13}=a_1+12d$, $a_7=a_1+6d$, $a_{18}=a_1+17d$ була һәм ике үзгәрешлеле (a_1 һәм d) ике тигезләмә системасын табабыз:

$$\begin{cases}a_1+12d=3(a_1+2d),\\ a_1+17d=2(a_1+6d)+8.\end{cases}$$

Бу системаны чишеп, табабыз:

$$\begin{cases}a_1=3d,\\ a_1=5d-8,\end{cases}$$

моннан $d=4$, $a_1=12$ була. a_1 һәм d ны белеп, a_{20} не табуы кыен түгел:

$$a_{20}=a_1+19d=12+19\cdot 4=88.$$

198. Геометрик прогрессиянең билгеләмәсе. Беренче буыны нульгә тигез булмаган сан, ә һәр буыны, икенчесеннән башлап, үзеннән алда килгән буынны нульгә тигез булмаган бер үк q санына тапкырлаганга тигез булган (b_n) эзлеклелеге *геометрик прогрессия* дип атала. q санын — *прогрессиянең тапкырлыгы* дип атыйлар. Шулай итеп, геометрик прогрессия $b_{n+1}=b_nq$, биредә $b_1\neq 0$, $q\neq 0$, тигезлеге белән рекуррент бирелгән геометрик прогрессия. Мәсәлән, $b_7=b_6q$, $b_{54}=b_{53}q$.

1 нче мисал. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... эзлеклелеге геометрик прогрессия, аның $b_1=1$, $q=2$ була.

2 нче мисал. 100, 30, 9, $\frac{27}{10}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{243}{1000}$, ... эзлеклелеге — геометрик прогрессия, аның $b_1=100$, $q=\frac{3}{10}$ була.

3 нче мисал. $b_1=2$, $q=-3$ бирелгән булсын ди. Бу шартлар белән геометрик прогрессия бирелә, аның $b_2=b_1q=$ $=2\cdot(-3)=-6$; $b_3=b_2q=(-6)\cdot(-3)=18$; $b_4=b_3q=$

$=18\cdot(-3)=-54$; $b_5=b_4q=(-54)\cdot(-3)=162$, ... була. 2, -6, 18, -54, 162, ... геометрик прогрессиясен таптык.

4 нче мисал. 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... даими эзлеклелек геометрик прогрессия була, аның $b_1=2$, $q=1$ була. Кайвакыт геометрик прогрессия булган бөтен эзлеклелекне түгел, ә аның беренче берничә буынын тикшерәләр. Бу очракта *чикле геометрик прогрессия* турында сүз бара. (b_n) эзлеклелегенең геометрик прогрессия икәнен күрсәтү өчен кайвакыт түбәндәге тамганы кулланалар:

$$\div\div\, b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots .$$

199. Геометрик прогрессиянең үзлекләре

1^0. *Геометрик прогрессиянең n-нчы буыны формуласы:*

$$b_n=b_1q^{n-1}.$$

2^0. *Геометрик прогрессиянең беренче n буыны суммасының формуласы:*

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1};$$

Биредә, $S_1=b_1$, $S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$, $q\neq1$; әгәр $q=1$ булса, $S_n=nb_1$ була.

3^0. *Геометрик прогрессиянең характеристик үзлеге:* әгәр эзлеклелекнең һәр буыны, беренчесеннән тыш (һәм соңгысыннан чикле геометрик прогрессия очрагында моннан алдагы һәм моннан соңгы буыннары белән

$$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$$

формуласы аша бәйләнгән булса, һәм бары тик шул вакытта гына, эзлеклелек геометрик прогрессия була.

1 нче мисал. Геометрик прогрессиядә $b_1=3$, $b_n=96$, $S_n=189$. Аның 8 нче буынын табарга.

Чишү. $b_n=b_1q^{n-1}$ булганга күрә (1 нче үзлек), табабыз: $96=3q^{n-1}$, $q^{n-1}=32$ яки $q^n=32q$.

Икенче яктан, 2^0 нче үзлек буенча

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\ \text{була, моннан табабыз:}$$

$$189=\frac{3(q^n-1)}{q-1},\ \text{яки}\ \frac{q^n-1}{q-1}=63. \qquad (1)$$

Ләкин $q^n=32q$ (өстәнрәк кара). Бу аңлатманы (1) нче тигезлеккә куеп табабыз:

$\frac{32q-1}{q-1}=63$, $32q-1=63q-63$, $q=2$. b_1 һәм q ны белеп, b_8 не табабыз:

$$b_8=b_1q^7=3\cdot2^7=384.$$

2 нче мисал. Өч сан чикле геометрик прогрессияне тәшкил итә. Әгәр икенче санны 2 гә арттырсак, яңа саннар өчлеге арифметик прогрессия тәшкил итәр. Әгәр бу яңа өчлекнең өченче санын 9 га арттырсак, яңадан геометрик прогрессия килеп чыгар. Беренче саннар өчлеген табарга.

Чишү. Эзләнә торган өч санны b_1, b_2, b_3 дип тамгалыйк. Арифметик прогрессия өчен ÷ һәм геометрик прогрессия өчен ∺ тамгаларын кулланып, мәсьәләнең шартын түбәндәге рәвештә языйк:

$$\begin{aligned}&1)\ ∺\ b_1,\ b_2,\ b_3.\\&2)\ \div\ b_1,\ b_2+2,\ b_3.\\&3)\ ∺\ b_1,\ b_2+2,\ b_3+9.\end{aligned}$$

Арифметик (3^0 нче үзлек, п. 197) һәм геометрик (3^0 нче үзлек, п. 199) прогрессияләренең характеристик үзлекләреннән файдаланып, тиңдәшле рәвештә табабыз: 1) $b_2^2=b_1\cdot b_3$; 2) $b_2+2=\frac{b_1+b_3}{2}$; 3) $(b_2+2)^2=b_1(b_3+9)$.

$b_2=b_1q$, ә $b_3=b_1q^2$ булганга күрә,

1) $b_1^2q^2=b_1b_1q^2$; 2) $b_1q+2=\frac{b_1+b_1q^2}{2}$; 3) $(b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+$ $+9)$ була. Беренче шартны бердәй тигезлек булганга күрә төшереп калдырырга мөмкин. Без ике үзгәрешлеле (b_1 һәм q) ике тигезләмә системасын табабыз:

$$\begin{cases}2(b_1q+2)=b_1+b_1q^2,\\(b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+9).\end{cases}$$

Алга таба табабыз:

$$\begin{aligned}&b_1(1+q^2-2q)=4,\\&b_1(9-4q)=4.\end{aligned}$$

Системаның икенче тигезләмәсеннән b_1 не q аша күрсәтеп: $b_1=\frac{4}{9-4q}$ һәм беренче тигезләмәгә b_1 урынына бу аңлатманы куеп, $\frac{1+q^2-2q}{9-4q}=1$ не табабыз, аннан $q_1=2$, $q_2=-4$ килеп чыга.

Димәк, $q=2$ булганда, $b_1=4$ була, $q=-4$ булганда, $b_1=\frac{4}{25}$ була.

Шулай итеп, мәсьәләнең шартын ике саннар өчлеге канәгатьләндерә:

1) 4, 8, 16 ($b_1=4$, $q=2$ булганда);

2) $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$ $\left(b_1=\frac{4}{25},\ q=-4\right.$ булганда$\left.\right)$.

200. Эзлеклелекнең чикләмәсе турында төшенчә. Әгәр нинди дә булса уңай сан алып (бу сан гадәттә ε — грек хәрефе «эпсилон» белән тамгалана), шундый N номеры табылса, аннан башлап (ягъни $n \geqslant N$ булганда) a_n ның b дан аермасы модуле буенча ε нан кечерәк, ягъни

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

булса, b саны (a_n) *эзлеклелегенең чикләмәсе* дип атала.

Языла: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$, яки $a_n \to b$. (a_n) эзлеклелеге b га *омтыла* дип әйтәләр.

Эзлеклелек чикләмәсенең геометрик мәгънәсе: әгәр дә b — (a_n) эзлеклелегенең чикләмәсе булса, b ноктасының нинди дә булса тирәсен сайлап алсак та, барлык эзлеклелек ниндидер N номерыннан башлап бу тирәлектә ятучы нокталар белән сурәтләнер (94 нче рәсем); *b ноктасының тирәсе* — үзәге b ноктасында булган интервал ул.

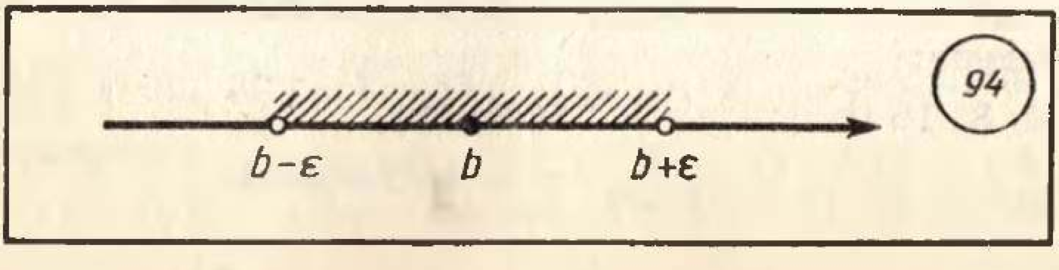
Мисаллар. Эзлеклелекләр карап үтик:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Эзлеклелек буынының номеры зуррак булган саен, бу буын 0 санынннан азрак аерыла. Бу эзлеклелек омтыла, аның чикләмәсе 0 гә тигез, ягъни $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1} \ldots$. Бу эзлеклелекнең буыннары номерлары арткан саен, 1 санынннан азрак аерыла. Бу эзлеклелек омтыла, шуның белән бергә $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Дөрестән дә, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Нинди булса $\varepsilon > 0$ алсак та, шундый N номеры табылыр, барлык $n \geqslant N$ өчен $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәләчәк. Мондый N ны табу өчен, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ тигезсезлеген чишү җитә һәм бу тигезсезлекне канәгатьләндерүче N урынына нинди дә булса натураль сан алырга кирәк.

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$. Бу эзлеклелек омтылучан, аның чикләмәсе 0 гә тигез, ягъни $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$.



94

4) 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, … . Бу эзлеклелек омтылучан түгел, чикләмәсе юк.

5) Даими булган a, a, a, …, a, … эзлеклелеге a чикләмәсенә омтыла, ягъни $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

201. Эзлеклелекләрнең чикләмәләрен исәпләү. Эзлеклелекләрнең чикләмәләрен исәпләү өчен түбәндәге раслаулар кулланыла:

1) $\left(\frac{1}{n}\right)$ эзлеклелеге 0 санына омтыла (п. 200, 1 нче мисалны кара):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

2) q^n эзлеклелеге, биредә $|q|<1$, 0 санына омтыла (п. 200, 3 нче мисалны кара, $q=\frac{1}{3}$):

әгәр $|q|<1$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a=a$ (п. 200, 5 нче мисалны кара).

4) Бу раслау *чикләмәләр өстендә арифметик операцияләр турындагы теоремалар* дип атала.

Т.7.1. Әгәр $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, ә $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ булса:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=ab$ була;

в) әгәр $b\neq 0$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ була.

1 нче мисал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ исәпләргә.

Чишү. $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$, ә $\frac{1}{n}\to 0$, шуңа күрә $\frac{1}{n^2}\to 0\cdot 0=0$ була.

Шулай итеп, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Шуңа охшаш рәвештә теләсә нинди натураль k өчен $\frac{1}{n^k}\to 0$ булуы ачыклана.

2 нче мисал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1}$ исәпләргә.

Чишү. Бирелгән вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да буынлап n үзгәрешлесенең иң югары дәрәҗәсенә, ягъни n^2 ка бүлеп, табабыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a=a$, һәм чикләмәләр өстендә арифметик операцияләр турындагы теореманы кулланып, табабыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1}=\frac{1+0+2\cdot 0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

202. $|q|<1$ булганда чиксез геометрик прогрессиянең суммасы. $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ чиксез геометрик прогрессия булсын ди, биредә $|q|<1$. Аның беренче n буынының суммасын карап үтик: $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Табабыз (п. 199 ны кара):

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ны исәплик.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{q-1}(q^n-1)=$$

$$=\frac{b_1}{q-1}(0-1)=\frac{b_1}{1-q}$$

була (п. 201 не кара).

Шулай итеп, $|q|<1$ булганда чиксез геометрик прогрессия өчен $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ була, биредә $S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$.

Бу чикләмәне *чиксез геометрик прогрессиянең суммасы* дип атыйлар һәм S белән тамгалыйлар:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Мисал. $|q|<1$ булганда чиксез геометрик прогрессиянең суммасы 9 га тигез, ә аның буыннарының квадратлары суммасы 40,5 кә тигез. Прогрессиянең беренче 6 буынының суммасын табарга.

Чишү. Бирелгән прогрессияне: ∺ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, дип тамгалыйк. Шарт буенча аның суммасы 9 га тигез, ягъни $\frac{b_1}{1-q}=9$.

$b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2$ эзлеклелеген карап үтик. Аның һәр буыны алгы буыныннан q^2 ка тапкырлап табыла, ягъни бу геометрик прогрессия $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, аның беренче буыны b_1^2 ка тигез була, ягъни $B_1 = b_1^2$, Q тапкырлыгы q^2 ка тигез, ягъни $Q = q^2$, $|q^2| < 1$, ягъни $Q < 1$ булганга күрә, яңа прогрессиянең суммасы $\frac{B_1}{1-Q}$ га тигез була. Шарт буенча бу сумма 40,5 кә тигез. Димәк, нәтиҗәдә без ике үзгәрешлеле тигезләмә системасы табабыз:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Беренче тигезләмә $b_1 = 9(1-q)$ дан b_1 не күрсәтеп һәм нәтиҗәне икенче тигезләмәгә куйсак, $\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{81}{2}$ не табабыз, моннан $\frac{1-q}{1+q} = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$ була.

Шулай булгач, $b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$. Моннан соң инде прогрессиянең беренче 6 буынының суммасын табарга мөмкин:

$$S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = 8\frac{80}{81}.$$

§ 20. Функциянең чикләмәсе

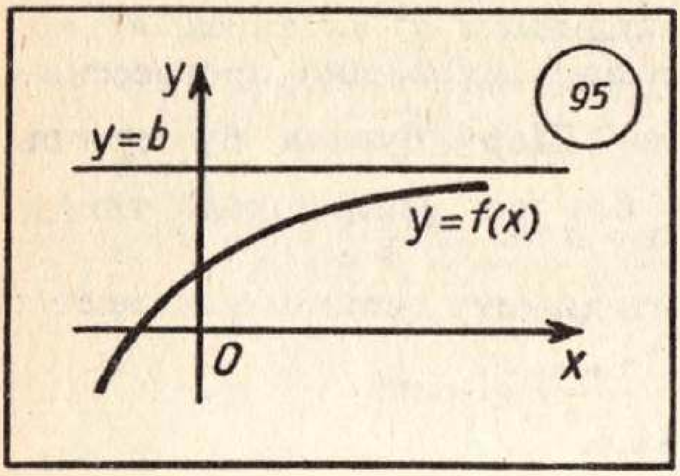
203. x ∞ кә омтылганда $y = f(x)$ функциясенең чикләмәсе. Горизонталь асимптота. Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен, $|f(x) - b| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек барлык $x > M$ өчен $M > 0$ санын табып булса, b саны x $+\infty$ кә омтылганда $y = f(x)$ *функциясенең чикләмәсе* дип атала. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ дип язалар.

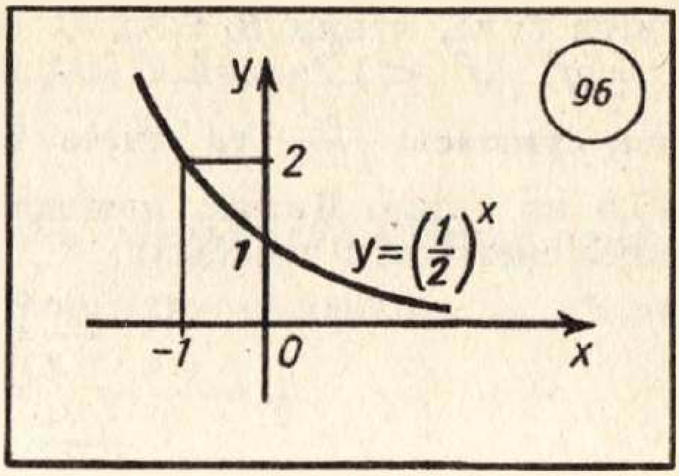
Моның геометрик аңлатмасы түбәндәгедән гыйбарәт: x ның җитәрлек дәрәҗәдә зур кыйммәтләрен алганда $y = f(x)$ функциясенең графигы $y = b$ турысына бик нык якынлаша (95 нче рәсем), ягъни нокта чиксезлеккә киткән саен график ноктасыннан $y = b$ турысына кадәрге ераклык теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саныннан кечкенә булуы мөмкин. Бу очракта $y = b$ турысы $y = f(x)$ *функция графигының горизонталь асимптотасы* дип атала.

Мисал өчен $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясен алыйк. Бу функция өчен

$$f(5) = \frac{1}{32};\ f(10) = \frac{1}{1024};\ f(100) = \frac{1}{2^{100}};$$

$f(1000) = \frac{1}{2^{1000}}$ була. Аргументның кыйммәте зур булган саен,



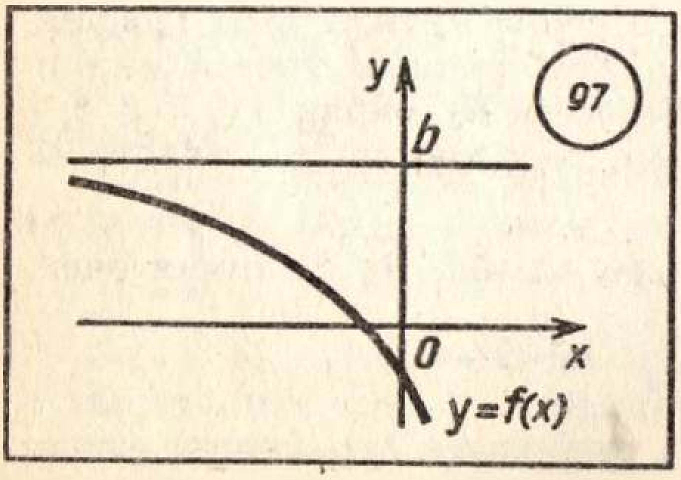


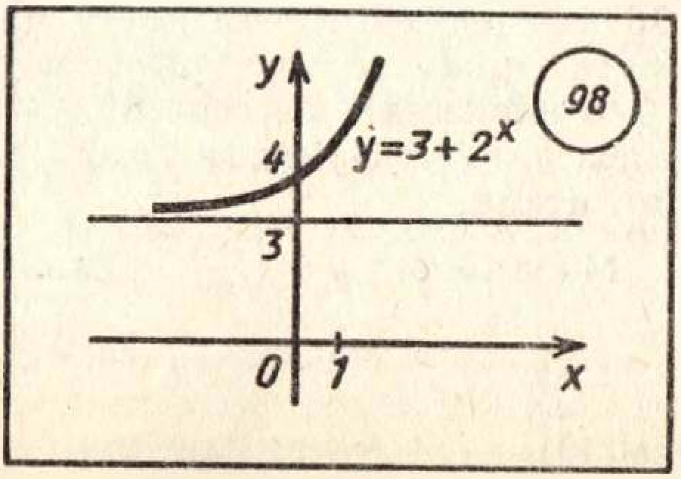
функциянең кыйммәте нульдән аз аерылуын искәрәбез, өстәвенә аерманы теләсә нинди алдан бирелгән уңай ε санынннан кечкенәрәк итәргә мөмкин. Димәк, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ була. Бу геометрик юл белән дә расланa: $y=0$ турысы $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясе өчен горизонталь асимптота була (96 нчы рәсем).

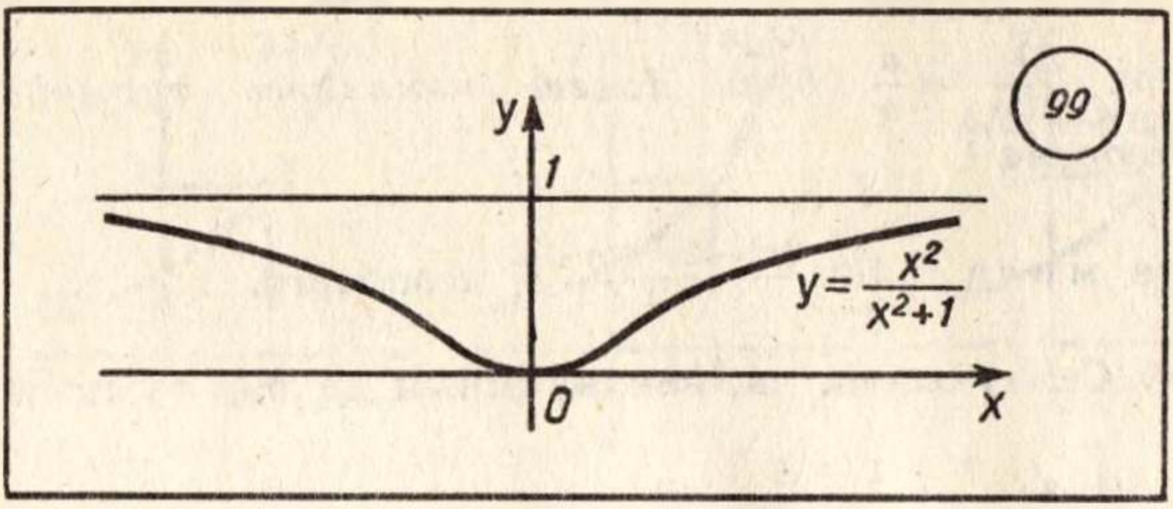
Аргументның модуль буенча җитәрлек дәрәҗәдә зур, ләкин тискәре кыйммәтләрен сайлаганда да, $y=b$ турысы $y=f(x)$ функциясе өчен горизонталь асимптота була ала (97 нче рәсем). Ул вакытта b саны $x\to-\infty$ кә *омтылганда* $y=f(x)$ функциясенең чикләмәсе була дип әйтәләр, һәм $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ дип язалар. Мәсәлән, $\lim(3+2^x)=3$ (98 нче рәсем).

Ниһаять, $y=b$ турысы $x\to+\infty$ кә омтылганда да, $x\to-\infty$ кә омтылганда да $y=f(x)$ функциясе өчен горизонталь асимптота була ала. Мәсәлән, $y=1$ турысы $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ функциясе өчен горизонталь асимптома була (99 нчы рәсем). Бу очракта b саны $x\to\infty$ кә омтылганда $y=f(x)$ функциясенең чикләмәсе була дип әйтәләр, һәм $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ дип язалар. Шулай итеп, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ тигезлекләре дөрес була.

Теләсә нинди $\varepsilon>0$ саны өчен $|f(x)-b|<\varepsilon$ тигезсезлегe үтәлерлек барлык $x<-M$ өчен $M>0$ саны табылса, b са-







ны $x \quad -\infty$ кә *омтылганда* $y=f(x)$ *функциясенең чикләмәсе* дип атала.

Теләсә нинди $\varepsilon>0$ саны өчен $|f(x)-b|<\varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек барлык x лар өчен, биредә $|x|>M$, $M>0$ табылса, b саны $x \quad \infty$ кә *омтылганда* $y=f(x)$ *функциясенең чикләмәсе* дип атала.

$x \quad \infty$ кә омтылганда функциянең чикләмәсен белсәк, графикның горизонталь асимптотасын төзергә мөмкин (әгәр чикләмә b га тигез икән, $y=b$ горизонталь асимптота була); киресенчә: әгәр дә функция графигының горизонталь асимптотасы билгеле булса, $x \quad \infty$ кә омтылганда аның чикләмәсе турында нәтиҗә ясарга мөмкин (әгәр $y=b$ горизонталь асимптота булса, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ була).

204. $x \quad \infty$ кә омтылганда функцияләрнең чикләмәләрен исәпләү. $x \quad \infty$ кә омтылганда функцияләрнең чикләмәләрен исәпләү өчен түбәндәге чикләмәләр өстендә операцияләр турындагы теоремалар кулланыла:

Т.7.2. Әгәр $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$ булса, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)=a+b$ була *(сумма чикләмәсе турындагы теорема).*

Т.7.3. Әгәр $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$ булса, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=ab$ була *(тапкырчыгыш чикләмәсе турындагы теорема).*

Т.7.4. Әгәр $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ булса, $\lim\limits_{x\to\infty} kf(x)=ka$ була *(даими тапкырлаучыны чикләмә тамгасы тышына чыгару турындагы теорема).*

Т.7.5. Әгәр $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$ һәм $b\neq 0$ булса, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ була *(өлеш чикләмәсе турындагы теорема).*

1 нче мисал. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x+3}{x^3+4}$ исәпләргә.

Чишү. Санаучының да, ваклаучының да һәр буынын x^3 ка бүлеп, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}$ табабыз һәм алга таба

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+3\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1+4\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$ табабыз.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ булганга күрә (п. 203 не кара), Т.7.2.—Т.7.5 теоремаларын кулланып табабыз: $\frac{3-2\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{1+4\cdot 0\cdot 0\cdot 0}=3.$

Шулай итеп, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x+3}{x^3+4}=3.$

2 нче мисал. $x\ +\infty$ кә омтылганда $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ функциясе графигының горизонталь асимптотасын табарга.

Чишү. Горизонталь асимптотаны табу өчен, $x\ +\infty$ кә омтылганда функциянең чикләмәсен исәпләп чыгарырга кирәк. Табабыз:

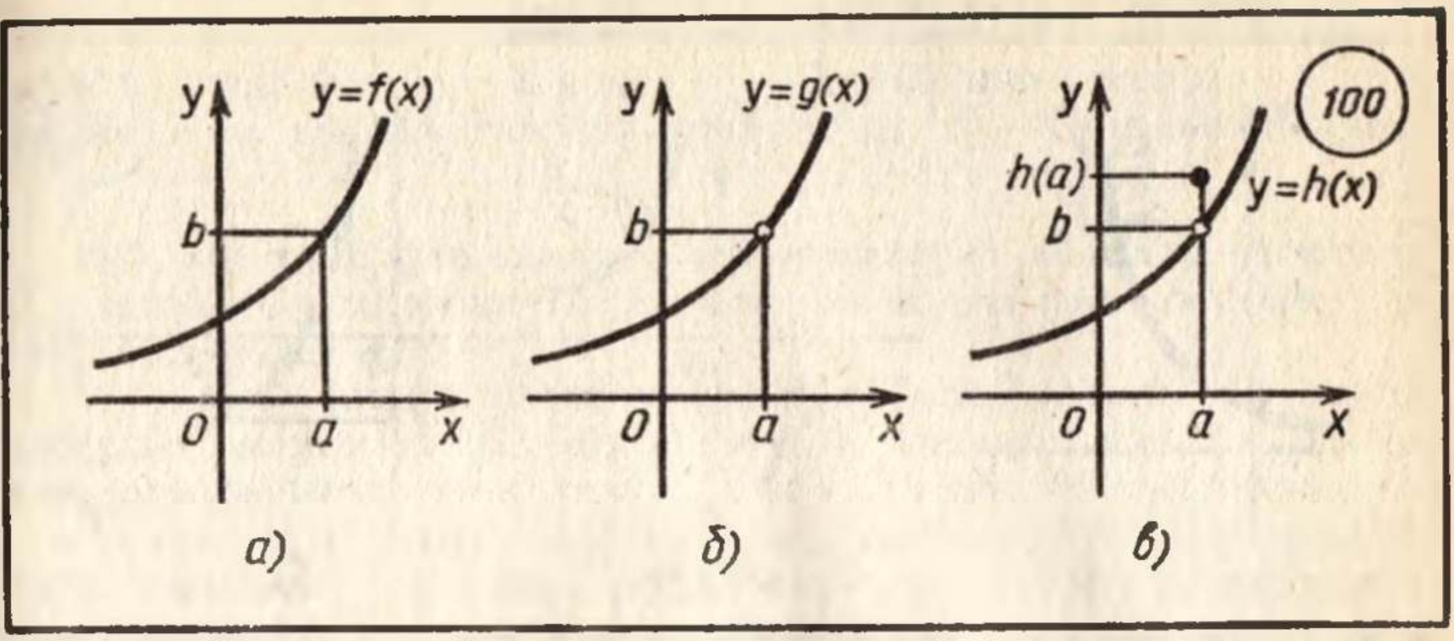
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0.$$

Димәк, $y=0$ $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ функциясе графигының горизонталь асимптотасы була.

205. Ноктада функция чикләмәсе. Өзлексез функцияләр.

Графиклары 100 нче рәсемдә сурәтләнгән $y=f(x)$, $y=g(x)$ һәм $y=h(x)$ функцияләрен карап үтик. Болар төрле функцияләр, алар үзләренең торышлары белән $x=a$ ноктасында аерылып торалар. Әгәр дә $x\neq a$ булса, $f(x)=g(x)=h(x)$ була. Барлык өч очракта да x a га якынрак булган саен, $f(x)$ яки $g(x)$, яки $h(x)$ функциясенең кыйммәте b саныннан

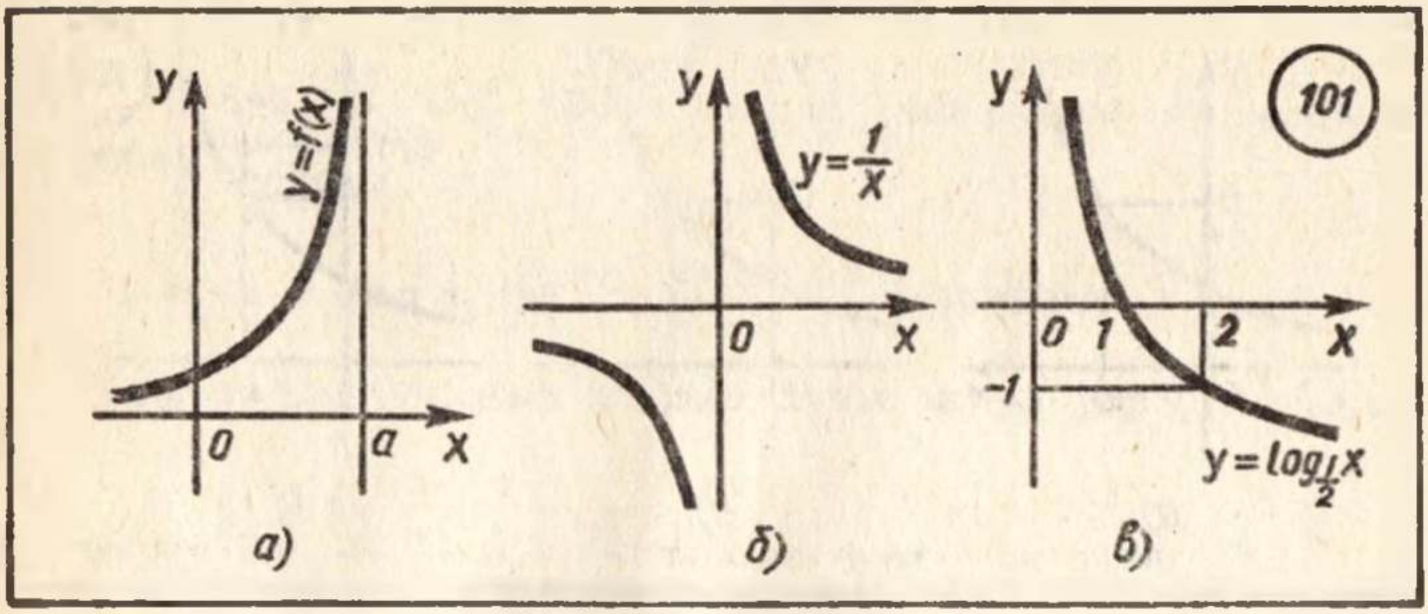


азрак аерылып торганын күрәбез, бу аерма тиңдәшле рәвештә $|f(x)-b|$, $|g(x)-b|$, $|h(x)-b|$ аңлатмалары белән күрсәтелә. Карап үтелгән функцияләрнең теләсә кайсысы өчен x a га *омтылганда функциянең чикләмәсе b га тигез* дип әйтәләр; тиңдәшле рәвештә язалар: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$. Монда тагын бер кат a ноктасының үзендә функциянең кыйммәте (һәм хәтта бу кыйммәтнең булуы яки булмавы факты) игътибарга алынмавы турында басым ясап үтәбез.

Билгеләмә болай дип әйтелә: әгәр теләсә нинди $\varepsilon>0$ санын алып та x ның җитәрлек дәрәҗәдә a га якын барлык кыйммәтләре өчен, ягъни барлык a ноктасы тирәлегендәге x лар өчен, бәлки бу ноктаның үзеннән башка $|f(x)-b|<\varepsilon$ тигезсезлеге үтәлсә, b саны x a га омтылганда $y=f(x)$ функциясенең чикләмәсе дип атала.

Тагын бер кат 100 нче рәсемне карап үтик. Графигы 100 нче *а* рәсемендә сурәтләнгән $y=f(x)$ функциясе өчен $b=f(a)$ тигезлеге үтәлгәнен күрәбез, ягъни $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Әгәр $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ булса, функция *a ноктасында өзлексез* дип атала. Әгәр функция $(a,\ b)$ интервалның һәр ноктасында өзлексез булса, ул бу *интервалда өзлексез* дип атала. Әгәр функция $(a;\ b)$ интервалында өзлексез, a һәм b нокталарында билгеле булса һәм $(a;\ b)$ интервалындагы x ноктасы a һәм b нокталарына омтылганда, $y=f(x)$ функциясенең кыйммәтләре тиңдәшле рәвештә $f(a)$, $f(b)$ кыйммәтләренә омтылса, $y=f(x)$ функциясе $[a,\ b]$ *кисемтәсендә өзлексез* дип атала.

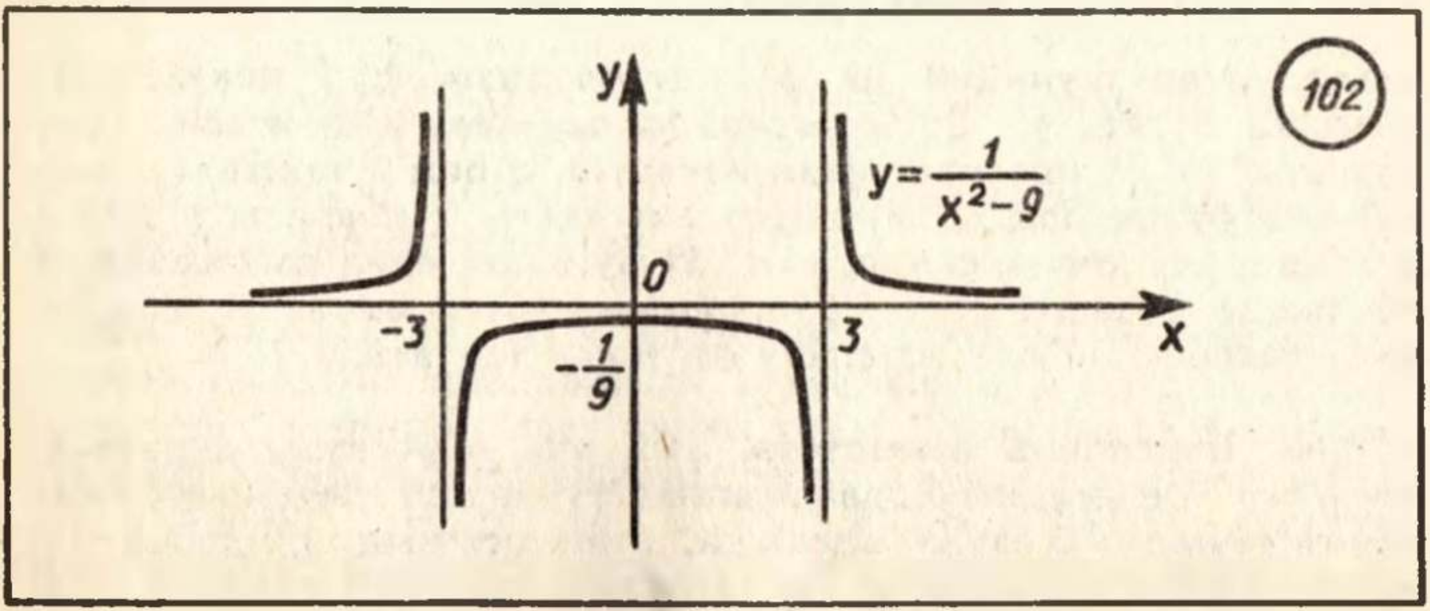
206. Вертикаль асимптота. 101 нче *а* рәсемдә сурәтләнгән $y=f(x)$ функциясе графигының түбәндәге үзенчәлеге бар: нинди генә $p>0$ санын алсак та, a ноктасының шундый тирәлеген күрсәтергә мөмкин, ул тирәлектәге теләсә нинди x өчен



$(x \neq a)$ графикның модуль буенча тиңдәшле ординатасы P дан зуррак, ягъни $|f(x)| > p$ булыр. $x = a$ турысы $y = f(x)$ функциясе *графигының вертикаль асимптотасы* була дип әйтәләр, һәм $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ дип язалар.

Мәсәлән, $y = \frac{1}{x}$ функциясе графигының $x = 0$ вертикаль асимптотасы һәм $y = 0$ горизонталь асимптотасы (рәсем 101, *б*) була; $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функциясе графигының $x = 0$ вертикаль асимптотасы бар (рәсем 101, *в*) $y = \operatorname{tg} x$ функциясе графигының $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$ һ. б. вертикаль асимптоталары була.

Әгәр $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ һәм $p(x)$, $q(x)$ функцияләре a ноктасында өзлексез булса, өстәвенә $p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$ булса, $x = a$ $y = f(x)$ функциясе графигының вертикаль асимптотасы була.



Мәсәлән, $y=\frac{1}{x^2-9}$ функциясе графигының ике вертикаль асимптотасы бар: $x=3$ һәм $x=-3$ (102 нче рәсем). $-x$ ның күрсәтелгән кыйммәтләрендә ваклаучы (x^2-9) нульгә әйләнә.

207. Ноктада функциянең чикләмәләрен исәпләү. Ноктада функциянең чикләмәләрен исәпләү өчен төп фактлар итеп түбәндәгеләр санала:

1) теләсә нинди элементар функция, ягъни аналитик рәвештә рациональ (п. 48 не кара), иррациональ (п. 48 не кара), трансцендент аңлатма белән яки санап чыккан арифметик операцияләрнең чикле саны ярдәмендә төзелгән аңлатма белән бирелгән функция, функциянең билгеләнү өлкәсендәге теләсә нинди эчке ноктасында (ягъни функциянең билгеләнү өлкәсендә үзенең нindидер тирәлеге белән яткан ноктада) өзлексез була; әгәр $x=a$ ноктасы катлаулы функция $f(g(x))$ ның билгеләнү өлкәсенең эчке ноктасы булса, катлаулы функция $f(g(x))\,a$ ноктасында өзлексез була.

2) әгәр $y=f(x)$ функциясе $x=a$ ноктасында өзлексез булса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ була.

1 нче мисал. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$ не исәпләргә.

Чишү. $x=4$ ноктасы $f(x)=\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$ функциясенең билгеләнү өлкәсенең эчке ноктасы, димәк, функция бу ноктада өзлексез. $f(4)=\frac{\sqrt{4}+4^2}{2\cdot 4+1}=2$ була. Димәк, $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}=2.$

2 нче мисал. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}$ ны исәпләргә.

Чишү. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}$ функциясе $x=\pi$ ноктасында өзлексез. Табабыз:

$$f(\pi)=\frac{\sin\pi}{\cos^2\pi+\operatorname{tg}\pi}=\frac{0}{1+0}=0.$$

Димәк,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}=0.$$

3 нче мисал. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ ны исәпләргә.

Чишү. $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ функциясе $x=3$ ноктасында билгеләнмәгән, чөнки бу ноктада ваклананың ваклаучысы нульгә әйләнә. $x=3$ ноктасында x^2+9 санаучысы нульгә тигез булмаганга күрә, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}=\infty$ дип язалар (п. 206 ны кара). $x=3$ турысы $y=\frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$ функция графигының вертикаль асимптотасы була.

4 нче мисал. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ ны исәпләргә.

Чишү. Алдагы мисалдан аермалы буларак, биредә $x=3$ булганда, санаучысы да, ваклаучысы да нульгә әйләнә. Мондый очракларда чикләмәне исәпләү өчен функцияне бирүче аңлатманың бердәй рәвешүзгәртүләрен эшләргә кирәк. Табабыз: $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)((x-2)}$. $x\to 3$ булганда функциянең үзенең $x=3$ ноктасындагы кыйммәте игътибарга алынмый, шуңа күрә вакланманы $x-3$ кә кыскартырга мөмкин, моннан $\frac{x+3}{x-2}$ чыга. Шулай итеп,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6.$$

5 нче мисал. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$ не исәпләргә.

Чишү. $x=-2$ булганда, санаучы да, ваклаучы да нульгә әйләнә. Бирелгән аңлатманың түбәндәге рәвешүзгәртүләрен эшлик:

$$\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)}=$$

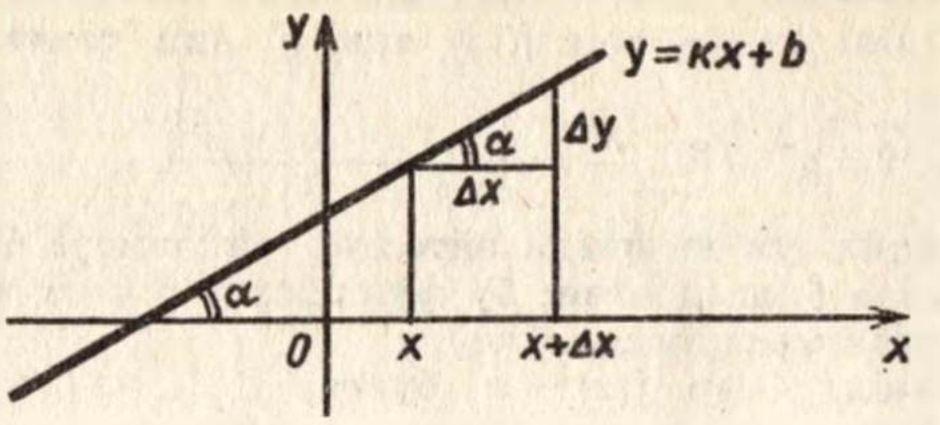
$$=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x})^2-3^2}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)}=-(\sqrt{7-x}+3).$$

Шулай итеп,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\lim_{x\to -2}(-\sqrt{7-x}-3)=-(\sqrt{7}+2+3)=-6.$$

§ 21. Чыгарылма һәм аның кулланылышы

208. Аргументның үсемтәсе. Функциянең үсемтәсе. $y=f(x)$ функциясе x һәм x_1 нокталарында билгеләнгән булсын. x_1-x_2 аермасы *аргументның үсемтәсе*, ә $f(x)-f(x)$ аермасы аргументның x кыйммәтеннән аргументның x_1 кыйммәтенә күчкәндәге



103

функциянең үсемтәсе дип атала. Аргументның үсемтәсен Δx дип тамгалыйлар; димәк, $\Delta x = x_1 - x$, ягъни $x_1 = x + \Delta x$. Функциянең үсемтәсен Δf яки Δy дип тамгалыйлар; димәк, $\Delta f = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

1 нче мисал. Аргументның x кыйммәтеннән $x + \Delta x$ кыйммәтенә күчкәндә $y = x^3$ функциясенең үсемтәсен табарга.

Чишү. $f(x) = x^3$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ була. Димәк, $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Шулай итеп, $\Delta f = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$. Бу формула буенча теләсә нинди x һәм Δx өчен Δf кыйммәтен исәпләп чыгарырга мөмкин. Мәсәлән, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$ булганда, табабыз:

$$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2) \cdot 0{,}1 = 1{,}261;$$

$x = 1$, $\Delta x = -0{,}2$ булганда $\Delta f = f(0{,}8) - f(1) = (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \times \times (-0{,}2) + (-0{,}2)^2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}488$ була.

2 нче мисал. Сызыкча функция $y = kx + b$ өчен $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ тигезлеге дөрес икәнен исбатларга.

Чишү. $f(x) = kx + b$, $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b$. Димәк, $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + b) - (kx + b) = k\Delta x$, моннан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ га икәне килеп чыга, шушыны исбатларга кирәк иде дә.

Исбатланган тигезлекнең геометрик мәгънәсе 103 нче рәсемдә сурәтләнгән.

209. Чыгарылманың билгеләмәсе. $y = f(x)$ функциясе x ноктасында һәм аның ниндидер тирәлегендә билгеләнгән булсын ди. Δx — аргументның үсемтәсе булсын, өстәвенә $x + \Delta x$ ноктасы x ноктасының күрсәтелгән тирәлегендә ята, ә Δf — функциянең тиңдәшле үсемтәсе, ягъни $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Δx 0 гә омтылганда функция үсемтәсе Δf ның аргумент үсемтәсе Δx ка чагыштырмасының чикләмәсе булса, $y = f(x)$ функциясе x *ноктасында дифференциалланучы* функция дип атала, ә бу чикләмә x ноктасындагы $y=f(x)$ *функция чыгарылмасының кыйммәте* дип атала һәм $f'(x)$ яки y' дип тамгалана. Димәк,

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$f'(x)$ — яңа функция, ул югарыда әйтелгән чикләмәсе булган барлык нокталарда билгеләнгән; бу функцияне $y=f(x)$ *функциясенең чыгарылмасы* дип атыйлар.

1 нче мисал. Әгәр $f(x)=x^2$ булса, $f'(2)$ не табарга.

Чишү. Табабыз: $f(2)=2^2=4$, $f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2$, $\Delta f=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-4=4\Delta x+(\Delta x)^2$.

Шулай булгач, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$, ә $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.

Димәк, $f'(2)=4$.

Билгеләмәгә таянып, $y=f(x)$ функциясенең чыгарылмасын табу өчен түбәндәге планны тәкъдим итәргә мөмкин:

1) x ның кыйммәтен билгелибез, $f(x)$ ны табабыз.

2) x аргументына Δx үсемтәсе бирәбез, $f(x+\Delta x)$ ны табабыз.

3) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ функциясенең үсемтәсен исәпләп чыгарабыз.

4) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасын төзибез.

5) Δx 0 гә омтылганда $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ чагыштырмасының чикләмәсен табабыз.

2 нче мисал. $y=x^3$ функциясенең чыгарылмасын табарга.

Чишү.

1) $f(x)=x^3$.

2) $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$.

3) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=(3x^2+3x\cdot\Delta x+$ $+(\Delta x)^2)\Delta x$ (п. 208 не кара).

4) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2$.

Шулай итеп, $(x^3)'=3x^2$.

210. Дифференциаллау формулалары. Чыгарылмалар таблицасы. Чыгарылманы табу операциясен *дифференциаллау* дип атыйлар. 209 нчы пунктта дифференциаллау формулаларының берсе табылды: $(x^3)'=3x^2$. Шундый план буенча калган формулаларны да чыгарырга мөмкин, алар түбәндә китерелә.

1) $(C)'=0$.
2. $(kx+b)=k$.
3. $(x^r)'=rx^{r-1}$.
4. $(e^x)'=e^x$.
5. $(a^x)'=a^x\ln a$.
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.
7. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.
8. $(\sin x)'=\cos x$.
9. $(\cos x)'=-\sin x$.
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Мәсәлән, $(2x-3)'=2$ (2 нче формула); $(x^{10})'=10x^9$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)=(x^{-2})=-2x^{-3}$, $(\sqrt[5]{x^3})'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ (өченче формула); $(5^x)'=5^x\ln 5$ (4 нче формула); $(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$ (7 нче формула).

211. Сумманы, тапкырчыгышны, өлешне дифференциаллау. Әгәр u һәм v функцияләре x ноктасында дифференциалланучы булса:

1^0. Аларның суммасы x ноктасында дифференциалланучы була һәм

$(u+v)'=u'+v'$ *(сумманы дифференциаллау турындагы теорема).*

2^0. Cu функциясе, биредә C — даими, x ноктасында дифференциалланучы була һәм

$(Cu)'=Cu'$ *(даими тапкырлаучыны чыгарылма тамгасы алдына чыгару турындагы теорема).*

3^0. u һәм v функцияләренең тапкырчыгышы x ноктасында дифференциалланучы була һәм

$(uv)'=u'v+uv'$ *(тапкырчыгышны дифференциаллау турындагы теорема)*;

4^0. u һәм v функцияләренең өлеше x ноктасында дифференциалланучы була, $v(x)\neq 0$ булса, һәм

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ *(өлешне дифференциаллау турындагы теорема).*

1 нче мисал. $y=2\sin x-\frac{\cos x}{3}+5$ функциясенең чыгарылмасын табарга.

Чишү. 1^0 һәм 2^0 теоремаларны кулланып, табабыз:

$$\left(2\sin x-\frac{\cos x}{3}+5\right)'=(2\sin x)'+\left(-\frac{1}{3}\cos x\right)'+5'=$$

$$=2(\sin x)'-\frac{1}{3}(\cos x)'+5'.$$

Хәзер дифференциаллауның тиңдәшле формулаларын гына кулланасы кала (п. 210 ны кара). $2\cos x-\frac{1}{3}(-\sin x)+0=$

$$=2\cos x+\frac{1}{3}\sin x$$ ны табабыз.

Шулай итеп, $\left(2\sin x-\frac{\cos x}{3}+5\right)'=2\cos x+\frac{\sin x}{3}.$

2 нче мисал. $(x^{\frac{2}{5}}\log_3 x)'$ ны табарга.

Чишү. Тапкырчыгышны дифференциаллау турындагы теоремадан файдаланып, табабыз: $\left(x^{\frac{2}{5}}\log_3 x\right)'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'\log_3 x+x^{\frac{2}{5}}(\log_3 x)'$. Дифференциаллауның тиңдәшле формулаларын кулланасы кала (п. 210 ны кара). $\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\log_3 x+x^{\frac{2}{5}}\times\times\frac{1}{x\ln 3}$ не табабыз.

Шулай итеп, $\left(x^{\frac{2}{5}}\log_5 x\right)'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\log_3 x+\frac{x^{-\frac{3}{5}}}{\ln 3}=\frac{0{,}4\ln x+1}{\sqrt[5]{x^3}\ln 3}.$

3 нче мисал. Әгәр $f(x)=\frac{2^x}{x^2+1}$ булса, $f'(0)$ не табарга.

Чишү. Башта $f'(x)$ ны табабыз. Өлешне дифференциаллау турындагы теореманы кулланып, $f'(x)=\frac{(2^x)(x^2+1)-2^x(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$ һәм алга таба $\frac{2\ln 2\cdot(x^2+1)-2^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ табабыз.

Хәзер $f'(0)$ не исәпләп чыгарабыз.

$$f'(0)=\frac{2^0\ln 2\cdot(0^2+1)-2^0\cdot 2\cdot 0}{(0^2+1)^2}=\ln 2.$$

212. Катлаулы функция һәм аны дифференциаллау. $y=\sin x^2$ функциясен карыйк. Бу функциянең кыйммәтен билгеләнгән x ноктасында табу өчен: 1) x^2 ны исәпләргә; 2) x^2 ның табылган кыйммәтендә синусның кыйммәтен табарга кирәк. Икенче сүз белән әйткәндә, башта $g(x)=x^2$ функциясенең кыйммәтен, ә аннары $\sin g(x)$ ны табарга кирәк. Мондый очракларда *катлаулы $f(g(x))$ функциясе бирелгән* дип әйтәләр. Безнең мисалда $u=g(x)=x^2$, ә $f(u)=\sin u$. Тагын ике мисал карап үтик.

1 нче мисал. Әгәр $g(x)=\ln x$, $f(u)=\sqrt{u}$ булса, катлаулы функция $f(g(x))$ ны төзергә.

Чишү. $f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\ln x}$.

2 нче мисал. Катлаулы функция $y=\operatorname{tg}^5(2x+1)$ нинди функцияләрдән төзелгән?

Чишү. Бу функция өч функциядән тора: $g(x)=2x+1$, $h(u)=\operatorname{tg} u$, $f(z)=z^5$. Чыннан да, $f(h(g(x)))=(h(g(x)))^5=$ $=(\operatorname{tg}(g(x)))^5=(\operatorname{tg}(2x+1))^5=\operatorname{tg}^5(2x+1)$.

$y=f(g(x))$ — катлаулы функция булсын, өстәвенә x ноктасында $u=g(x)$ функциясе дифференциалланучы, ә $y=f(u)$ функциясе тиңдәшле u ноктасында дифференциалланучы. Ул вакытта $y=f(g(x))$ функциясе x ноктасында дифференциалланучы функция була, өстәвенә

$$y'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

$f'(g(x))$ язмасы чыгарылманың $f'(x)$ булган формуласы буенча исәпләнүен аңлата, ләкин x урынына $g(x)$ куела.

3 нче мисал. $((3x+5)^4)'$ табарга.

Чишү. Биредә $g(x)=3x+5$, $f(u)=u^4$, $f(g(x))=(3x+5)^4$. Димәк, $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=4(3x+5)^3(3x+5)'=4(3x+5)^3\cdot 3=$ $=12(3x+5)^3$.

4 нче мисал. $(\operatorname{tg}(x^2+x+1))'$ табарга.

Чишү. $(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}$ булганга күрә, $(\operatorname{tg}(x^2+x+1))'=$

$$=\frac{1}{\cos^2(x^2+x+1)}\cdot(x^2+x+1)'=\frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x+1)}.$$

213. Чыгарылманың физик мәгънәсе. Әгәр $s=s(t)$ турысызыклы хәрәкәтнең законы булса, $s'(t)$ t вакыты моментында хәрәкәтнең тизлеген аңлата, ягъни $v=s'(t)$ (моменталь тизлек).

Мәсәлән, җисем иркле төшү законы $s=\frac{gt^2}{2}$ бәйләнеше белән аңлатыла. Ул вакытта t моментында төшүнең тизлеге түбәндәгечә була:

$$v=s'=\left(\frac{gt^2}{2}\right)=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Гомумән, x ноктасында $y=f(x)$ функциясенең чыгарылмасы *функциянең үзгәрү тизлеген* аңлата, ягъни $y=f(x)$ бәйлелеге белән тасвирланган процесс барышының тизлеген аңлата. *Чыгарылманың физик мәгънәсе* шуннан гыйбарәт. Мәсәлән, $y=x^2$ функциясе өчен $f'(x)=2x$ була, $x=2$ булганда $f'(2)=4$ була, ә $x=3$ булганда $f'(3)=6$. Бу $x=2$ ноктасында функция аргументка караганда 4 тапкыр тизрәк, ә $x=3$ ноктасында 6 тапкыр тизрәк үзгәргәнен аңлата.

214. Икенче чыгарылма һәм аның физик мәгънәсе. $y=f(x)$ функциясенең $f'(x)$ чыгарылмасы булсын ди. Үз чиратында бу яңа функциянең дә чыгарылмасы булуы мөмкин. $f'(x)$ функциясенең чыгарылмасы $y=f(x)$ функциясенең *икенче чыгарылмасы* дип атала һәм $f''(x)$ яки y'' дип тамгалана.

1 нче мисал. Әгәр $y=x^{10}$ булса, y'' ны табарга.

Чишү. $(x^{10})'=10x^9$, ә $(10x^9)'=90x^8$ була. Шулай итеп, $(x^{10})''=90x^8$.

$s=s(t)$ турысызыклы хәрәкәт законы булсын ди. Ул вакытта икенче чыгарылма бу хәрәкәт тизлегенең үзгәрү тизлеген аңлата, ягъни $a=s''(t)$ тизләнешне аңлата. Икенче чыгарылманың физик мәгънәсе менә шуннан гыйбарәт.

2 нче мисал. Материаль нокта туры буйлап $s=\frac{1}{2t-1}$ законы буенча хәрәкәт итә. Җисемгә тәэсир итүче көчнең үткән юлның кубына пропорциональ булуын исбатларга.

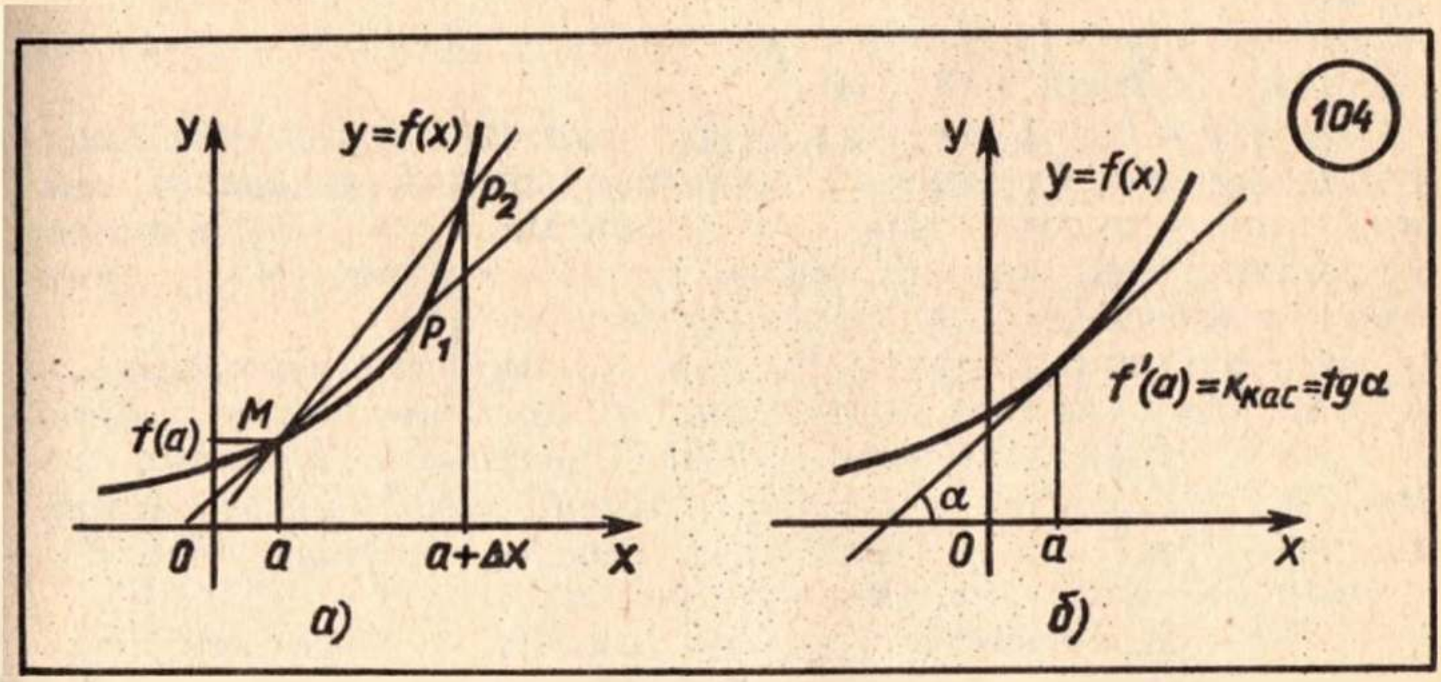
Чишү. Ньютонның икенче законы буенча $F=ma$, биредә F — җисемгә тәэсир итүче көч, a — тизләнеш, m — масса; $a=s''$. $s'=((2t-1)^{-1})'=-(2t-1)^{-2}\cdot(2t-1)'=-2(2t-1)^{-2}$ була;

$$s''=(-2(2t-1)^{-2})'=-2\cdot(-2)\cdot(2t-1)^{-3}\cdot(2t-1)'=$$

$$=8(2t-1)^{-3}=\frac{8}{(2t-1)^3}\text{ була.}$$

Димәк, $F=ma=\frac{8}{(2t-1)^3}=8ms^3$, ягъни F көче s^3 ка пропорциональ ($8m$ — пропорциональлекнең коэффициенты) була.

215. Функция графигына орынма. $(a;\ f(a))$ ноктасы аша узучы һәм почмакча коэффициенты $f'(a)$ булган турыны $x=a$ ноктасында дифференциалланучы $y=f(x)$ функциясенең графигына *орынма* дип атыйлар. Бу билгеләмәнең геометрик мәгънәсе түбәндәгедән гыйбарәт. a ноктасында дифференциалланучы $y=f(x)$ функциясенең графигын карыйк, анда $M(a;\ f(a))$ ноктасын аерып күрсәтик, MP_2 кисүчесен үткәрик, биредә P_2 — $a+\Delta x$ аргументының кыйммәтенә тиңдәш булган графикның ноктасы (104 нче *a* рәсем). MP_2 турысының поч-


104

макча коэффициенты $k_{\text{кис}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (208 нче п. ны кара) формуласы буенча исәпләнә.

Әгәр P ноктасын график буенча M ноктасына якынайтып хәрәкәт иттерсәк, MP турысы M ноктасы тирәли әйләнә башлый. Бу процесста MP кисүчесе барыннан да ешрак ниндидер бер чикләмә торышны алырга омтыла. Бу чикләмә турыдан гыйбарәт, аның белән $y=f(x)$ функциясенең графигы a ноктасының ниндидер тирәлегендә тоташа; менә шушы туры $x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясенең графигына орынма була. Чыннан да, шундый чикләмә турының почмакча коэффициенты (аны k дип тамгалыйбыз) кисүченең почмакча коэффициенты P дан M га чикләмә күчү процессында килеп чыга:

$$k = \lim_{P \to M} k_{\text{кис}}.$$

Ләкин $P \to M$ шартын $\Delta x \to 0$ шарты белән алмаштырырга мөмкин, $k_{\text{кис}}$ урынына $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ны язарга була. Нәтиҗәдә табабыз:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ләкин $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $y=f(x)$ функциясе чыгарылмасының билгеләнгән $x=a$ ноктасындагы кыйммәте ул, ягъни $f'(a)$ (209 нчы п. ны кара).

Шулай итеп, $k=f'(a)$, ягъни *$x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясе чыгарылмасының кыйммәте $x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясе графигына орынманың почмакча коэффи-*

циентына тигез (104 нче *б* рәсем). *Чыгарылманың геометрик мәгънәсе* шуннан гыйбарәт.

Әгәр $y=f(x)$ функциясе $x=a$ ноктасында дифференциалланучы булса, бу ноктада графикка орынма үткәрергә мөмкин; киресе дә дөрес, әгәр $x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясе графигына вертикаль булмаган орынма үткәреп булса, функция x ноктасында дифференциалланучы була.

Бу, функция графигы буенча, функциянең чыгарылмасы булган яки булмаган нокталарны табарга мөмкинчелек бирә. Мәсәлән, графигы 105 нче рәсемдә сурәтләнгән функция барлык нокталарда да, $x=1$ ноктасыннан тыш, дифференциалланучы була; $x=1$ ноктасында график очланып тора һәм шуңа күрә орынманы үткәреп булмый.

$x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясенең графигына *орынманың тигезләмәсе* түбәндәге рәвештә була:

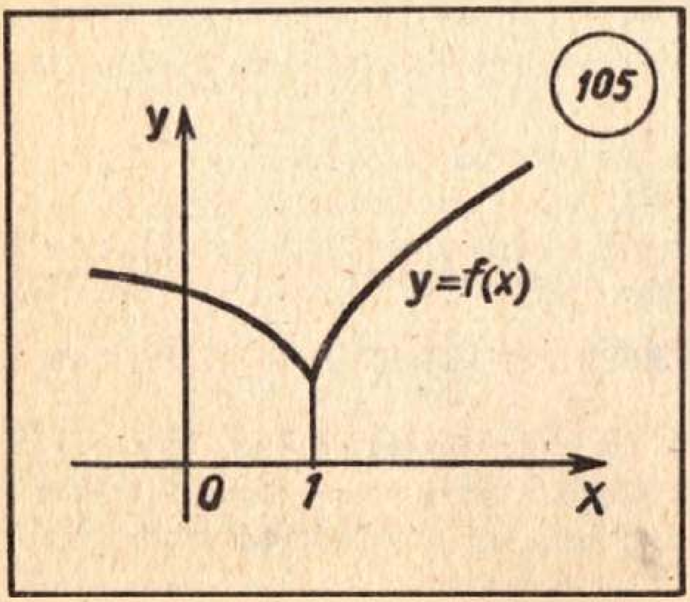
$$y=f(a)+f'(a)(x-a). \qquad (1)$$

1 нче мисал. $x=4$ ноктасында $y=\sqrt{x}$ функциясе графигына орынманың тигезләмәсен төзергә.

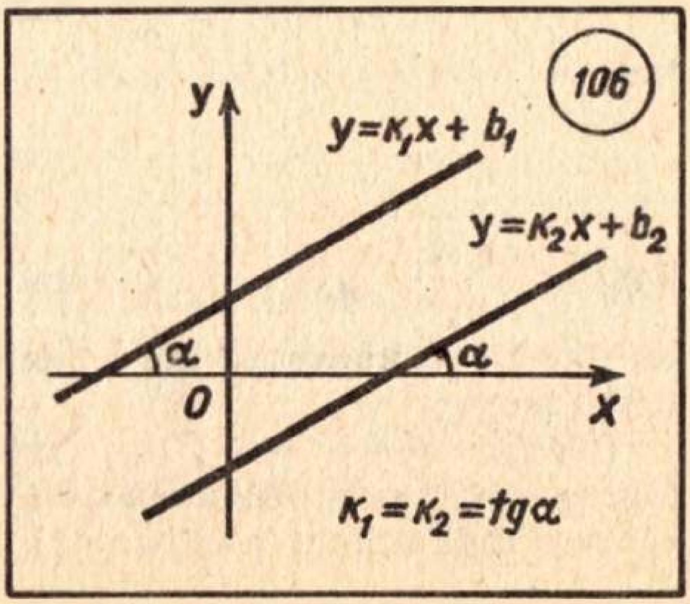
Чишү. $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ була; $a=4$, $f(a)=\sqrt{4}=2$, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$. a, $f(a)$ һәм $f'(a)$ ның табылган кыйммәтләрен (1) тигезләмәгә куеп, табабыз:

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4), \text{ ягъни } y=\frac{1}{4}x+1.$$

2 нче мисал. x күчәре белән $x=0$ ноктасында үткәрелгән $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ функциясе графигына орынма хасил иткән почмакны табарга.



105



106

Чишү. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x\cdot 3=\sqrt{3}\cos 3x$ була; $a=0$, $f'(a)=\sqrt{3}\cos 0=\sqrt{3}$. Димәк, $k_{\text{орын}}=\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, моннан эзләнелә торган α почмагы 60° ка тигез дигән нәтиҗәгә киләбез.

3 нче мисал. $y=-x+2$ турысына параллель булырлык итеп, $y=\frac{x+2}{x-2}$ функциясе графигына орынма үткәрергә.

Чишү. Ике туры почмакча коэффициентлары тигез булганда һәм шул вакытта гына параллель була (106 нчы рәсем). Бирелгән турының почмакча коэффициенты -1 гә тигез, ә кисүченең почмакча коэффициенты $f'(a)$ га тигез. Димәк, $f'(a)=1$ тигезләмәсеннән бу орыну ноктасын таба алабыз.

Табабыз: $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$; $f'(x)=\frac{(x+2)'(x-2)-(x+2)(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-2)^2}$; димәк, $f'(a)=-\frac{4}{(a-2)^2}$ була.

$-\frac{4}{(a-2)^2}=-1$ тигезләмәсен чишәбез. $(a-2)^2=4$ була, димәк, $a-2=2$, моннан $a_1=4$, яки $a-2=-2$, моннан $a_2=0$.

Әгәр $a=4$ булса, $f(a)=\frac{4+2}{4-2}=3$ була һәм орынманың тигезләмәсе $y=3-(x-4)$ рәвешендә була, ягъни $y=7-x$.

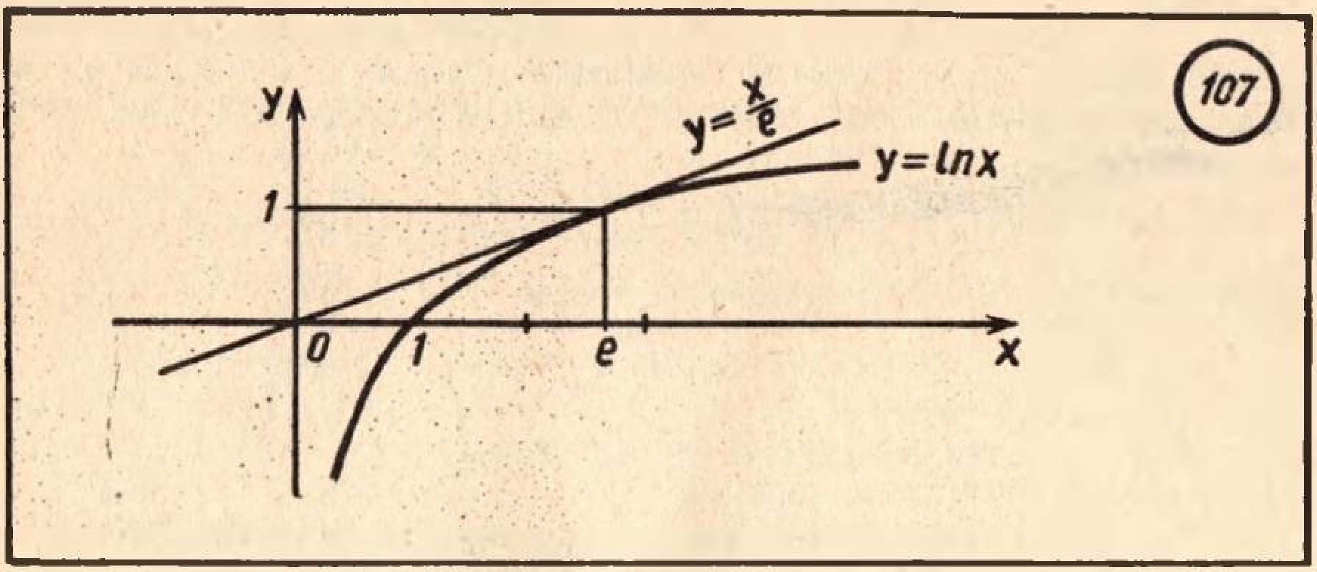
Әгәр $a=0$ булса, $f(a)=\frac{0+2}{0-2}=-1$ була һәм орынманың тигезләмәсе $y=-1-(x-0)$ рәвешендә була, ягъни $y=-x-1$.

4 нче мисал. $O(0;\ 0)$ ноктасы аша $y=\ln x$ функциясе графигына орынма үткәрергә.

Чишү. Биредә, алдагы мисалдагы кебек, орыну ноктасы $x=a$ билгеле түгел. Аны табу өчен гомуми рәвештә орынма тигезләмәсе төзибез. $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$ була, димәк, $f(a)=\ln a$, $f'(a)=\frac{1}{a}$ һәм орынманың тигезләмәсе түбәндәге рәвештә була:

$$y=\ln a+\frac{1}{a}(x-a). \tag{2}$$

Шарт буенча орынма $O(0;\ 0)$ ноктасы аша узарга тиеш, ягъни $O(0;\ 0)$ ноктасының координаталары (2) тигезләмәне канәгатьләндерергә тиеш. $x=0$, $y=0$ не (2) тигезләмәгә куеп, $0=\ln a+\frac{1}{a}(0-a)$ ны табабыз, моннан $0=\ln a-1$, $\ln a=1$, $a=e$ була. Әгәр хәзер (2) тигезләмәгә орыну ноктасы $a=e$ ның табылган кыйммәтен куйсак, $y=\ln e+\frac{1}{e}(x-e)$ ны табабыз, ягъни



$y=1+\frac{x}{e}-1$, $y=\frac{x}{e}$ була. Бу — эзләнелә торган орынманың тигезләмәсе (107 нче рәсем).

216. Чыгарылманы функциянең монотонлыгына тикшерүдә куллану. Күп очракта чыгарылма функцияне монотонлыкка чагыштырмача җиңел тикшерергә мөмкинчелек бирә. Бу түбәндәге ике теорема ярдәмендә ирешелә:

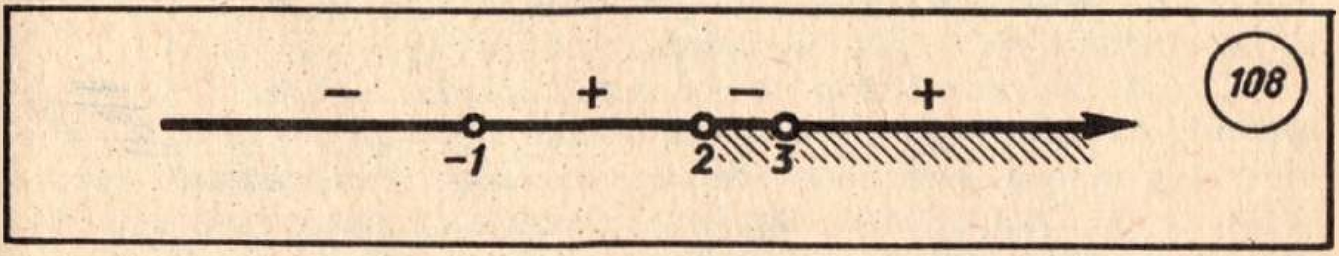
Т.7.1. $y=f(x)$ функциясе билгеләнгән һәм X аралыгында өзлексез булсын һәм аралыкның барлык эчке нокталарында тискәре булмаган чыгарылмасы булсын, ди ($f'(x)\geqslant 0$), өстәвенә $f'(x)=0$ тигезлеге бу аралыкның чикләнгән бер нокталарында гына үтәлә. Ул вакытта $y=f(x)$ функциясе X аралыгында үсә.

Т.7.2. $y=f(x)$ функциясе билгеләнгән һәм X аралыгында өзлексез булсын һәм бу аралыкның барлык эчке нокталарында уңай булмаган чыгарылмасы булсын, ди. ($f'(x)\leqslant 0$), өстәвенә $f'(x)=0$ тигезлеге бу аралыкның чикләнгән бер нокталарында гына үтәлә. Ул вакытта $y=f(x)$ функциясе X аралыгында кими.

1 нче мисал. $y=x^5+x^3+1$ функциясен монотонлыкка тикшерергә.

Чишү. $y'=5x^4+3x^2$ була. $5x^4+3x^2\geqslant 0$ тигезсезлеге дөрес, өстәвенә $x=0$ ноктасында гына тигезлек тамгасы урынлы. Димәк, 7.1 теоремасы буенча $y=x^5+x^3+1$ функциясе барлык санлы турыда үсә.

2 нче мисал. $y=2\sin x-3x$ функциясен монотонлыкка тикшерергә.



Чишү. $y' = 2\cos x - 3$ була. $|\cos x| \leqslant 1$ булганга күрә, барлык x лар өчен $2\cos x - 3 < 0$ була. Димәк, 7.2 теоремасы буенча $y = 2\sin x - 3x$ функциясе барлык санлы турыда кими.

3 нче мисал. $y = \frac{x^2}{2} - 3\ln(x-2)$ функциясен монотонлыкка тикшерергә.

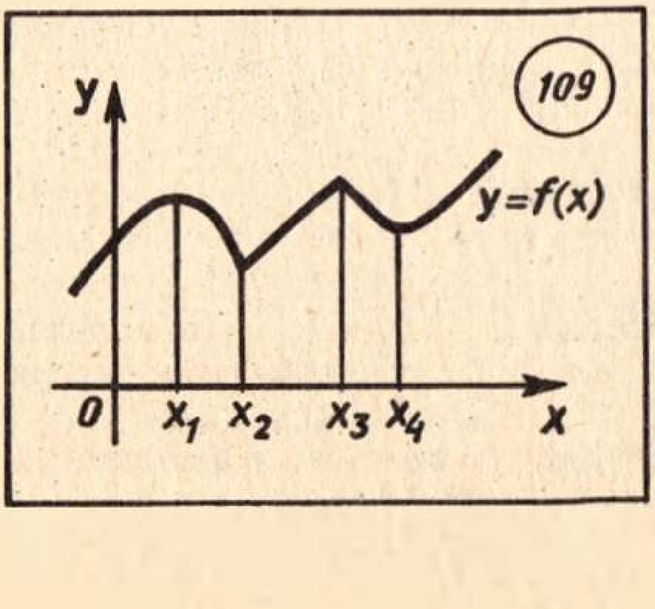
Чишү. $y' = \frac{1}{2}\cdot 2x - 3\cdot\frac{1}{x-2} = x - \frac{3}{x-2} =$

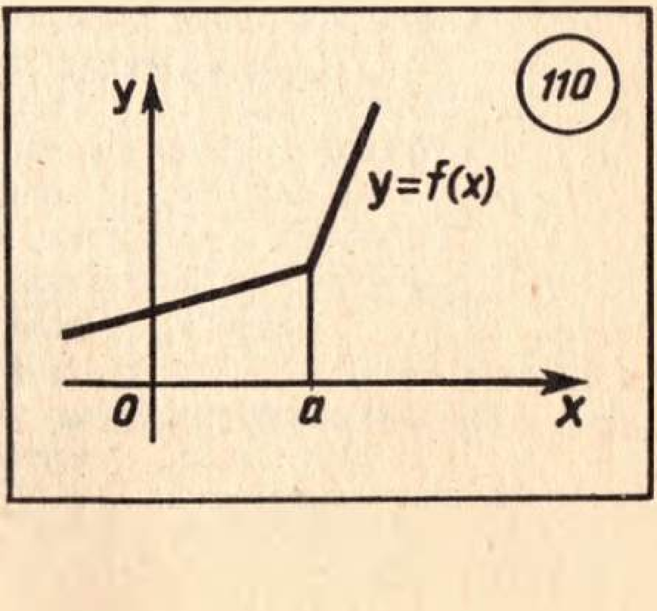
$= \frac{x^2-2x-3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ була.

$\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ аңлатмасының тамгасы 108 нче рәсемдә (183 нче п. ны кара) күрсәтелгәнчә алмашына. Ләкин тикшерелә торган функциянең билгеләнү өлкәсе $x > 2$ тигезсезлеге белән бирелә. Димәк, рәсемдә күрсәтелгән дүрт аралыктан безне икесе генә кызыксындыра: $(2;\ 3)$ аралык — анда $y' < 0$, димәк, функция бу аралыкта кими һәм $(3;\ +\infty)$ аралык, анда $y' > 0$, димәк, функция бу аралыкта үсә.

217. Чыгарылманы функцияне экстремумга тикшергәндә куллану. Әгәр $x = a$ ноктасының тирәлегендә $x \neq a$ өчен $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ булса, $y = f(x)$ функциясенең $x = a$ ноктасында ***максимумы (минимумы)*** бар дип әйтәләр.

Мәсәлән, графигы 109 нчы рәсемдә күрсәтелгән функциянең x_1 һәм x_3 нокталарында максимумы һәм x_2 һәм x_4 нокталарында минимумы бар.





Максимум һәм минимум нокталары бер термин — *экстремум нокталары* белән берләшә.

Тагын бер кат 109 нчы рәсемне карыйк. x_1 һәм x_4 нокталарында функция графигына орынмалар үткәрергә мөмкин икәнен искәрәбез, өстәвенә бу орынмалар x күчәренә параллель була, һәм, димәк, һәрбер орынманың почмакча коэффициенты нульгә тигез; шулай итеп, $f'(x_1)=0$, $f'(x_4)=0$. x_2 һәм x_3 нокталарында функция графигына орынмалар үткәреп булмый, димәк, бу нокталарда $f(x)$ функциясенең чыгарылмалары юк (215 нче п. ны кара). Шулай итеп, 109 нчы рәсемдә экстремум нокталарында я чыгарылма нульгә тигез, я булмый. Бу түбәндәге теорема белән расланучы гомум кагыйдә:

Т.7.3. Әгәр $x=a$ ноктасында $y=f(x)$ функциясенең экстремумы булса, я $f'(a)=0$ була, я $f'(a)$ булмый *(экстремумның кирәкле шарты).*

$f'(a)=0$ булган яки $f'(a)$ сы булмаган һәм функциянең билгеләнү өлкәсенә кергән нокталарны *критик* нокталар дип атыйлар. 7.3 теоремасы функциянең экстремумнары критик нокталарда гына булуы мөмкин икәнен аңлата. Ләкин теореманың киресе дөрес түгел: теләсә нинди критик ноктада да функциянең экстремумы булмый. Мәсәлән, $y=x^3$ функциясенең $x=0$ булган бер критик ноктасы бар (бу ноктада $y'=3x^2=0$), ләкин бу ноктада функциянең минимумы да, максимумы да булмый. Графигы 110 нчы рәсемдә сурәтләнгән функциянең $x=a$ булган критик ноктасы бар — бу бөгелү ноктасы, анда y' булмый, ләкин бу ноктада функциянең максимумы да, минимумы да юк.

Функциянең критик ноктасы кайчан экстремум ноктасы булуын ничек белергә? Түбәндәге теорема бу сорауга җавап бирә:

Т.7.4. $x=a$ ноктасы $y=f(x)$ функциясенең критик ноктасы булсын, һәм һәрбер $(b;\ a)$ һәм $(a;\ c)$ интервалында $f'(x)$ чыгарылмасы булган һәм даими тамгасын саклаган һәм a ноктасын эченә алучы $(b;\ c)$ интервалы булсын. Ул вакытта:

1) әгәр $(b;\ a)$ интервалында $y'>0$, ә $(a;\ c)$ интервалда $y'<0$, булса, $x=a$ $y=f(x)$ функциясенең максимум ноктасы була;

2) әгәр $(b;\ a)$ интервалда $y'<0$, ә $(a;\ c)$ интервалда $y'>0$ булса, $x=a$ $y=f(x)$ функциясенең минимум ноктасы була;

3) әгәр $(b;\ a)$ интервалда да һәм $(a;\ c)$ интервалда да чыгарылма $y'<0$ яки $y'>0$ булса, $x=a$ $y=f(x)$

функциясенең экстремум ноктасы булмый (экстремумның җитәрлек шарты).

7.3. һәм 7.4 теоремаларыннан $y=f(x)$ функциясен экстремумга тикшерүнең түбәндәге кагыйдәсе чыга:

1) Функциянең билгеләнү өлкәсен табарга.

2) $f'(x)$ ны табарга.

3) $f'(x)=0$ тигезлеге үтәлә торган нокталарны табарга.

4) $f'(x)$ булмаган нокталарны табарга.

5) Координаталар турысында барлык критик нокталарны һәм $y=f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсен билгеләргә; һәркайсында $y=f(x)$ функциясенең чыгарылмасы даими тамгасын саклаган, функциянең билгеләнү өлкәсенең аралыклары табыла.

6) 5 нче пунктта табылган һәрбер аралыкта y' ның тамгасын билгеләргә.

7) 7.4 теоремасы буенча һәрбер критик ноктада экстремумның булуы яки булмавы турында нәтиҗә ясарга.

1 нче мисал. $y=2x^3-15x^2+36x+1$ функциясен экстремумга тикшерергә.

Чишү. 1) Функция барлык x лар өчен билгеләнгән.

2) $y'=6x^2-30x+36$.

3) $6x^2-30x+36=0$ тигезлегеннән $x_1=2$, $x_2=3$ не табабыз.

4) y' барлык x ларда була;

5) Координаталар турысында $x_1=2$, $x_2=3$ не билгелибез (111 нче рәсем).

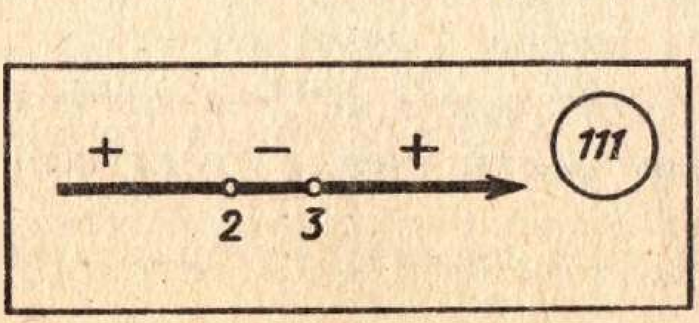
6) $y'=6(x-2)(x-3)$. Чыгарылманың табылган аралыклардагы тамгалары 111 нче рәсемдә билгеләнгән.

7) $x=2$ ноктасы аша сулдан уңга күчкәндә y' чыгарылмасының тамгасы «+» тан «−» ка алмаша, димәк, $x=2$ — максимум ноктасы; $x=3$ ноктасы аша күчкәндә чыгарылманың тамгасы «−» тан «+» ка алмаша, димәк, $x=3$ — минимум ноктасы. $x=3$ ноктасында $y_{\min}=28$ була.

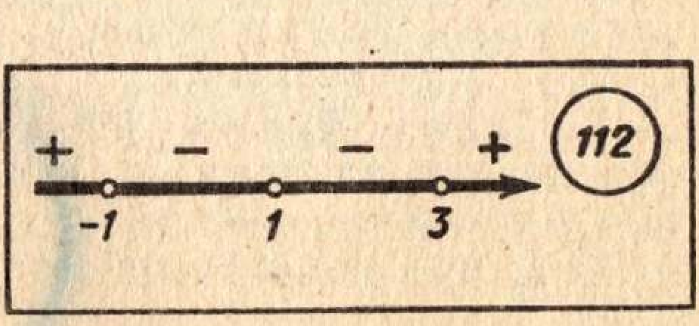
2 нче мисал. $y=\ln(x-2)+\ln x$ функциясен экстремумга тикшерергә.

Чишү. 1) Функциянең билгеләнү өлкәсе $x>2$ тигезсезлеге белән бирелә.

2) $y'=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{2x-2}{x(x-2)}$.



111



112

3) Функциянең билгеләнү өлкәсендә, ягъни $x>2$ булганда, функциянең критик нокталары һәм шулай булгач экстремум нокталары да юк.

3 нче мисал. $y=\frac{x^2-6x+9}{x-1}$ функциясен экстремумга тикшерергә.

Чишү. 1) Билгеләнү өлкәсе: $x\neq 1$.

2) $y'=\frac{(x^2-6x+9)'(x-1)-(x^2-6x+9)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{(2x-6)(x-1)-(x^2-6x+9)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(2(x-1)-(x-3))}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

3) $x=3$ яки $x=-1$ булганда, $y'=0$ була.

4) $x=1$ булганда y' булмый, ләкин бу нокта функциянең билгеләнү өлкәсенә керми.

5) Координаталар турысында критик нокталар: $x=-1$, $x=3$ һәм $x=1$ нокталарын билгелибез (112 нче рәсем).

6) Чыгарылманың табылган аралыклардагы тамгалары 112 нче рәсемдә билгеләнгән.

7) $x=-1$ — максимум ноктасы, $y_{\max}=-8$.
$x=3$ — минимум ноктасы, $y_{\min}=0$.

218. Кисемтәдә өзлексез функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен эзләү. Әгәр X аралыгында бу аралыктагы барлык x лар өчен $f(x)\leqslant f(a)$ $(f(x)\geqslant f(a))$ тигезсезлеге үтәлерлек a ноктасы булса, әлеге аралыкта билгеләнгән $y=f(x)$ функциясе үзенең *иң зур (иң кечкенә)* кыйммәтенә ирешә дип әйтәләр.

Т.7.5. **Кисемтәдә өзлексез булган функция, бу кисемтәдә үзенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтенә ирешә.**

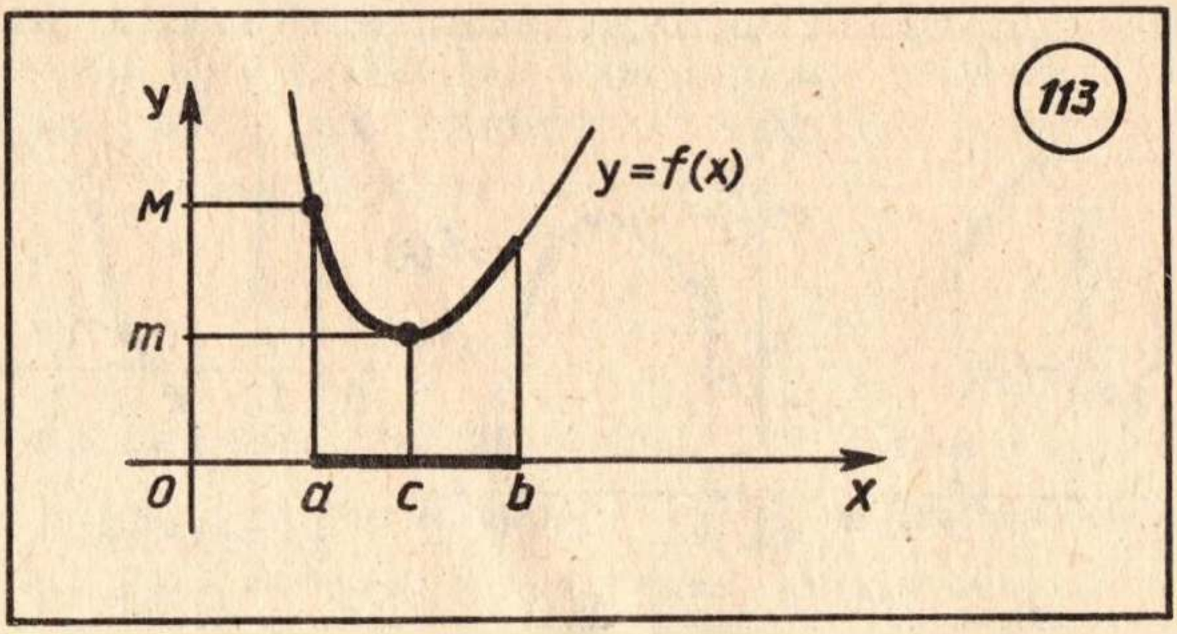
Өзлексез функциянең иң зур кыйммәте M һәм иң кечкенә кыйммәте m кисемтәнең эчендә дә, шулай ук очларында да булуы мөмкин (113 нче рәсем). Әгәр функция иң зур (иң кечкенә) кыйммәтен кисемтәнең эчендә алса, бу нокта экстремум ноктасы була, хәер, практика өчен бу ноктаның критик булуы җитә.

$[a;\ b]$ **кисемтәдә өзлексез булган** $y=f(x)$ **функциясенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтен эзләүнең алгоритмы.**

1) $f'(x)$ ны табарга.

2) $f'(x)=0$ булган яки $f'(x)$ сы булмаган нокталарны табарга һәм аларның $[a;\ b]$ кисемтәсенең эчендә ятучы нокталарын сайлап алырга.

3) 2 нче пунктта табылган һәм кисемтә очларындагы



нокталарда $y=f(x)$ функциясенең кыйммәтен исәпләргә һәм аларның иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен сайлап алырга; бу кыйммәтләр $[a;\ b]$ кисемтәдә $y=f(x)$ функциясенең тиңдәшле иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре була: $y_{\text{иң зур}}$, $y_{\text{иң кечк.}}$

Мисал. $y=x^3-3x^2-45x+225$ функциясенең $[0;\ 6]$ кисемтәдә иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга.

Чишү. 1) $y'=3x^2-6x-45$.

2) барлык x лар өчен y' була. $y'=0$ булган нокталарны табабыз:

$$3x^2-6x-45=0,$$
$$x^2-2x-15=0,$$
$$x_1=-3,\ x_2=5.$$

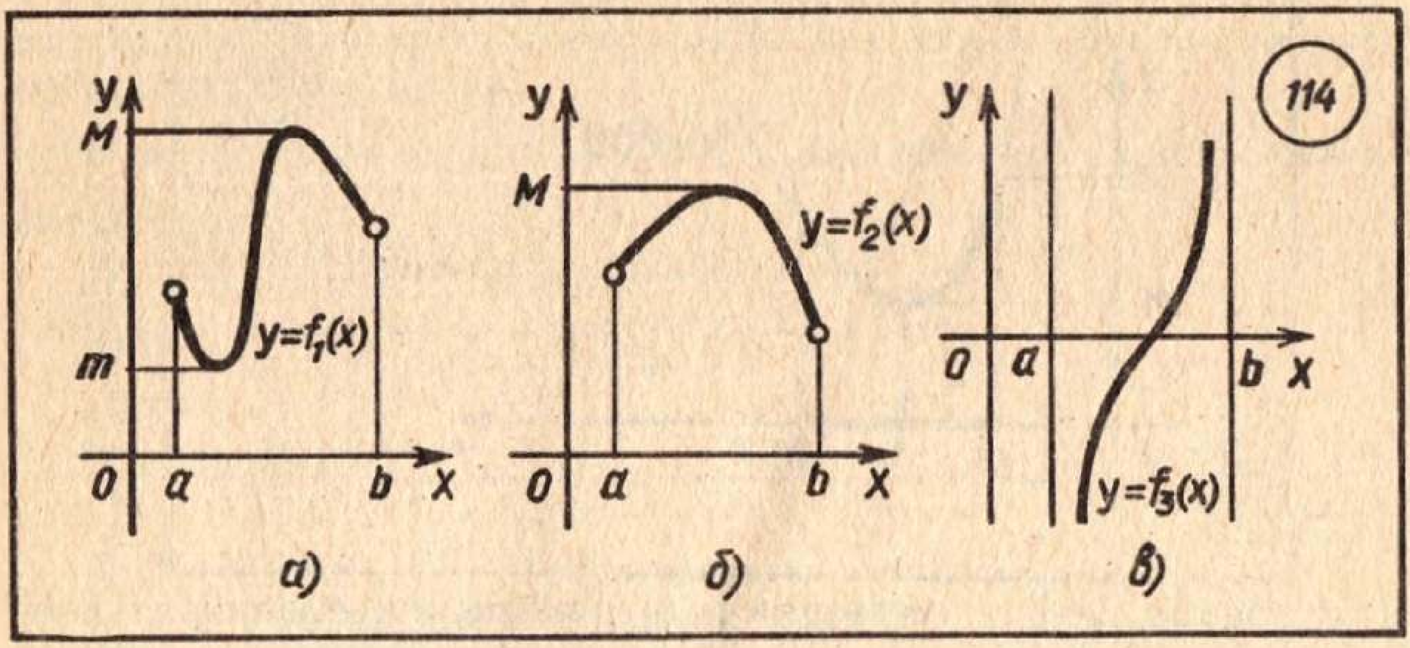
$[0;\ 6]$ кисемтәгә $x=5$ ноктасы гына керә.

3) 0,5,6 нокталарында функциянең кыйммәтләрен исәплик.

x	0	5	6
y	225	50	63

Функциянең табылган кыйммәтләреннән иң зуры 225 саны, иң кечкенәсе 50 саны була. Шулай итеп, $y_{\text{иң зур}}=225$, $y_{\text{иң кечк.}}=50$.

219*. Йомык булмаган аралыкта өзлексез функциянең иң зур яки иң кечкенә кыйммәтен эзләү. Йомык булмаган аралыкта, мәсәлән, $(a;\ b)$ интервалда, өзлексез функциянең иң зур яки иң кечкенә кыйммәтен эзләү мәсьәләсенең һәрвакытта да чишелеше була алмый. 114 нче рәсемдә $(a;\ b)$ интервалда өзлексез функциянең графиклары сурәтләнгән. $y=f_1(x)$ функциясе иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләргә ирешә, $y=f_2(x)$



функциясе иң зур кыйммәткә ирешә, ә $(a;\ b)$ интервалда иң кечкенә кыйммәте юк, $y=f_3(x)$ функциясенең $(a;\ b)$ да иң зуры да һәм иң кечкенә кыйммәте дә юк.

Әгәр $(a;\ b)$ да өзлексез булган $y=f(x)$ функциясе өчен $y_{\text{иң зур}}$ $(y_{\text{иң кеч}})$ ны табу мәсьәләсе куелган булса, ул $[a;\ b]$ кисемтәсе өчен тиңдәшле мәсьәлә кагыйдәсе буенча чишелә (218 нче п. ны кара). Аермасы: өченче этапта кисемтә очларында функциянең кыйммәтләрен исәпләү урынына интервалның очларына якынлашканда функциянең чикләмәләрен табалар.

Мисал. $y=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$ функциясенең $(0;\ \pi)$ интервалда иң кечкенә кыйммәтен табарга.

Чишү. 1) Бирелгән функциянең чыгарылмасын табабыз:

$$y'=2\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)\cdot\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)'=2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\times$$

$$\times\frac{(2+\cos x)'\sin x-(2+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}=2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\times$$

$$\times\frac{(-\sin x)\sin x-(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2(2+\cos x)(-\sin^2 x-\cos^2 x-2\cos x)}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-2(2+\cos x)(1+2\cos x)}{\sin^2 x}.$$

2) Әгәр $1+2\cos x=0$ яки $2+\cos x=0$ булса, $y'=0$ була. $|\cos x|\leqslant 1$ булганга күрә, икенче тигезләмәнең чишелешләре булмый, ә беренчесеннән $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ ны (154 п. ны кара) табабыз. Бу кыйммәтләрдән $(0;\ \pi)$ интервалга $x=\frac{2\pi}{3}$ кыйммәте генә керә.

Әгәр $\sin^3 x = 0$ булса, y' чыгарылмасы булмый. Ләкин $(0;\ \pi)$ интервалда бу тигезләмәнең чишелешләре булмый.

Шулай итеп, $(0;\ \pi)$ интервалның эчендә функциянең бер генә $x=\frac{2\pi}{3}$ булган критик ноктасы бар.

3) Әгәр $x=\frac{2\pi}{3}$ булса, $y=\left(\frac{2+\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}\right)^2=\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2=3.$

Интервалның очларына якынлашканда, ягъни x 0 гә омтылганда яки x π гә омтылганда $\frac{(2+\cos x)^2}{\sin^2 x}$ вакланмасының ваклаучысы 0 гә омтыла, ә санаучысы тиңдәшле рәвештә 9 га яки 1 гә омтыла. Димәк, теге яки бу очракта да $y \to +\infty$ (206 нчы п. ны кара).

Функциянең кыйммәте $(0;\ \pi)$ интервалның очларына якынлашканда чиксез үскәнгә күрә, функция иң кечкенә кыйммәтенә бердәнбер критик ноктада, ягъни $x=\frac{2\pi}{3}$ булган ноктада, ирешә. Шулай итеп, $y_{\text{иң кеч.}}=3$.

Кайбер очракларда $(a;\ b)$ аралыкта өзлексез булган $y=f(x)$ функциясенең иң зур яки иң кечкенә кыйммәтен эзләү өчен түбәндәге ике раслауны кулланырга мөмкин.

1^0. *Әгәр X аралыгында $y=f(x)$ функциясенең бер генә $x=a$ булган экстремум ноктасы булса, өстәвенә ул максимум ноктасы булса, $f(a)$ X аралыгында функциянең иң зур кыйммәте була.*

2^0. *Әгәр $y=f(x)$ функциясенең X аралыгында бер генә $x=a$ булган экстремум ноктасы булса, өстәвенә ул минимум ноктасы булса, $f(a)$ X аралыгында функциянең иң кечкенә кыйммәте була.*

Димәк, алда карап үткән мисалда функциянең $(0;\ \pi)$ интервалда бер генә критик ноктасы $x=\frac{2\pi}{3}$ бар иде. Бу нокта аша күчкәндә чыгарылманың тамгасы «—» тан «+» ка алмаша. Шулай итеп, $x=\frac{2\pi}{3}$ — минимум ноктасы. Шуңа күрә дә $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3$ — $(0;\ \pi)$ интервалда функциянең иң кечкенә кыйммәте.

220. Зурлыкларның иң зур яки иң кечкенә кыйммәтләрен эзләүгә мәсьәләләр. Зурлыкларның иң зур яки иң кечкенә кыйммәтләрен эзләүдә мәсьәләләрне түбәндәге план буенча чишү җайлы:

1) Оптимизацияләнүче зурлыкны барлыйлар (ягъни иң зур яки иң кечкенә кыйммәтен табарга тиешле зурлыкны)

һәм аны y хәрефе белән тамгалыйлар (яки S, p, r, R һ. б. ш. белән, мәсьәләнең сюжетына карап).

2) Билгесез зурлыкларның берсен (ягын, почмакны һ. б. ш.) бәйсез үзгәрешле дип атыйлар һәм x хәрефе белән тамгалыйлар: мәсьәләнең шартларына карап x үзгәрүенең реаль чикләрен билгелиләр.

3) Бирелгән мәсьәләнең конкрет шартларыннан чыгып y ны x һәм билгеле булган зурлыклар аша аңлаталар.

4) Алдагы этапта табылган $y=f(x)$ функциясе өчен 2 нче пунктта табылган x ның реаль үзгәрү аралыгы буенча иң зур яки иң кечкенә кыйммәтне табалар (мәсьәләнең шартына карап).

5) Бирелгән конкрет мәсьәлә өчен 4 нче пунктның нәтиҗәсен аңлаталар.

Беренче өч этапта мәсьәләнең математик моделе төзелә дип әйтү кабул ителгән. Биредә еш кына чишүнең уңышы бәйсез үзгәрешлене сайлауга бәйләнгән. y ның x аша чагыштырмача җиңел аңлатылуы мөһим. Дүртенче этапта төзелгән математик модель ешрак чыгарылма ярдәмендә, сирәгрәк элементар ысул белән тикшерелә. Математик модельгә башлангыч ноктасы булып хезмәт итүче мәсьәләнең сюжеты тикшерүчене тикшерү моментында кызыксындырмый. Төзелгән математик модель рамкасында мәсьәлә чишелеп беткәннән соң гына килеп чыккан нәтиҗә баштагы мәсьәләне ачыклый (бишенче этап).

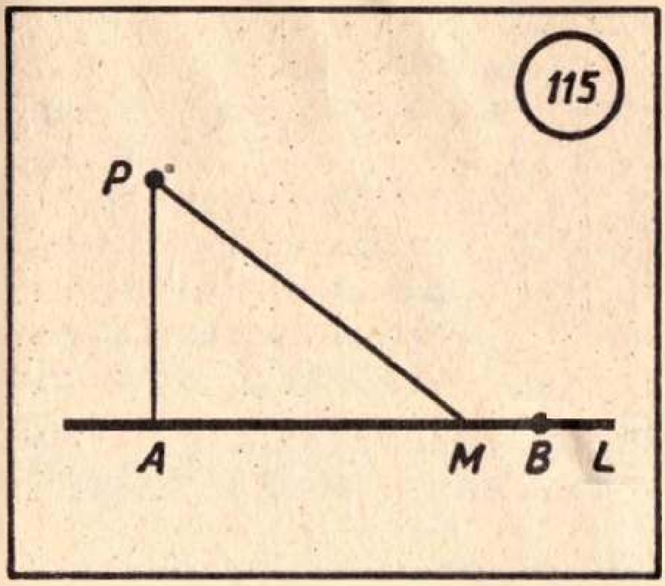
1 нче мисал. Далада көнчыгыштан көнбатышка баручы шосседан 9 км төньякта эзләнү партиясе урнашкан. Эзләнү партиясенә иң якын ноктасыннан 15 км көнчыгышта шосседа ятучы район үзәге урнашкан. Эзләнү партиясе район үзәгенә курьер — велосипедлыны җибәрә. Әгәр курьерның дала буйлап 8 км/сәг, ә шоссе буйлап 10 км/сәг тизлек белән баруы билгеле булса, район үзәгенә иң кыска срокта барып җитү өчен курьерның бару маршруты нинди булырга тиеш?

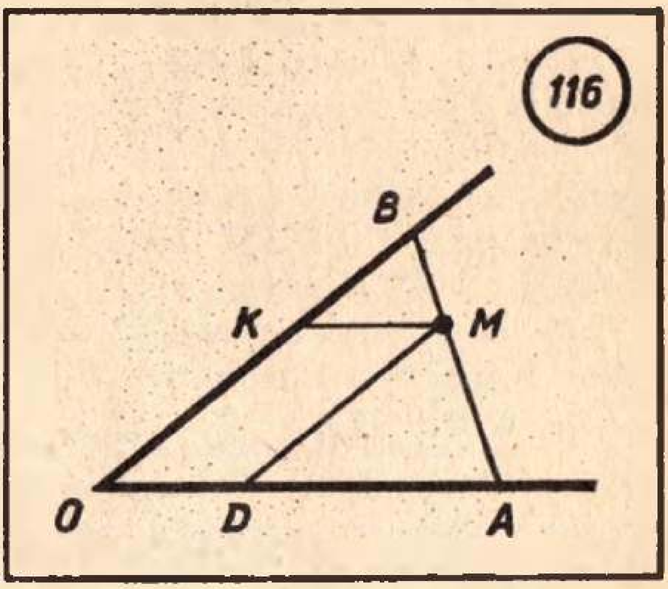
Чишү. Сызымын ясыйк. 115 нче рәсемдә P ноктасы эзләнү партиясенең урнашу урынын аңлата, l турысы — шоссе, B — район үзәге, $PA=9$ км, $AB=15$ км, PMB — курьерның бару маршруты, өстәвенә әлеге M ноктасының урыны A һәм B арасында билгеле түгел.

1) Оптимизацияләнүче зурлык — куерьерның P дан B га хәрәкәт итүдәге вакыты t; $t_{\text{иң кечк}}$ табарга кирәк.

2) $AM=x$ дип уйлыйк. Мәсьәләнең мәгънәсе буенча M ноктасы A һәм B арасында теләсә нинди урынны алуы мөмкин, A һәм B нокталарының үзләрендә дә булуы мөмкин. Димәк, x ның үзгәрүенең реаль чикләре мондый: $0 \leqslant x \leqslant 15$.

3) t ны x аша аңлатыйк. $PM=\sqrt{PA^2+AM^2}=\sqrt{81+x^2}$ була. Бу юлны велосипедлы 8 км/сәг тизлек белән үтә, ягъни бу





юлга сарыф ителгән t_1 вакыты $t_1=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}$ формуласы белән аңлатыла. Алга таба, $MB=15-x$. Бу юлны велосипедчы 10 км/сәг тизлек белән үтә, ягъни бу юлга сарыф ителгән t_2 вакыты $t_2=\frac{15-x}{10}$ формуласы белән аңлатыла. Барлык юлга сарыф ителгән t вакыты суммасы t_1+t_2 гә тигез, ягъни $t=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$.

4) $t=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$ функциясенең $[0;\ 15]$ кисемтәдә иң кечкенә кыйммәтен табарга кирәк. Моның өчен 218 нче пункттагы планны кулланабыз.

1. $t'=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(81+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{10}(-1)=\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}$.

2. t' барлык x лар өчен була. $t'=0$ булган нокталарны табыйк. $\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}=0$ була,

$$\begin{gathered}5x=4\sqrt{81+x^2},\\ 25x^2=16(81+x^2),\\ 9x^2=16\cdot 81,\\ x=4\cdot 3=12.\end{gathered}$$

$x=12$ кыйммәте $[0;\ 15]$ кисемтәдә ята.

3) Функциянең кыйммәтләр таблицасын төзик, аңа кисемтәнең очларындагы һәм табылган критик нокталарындагы функциянең кыйммәтләрен кертик.

x	0	12	15
t	$\frac{105}{40}$	$\frac{87}{40}$	$\frac{5\sqrt{306}}{40}$

$$t_{\text{иң кечк.}}=\frac{87}{40}.$$

Мәсьәлә чишүнең дүртенче этабы тәмамланды, безгә табылган нәтиҗәне бирелгән мәсьәләгә ничек итеп кулланасы икәнен генә ачыклыйсы калды.

$t_{\text{иң кечк.}}$ $x=12$ булганда ирешелә. Димәк, велосипедчы A һәм M нокталары арасындагы ераклык шоссе буйлап 12 км га тигез булган PMB маршруты буенча барырга тиеш.

2 нче мисал. Почмак эчендәге билгеләнгән M ноктасы аша мәйданы иң кечкенә булган өчпочмак кисеп алучы туры үткәрергә (116 нчы рәсем).

Чишү.

1) Оптимизацияләнүче зурлык — AOB өчпочмагының S мәйданы.

2) $OB \parallel DM$, $OA \parallel MK$ үткәрәбез. $KB=x$ булсын; x үзгәрүенең реаль чикләре: $0<x<+\infty$.

3) M — билгеләнгән нокта булганга күрә, DM һәм KM кисемтәләре шулай ук билгеләнгән була: $DM=a$, $KM=b$ булсын һәм S ны x, a, b аша аңлатыйк.

MKB һәм AOB өчпочмакларын карап үтик, алар охшаш була, димәк, $\frac{MK}{AO}=\frac{KB}{OB}$, ягъни $\frac{b}{AO}=\frac{x}{a+x}$. Моннан $AO=$ $=\frac{b(a+x)}{x}$ ны табабыз.

Алга таба: $S=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha$, биредә $\alpha=\angle AOB$. Димәк,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{b(a+x)}{x}\cdot(a+x)\sin\alpha=\frac{b\sin\alpha}{2}\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$$

(мәсьәләнең математик моделе төзелде).

4) $S=k\cdot\frac{(a+x)^2}{x}$, $0<x<+\infty$ $\left(\text{биредә } k=\frac{b\sin\alpha}{2}\right)$ функциясен карыйк. Аның иң кечкенә кыйммәтен табыйк.

1. $S'=k\cdot\frac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2}=k\cdot\frac{(a+x)(x-a)}{x^2}$.

2. $x=0$ ноктасында чыгарылма булмый, $x=-a$, $x=a$

нокталарында нульгә әйләнә. Бу өч ноктадан $(0;\ +\infty)$ интервалга $x=a$ ноктасы гына керә.

3. x 0 гә омтылганда да, x $+\infty$ омтылганда да $S\to+\infty$. Димәк, функциянең иң кечкенә кыйммәте $x=a$ ноктасында ирешелә.

5) Бирелгән геометрик мәсьәләгә кире кайтыйк. Әгәр $x=KB=a$ булса, $OK=a$ булганга күрә, MK — AOB өчпочмагының урта сызыгы, димәк, M — AB ның уртасы. Шулай итеп, почмакның якларыннан иң кечкенә мәйданлы өчпочмак кисеп алу өчен, M ноктасы аша турыны, почмакның яклары эчендә урнашкан кисемтәсе M ноктасында урталай бүленерлек итеп, үткәрергә кирәк.

221. Чыгарылманы бердәйлекләрне исбатлау өчен куллану. Чыгарылма ярдәмендә бердәйлекләрне исбатлау түбәндәге теоремага нигезләнгән:

Т.7.6. X аралыгында өзлексез булган $y=f(x)$ функциясе бу аралыкта даими булсын өчен, аның чыгарылмасы бу аралыкның барлык эчке нокталарында нульгә тигез булуы кирәк һәм шул җитә (функциянең даимилек шарты).

Мисал. $\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$ бердәйлеген исбат итәргә.

Чишү. $f(x)=\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ функциясен карыйк һәм аның чыгарылмасын табыйк.

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-$$

$$-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\sin\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$=\sin 2x-\sin 2x=0$ була. Димәк, барлык x лар өчен $f'(x)=0$ һәм шуңа күрә $f(x)$ — даими функция, $f(x)=C$ була. Даими C ның кыйммәтен табасы гына калды. Моның өчен x ның теләсә нинди кыйммәте өчен $f(x)$ ның кыйммәтен исәпләү җитә, мәсәлән, $x=0$ булганда. Табабыз:

$$f(0)=\sin^2 0+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Шулай итеп, $f(0)=\frac{1}{4}$, шуңа күрә $C=\frac{1}{4}$. Димәк,

$$\sin^2 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

бердәйлеге дөрес.

222. Чыгарылманы тигезсезлекләрне исбатлау өчен куллану.

1 нче мисал. $0 < x < \frac{1}{2}$ булганда

$$2x + \frac{1}{x^2} > 5$$

тигезсезлеге дөрес икәнен исбатларга.

Чишү. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ функциясен карап үтик һәм аның чыгарылмасын табыйк: $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$. $(0;\ 1)$ интервалда чыгарылма $f'(x) < 0$ булганын искәрәбез, димәк, $f(x)$ функциясе бу интервалда кими (216 нчы п. ны кара). Шуңа күрә, аерым алганда $0 < x < \frac{1}{2}$ булганда $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ тигезсезлеге дөрес була. Ләкин $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5$.

Шулай итеп, $f(x) > 5$ була, ягъни $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ була, шуны исбатларга кирәк иде дә.

2 нче мисал. Әгәр $\alpha < \beta$ булса, $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$ булуын исбатларга.

Чишү. $f(x) = x + \cos x$ функциясен карап үтик, һәм аның чыгарылмасын табыйк: $f'(x) = 1 - \sin x$. $f'(x) \geqslant 0$ булуын, ягъни $f(x)$ функциясе барлык санлы турыда үсүен искәреп үтәбез. Димәк, $\alpha < \beta$ дан $f(\alpha) < f(\beta)$ чыга, ягъни $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$.

3 нче мисал. Барлык x лар өчен

$$x^5 + (1-x)^5 \geqslant \frac{1}{16}$$

тигезсезлеге дөрес икәнен исбатларга.

Чишү. $f(x) = x^5 + (1-x)^5$ функциясен карыйк һәм аны экстремумга тикшерик. Табабыз:

$$f'(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4 = 5(x^2-(1-x)^2)(x^2+(1-x)^2) =$$
$$= 5(2x-1)(2x^2-2x+1).$$

$x = \frac{1}{2}$ булганда $f'(x) = 0$. Функциянең башка критик ноктары юк ($2x^2 - 2x + 1$ тигезләмәсенең тамырлары юк). $x < \frac{1}{2}$ булганда $f'(x) < 0$ була, ә $x > \frac{1}{2}$ булганда $f'(x) > 0$ була, димәк, $x = \frac{1}{2}$ — функциянең минимум ноктасы. Бирелгән өзлексез функциянең башка экстремум нокталары булмаганга күрә,

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ — функциянең иң кечкенә кыйммәте була (219 нчы пункттан 2^0 раслауны карагыз). Ләкин $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=$ $=\frac{1}{16}$.

Шулай итеп, $f(x)\geqslant\frac{1}{16}$ була, ягъни $x^5+(1-x)^5\geqslant\frac{1}{16}$.

223. Функция графигын төзүнең гомуми схемасы. $y=f(x)$ функциясенең графигын төзергә кирәк булсын ди. Моның өчен функциянең гадәттә координаталар яссылыгында бер үк вакытта тиңдәшле иллюстрацияләре белән булучы кайбер үзлекләрен тикшерергә кирәк. Бу функциянең график рәвешен төзергә ярдәм итә һәм киресенчә: график күзаллаулар функциянең үзлекләрен яхшырак аңларга, ә кайвакытта алдан күреп торырга ярдәм итә. Моның өчен түбәндәге план буенча эшләү файдалы:

1) $y=f(x)$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

2) $f(x)=0$ булган нокталарны табарга (болар графикның абсцисса күчәре белән кисешү нокталары була).

3) x күчәрендә 2 нче пунктта табылган нокталарны һәм 1 нче пунктта табылган функция билгеләнмәгән нокталарны билгеләргә; бу нокталар абсцисса күчәрен берничә аралыкка бүлә, бу аралыкларның һәркайсында функция даими тамгасын саклый. Аралыкларның һәркайсында функциянең тамгасын белергә.

4) Функциянең җөп һәм так булуын тикшерергә (җөп яки так булган шартта функцияне тикшерү һәм графигын төзү өчен $x>0$ булган очрагы белән чикләнергә мөмкин, ә соңыннан графикның симметриялегеннән файдаланырга кирәк, 74, 75 нче пунктларны карагыз).

5) Вертикаль һәм горизонталь асимптоталарны табарга (203, 206 нчы пунктларны карагыз).

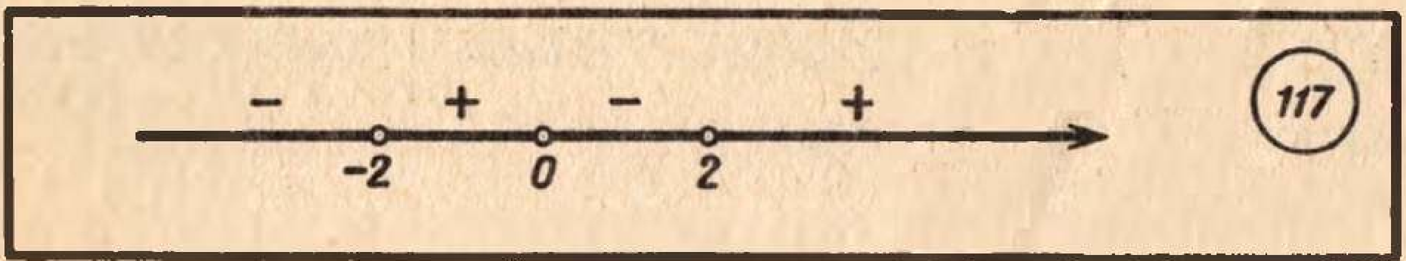
6) Функцияне экстремумга тикшерергә.

7) Берничә өстәмә контроль нокталар табарга һәм графикны төзергә.

Периодик функцияләр өчен баштан ук төп период T ны табу файдалы (76 нчы п. ны карагыз), функцияне тикшергәннән соң, графикның $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ интервалында япьләрен төзеп, соңыннан периодиклыгын файдаланып, бөтен графикны төзергә.

Әгәр тәкъдим ителгән схеманың ниндидер адымнарын үтәү техник авырлыклар белән бәйләнгән булса, аларны кайвакытта төшереп калдырырга мөмкин.

Мисал. $y=x^3-4x$ функциясенең графигын төзергә.



117

Чишү. 1) Функция барлык x лар өчен билгеләнгән.

2) $x^3-4x=0$ тигезләмәсеннән $x(x^2-4)=0$ не табабыз, $x_1=0$, $x_2=2$, $x=-2$ була.

3) -2; 0; 2 нокталары абсциссалар күчәрен 4 аралыкка бүлә. $y=x^3-4x$ функциясенең тамгалары үзгәрүе 117 нче рәсемдә сурәтләнгән. Координаталар яссылыгында тиңдәшле иллюстрациясе 118 нче *а* рәсемдә күрсәтелгән (график булмаган ярым буйлар штрихланган).

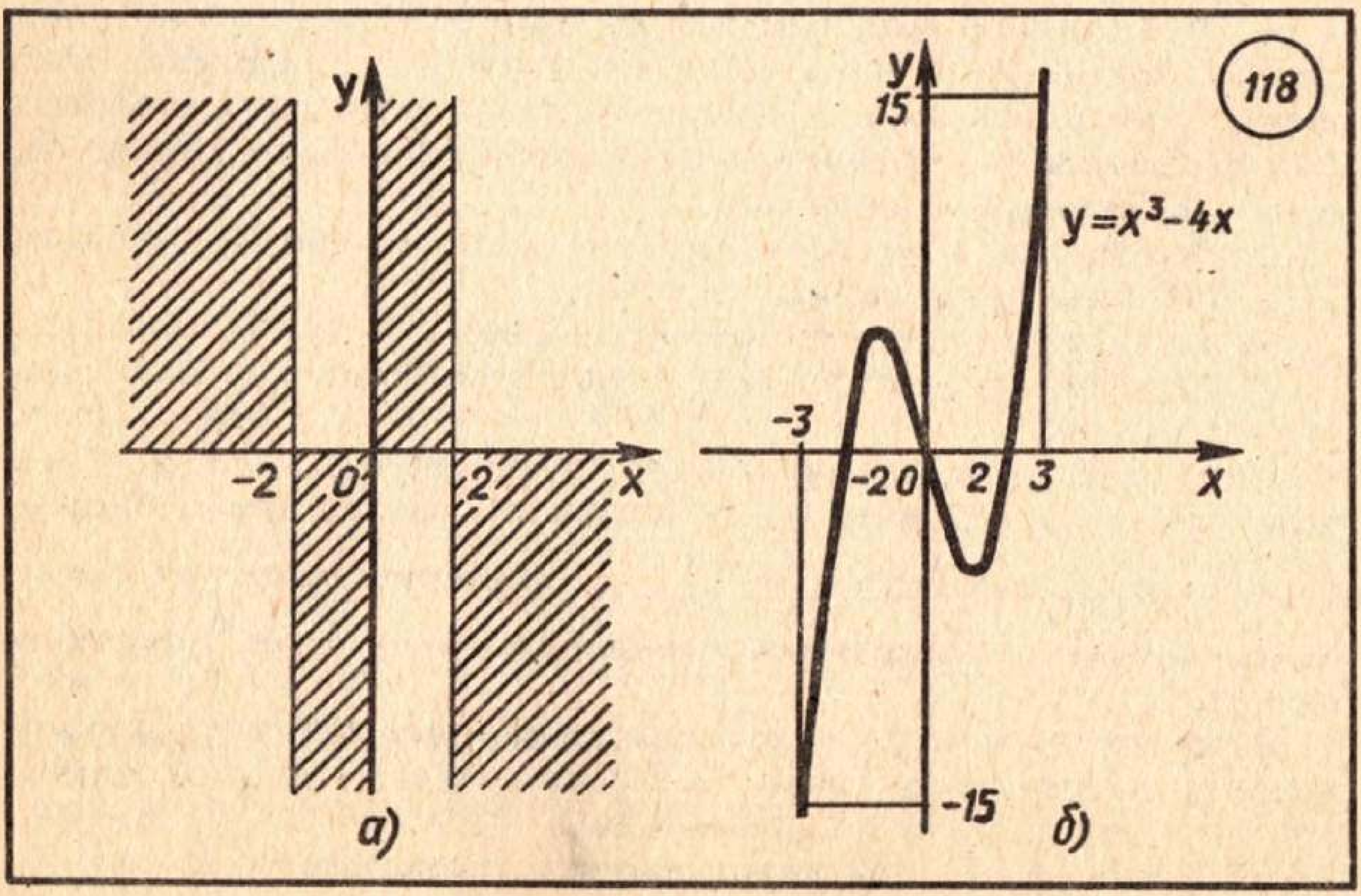
4) $f(-x)=(-x)^3-4(-x)=-x^3+4x=-(x^3-4x)=-f(x)$, димәк, функция так була, аның графигы координаталар башлангычына карата симметрик була.

5) Графикның асимптоталары юк.

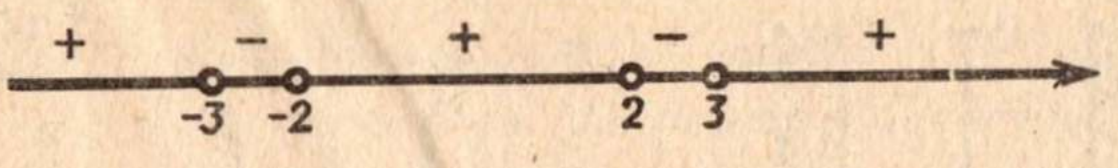
6) $y'=3x^2-4=3\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

$x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ булганда, $y'=0$.

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ ноктасы $[0;\ 2]$ кисемтәдә ята, 118 нче *а* рәсеменнән бу



118



119

ноктада функциянең минимумы булуы аңлашыла (биредә без график күзаллаулар функциянең үзлекләре турында нәтиҗә ясарга мөмкинлек бирү очрагын күрәбез).

$$y_{\min} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx -3{,}1.$$

Охшаш рәвештә $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ноктасында функциянең максимумы була: $y_{\max} \approx 3{,}1$.

7) Өстәмә нокталар сыйфатында $x = 3$, $x = -3$ нокталарын алабыз. $f(3) = 15$, $f(-3) = -15$ була.

Табылган 7 ноктаны кулланып, функциянең графигын төзибез (118 нче *б* рәсем).

2 нче мисал. $y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. 1) Билгеләнү өлкәсе: $x \neq \pm 2$.

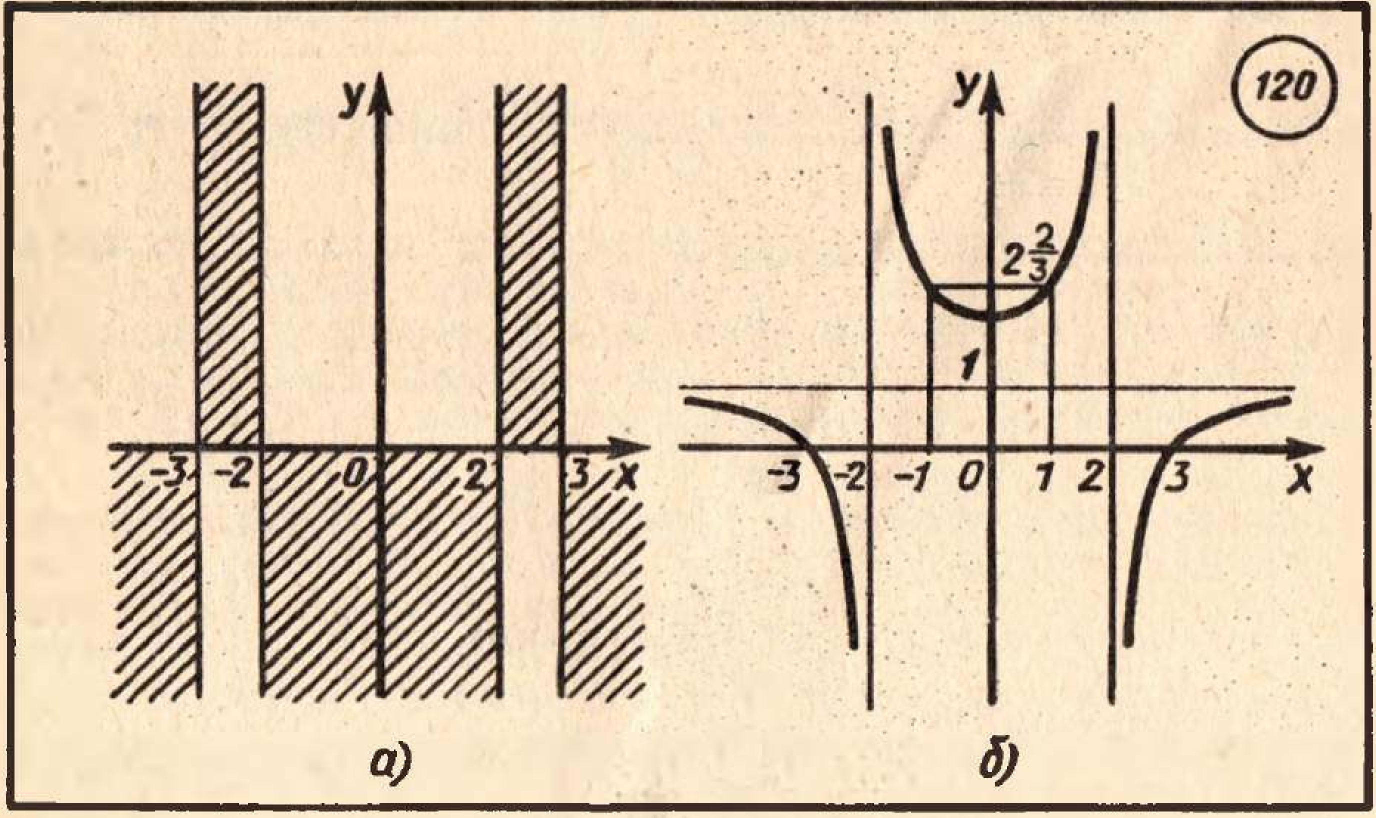
2) $\frac{x^2-9}{x^2-4} = 0$ тигезләмәсеннән $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ не табабыз.

3) 2, -2, 3, -3 нокталары абсциссалар күчәрен 5 аралыкка бүлә. Аралыклар буенча $y = \frac{x^2-9}{x^2-4}$ функциясенең тамгалары үзгәрүе 119 нчы рәсемдә сурәтләнгән, координаталар яссылыгында тиңдәшле иллюстрациясе 120 нче *а* рәсемдә бирелгән.

4) $f(-x) = f(x)$ булганга күрә, функция җөп була. Димәк, функциянең графигы ординаталар күчәренә карата симметрик була.

5) $x = 2$, $x = -2$ — вертикаль асимптоталар (206 нчы п. ны карагыз). Горизонталь асимптотаны табу өчен, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{x^2-4}$ исәпләп чыгарыйк. Моның өчен вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да x^2 ка буынлап бүлик (204 нче п. ны карагыз).

Табабыз: $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$



120

Димәк, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4}=1$, димәк, $y=1$ — функция графигының горизонталь асимптотасы (203 нче п. ны карагыз).

6) $$y'=\frac{(x^2-9)'(x^2-4)-(x^2-9)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=$$
$$=\frac{10x}{(x^2-4)^2}.$$

$x=0$ ноктада чыгарылма нульгә әйләнә һәм $x=\pm 2$ нокталарда чыгарылма булмый. Ләкин бу актык нокталар функциянең билгеләнү өлкәсенә керми, димәк, функциянең $x=0$ булган бер генә критик ноктасы була. Бу нокта аша күчкәндә чыгарылма тамгасын «—» тан «+» ка алмаштыра, димәк, $x=0$ — минимум ноктасы: $y_{\min}=f(0)=\frac{9}{4}$.

7) Өстәмә нокталар сыйфатында түбәндәге нокталарны алабыз: $x=\pm 1$, $x=\pm 4$. $f(1)=f(-1)=\frac{8}{3}$, $f(4)=f(-4)=\frac{7}{12}$ була.

Табылган нокталарны кулланып, функциянең графигын төзибез (120 нче *б* рәсем).

§ 22. Башлангыч функция һәм интеграл

224. Башлангыч функция. Әгәр X аралыгында теләсә нинди x өчен, $F'(x)=f(x)$ тигезлеге үтәлсә, $F(x)$ функциясе бу аралыкта $F(x)$ функциясенең *башлангыч функциясе* дип атала.

Мисаллар.

1. $f(x)=x^3$ булсын ди. Ул вакытта, $F(x)$ башлангыч функциясе $F(x)=\frac{x^4}{4}$ рәвешендә була, чөнки $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3=f(x)$.

2. $f(x)=\sin 3x$ булсын. Ул вакытта $F(x)$ башлангыч функциясе $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$ рәвешендә була, чөнки $F'(x)=$ $=\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'=-\frac{1}{3}\cdot 3(-\sin 3x)=\sin 3x=f(x)$.

Беренче мисалда без $f(x)=x^3$ функциясе өчен $F(x)=\frac{x^4}{4}$ булган башлангыч функцияне таптык. Бу мәсьәләнең бердәнбер чишелеше түгел. Мәсәлән, башлангыч функция сыйфатында $F_1(x)=\frac{x^4}{4}+3$ функциясен дә $\left(\text{чөнки } \left(\frac{x^4}{4}+3\right)=x^3\right)$, һәм $F_2(x)=\frac{x^4}{4}-5$ функциясен дә $\left(\text{чөнки } \left(\frac{x^4}{4}-5\right)'=x^3\right)$, һәм гомумән теләсә нинди $\frac{x^4}{4}+C$ функциясен алырга мөмкин иде. 2 нче мисалда шундый ук хәл, биредә башлангыч функция сыйфатында теләсә нинди $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$ функциясен алырга мөмкин. Түбәндәге теорема дөрес:

Т.7.7 Әгәр X аралыгында $F(x)$ $f(x)$ функциясе өчен башлангыч функция булса, $f(x)$ функциясенең башлангыч функцияләре чиксез күп була, һәм барлык бу башлангыч функцияләр $F(x)+C$ рәвешендә була, биредә C — ирекле даими зурлык (башлангыч функциянең төп үзлеге).

Мисал. $f(x)=x^r$, биредә $r\neq-1$, функциясе өчен башлангыч функциясенең гомуми рәвешен табарга.

Чишү. Башлангыч функцияләрнең берсе $F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ функциясе була, чөнки $F'(x)=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)'=\frac{1}{r+1}\cdot(r+1)x^r=$ $=x^r=f(x)$. Димәк, башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше:

$$\frac{x^{r+1}}{r+1}+C.$$

225. Башлангыч функцияләрнең таблицасы. Башлангыч функцияне эзләү, дифференциаллауга кире операция икәнен истә тотып, һәм чыгарылмалар таблицасыннан чыгып башлангыч функцияләрнең түбәндәге таблицасын табабыз (гадилек өчен таблицада башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше $F(x)+C$ түгел, ә бер башлангыч функция $F(x)$ бирелгән):

Функция	Башлангыч функция	Функция	Башлангыч функция
1) $f(x)=k$	$F(x)=kx$	6) $f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
2) $f(x)=x^r$ $(r\neq -1)$	$F(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	7) $f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
		8) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$	9) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
4) $f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
5) $f(x)=a^x$	$F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

226. Башлангыч функцияләрне исәпләү кагыйдәләре. $y=f(x)$ функциясенең башлангыч функциясен табарга кирәк булсын, ди. Кайвакытта моны 225 нче пункттагы башлангыч функцияләр таблицасы ярдәмендә табарга мөмкин, мәсәлән, $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$ функциясе өчен әйтеп үтелгән таблицаның икенче юлы буенча $F(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}$ табабыз, ягъни $F(x)=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}$, ә башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше шундый була: $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+$ $+C$. Ләкин ешрак, таблицадан файдаланганчы, башлангыч функцияләрне исәпләү кагыйдәләрен кулланырга кирәк була.

1^0. *Әгәр дә $F(x)$ $f(x)$ өчен башлангыч функция, ә $H(x)$ $h(x)$ өчен башлангыч функция булса, $F(x)+H(x)$ $f(x)+h(x)$ өчен башлангыч функция була.*

Икенче төрле әйткәндә, *сумманың башлангыч функциясе башлангыч функцияләр суммасына тигез.*

2^0. *Әгәр дә $F(x)$ $f(x)$ өчен башлангыч функция, ә k даими зурлык булса, $kF(x)$ $kf(x)$ өчен башлангыч функция була.*

Икенче төрле әйткәндә, *даими тапкырлаучыны башлангыч функция тамгасы тышына чыгарырга мөмкин.*

3^0. *Әгәр дә $F(x)$ $f(x)$ өчен башлангыч функция һәм k, b даими зурлыклар булса, өстәвенә $k\neq 0$, $\frac{1}{k}F(kx+b)$ $f(kx+b)$ өчен башлангыч функция була.*

1 нче мисал. $f(x)=2\sqrt{x}+3\sin x-2^x+\frac{\cos x}{3}$ функциясе өчен башлангыч функцияләренең гомуми рәвешен табарга.

Чишү.

1) Башлангыч функцияләрнең таблицасыннан файдаланып (225 нче п.) $f(x)$ составына кергән дүрт функциянең һәрберсенә башлангыч функциясен табабыз:

$$f_1(x)=\sqrt{x},\ f_2(x)=\sin x,\ f_3(x)=2^x,\ f_4(x)=\cos x.$$

$f_1(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ функциясе өчен $F_1(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

була.

$f_2(x)=\sin x$ функциясе өчен $F_2(x)=-\cos x$ була.

$f_3(x)=2^x$ функциясе өчен $F_3(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$ була.

$f_4(x)=\cos x$ функциясе өчен $F_4(x)=\sin x$ була.

2) 2^0 кагыйдәсеннән файдаланып, $2f_1(x)$ өчен башлангыч функция $2F_1(x)$ булганын табабыз: ягъни $2.\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ була; $3f_2(x)$ өчен башлангыч функция $3F_2(x)$ булганын, ягъни $-3\cos x$ була; $-f_3(x)$ өчен башлангыч функция $-F_3(x)$, ягъни $-\frac{2^x}{\ln 2}$ була; $\frac{1}{3}f_4(x)$ өчен башлангыч функция $\frac{1}{3}F_4(x)$, ягъни $\frac{1}{3}\sin x$ була.

3) 1^0 кагыйдәсеннән файдаланып, $f(x)$ өчен түбәндәге функция башлангыч функция булуын табабыз:

$$F(x)=2F_1(x)+3F_2(x)-F_3(x)+\frac{1}{3}F_4(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3\cos x-$$
$$-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}\sin x.$$

4) Бирелгән функция өчен башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше:

$$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-3\cos x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\sin x}{3}+C.$$

2 нче мисал. $f(x)=(2x-1)^5$ функциясе өчен башлангыч функцияләренең гомуми рәвешен табарга.

Чишү. $h(x)=x^5$ функциясе өчен башлангыч функция $H(x)=\frac{x^6}{6}$ була. Ул вакытта 3^0 кагыйдәсе буенча $h(2x-1)=(2x-1)^5$ функциясе өчен башлангыч функция

$\frac{1}{2}H(2x-1)=\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^6}{6}$ була. Димәк, $F(x)=\frac{(2x-1)^6}{12}$, ә бирелгән функция өчен башлангыч функцияләренең гомуми рәвеше: $\frac{(2x-1)^6}{12}+C$ була.

3 нче мисал. $f(x)=\sin^2 3x$ функциясе өчен башлангыч функцияләренең гомуми рәвешен табарга.

Чишү. $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$ икәненнән файдаланыйк (129 нчы п. ны карагыз). Ул вакытта $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x$. $f_1(x)=\frac{1}{2}$ функциясе өчен башлангыч функциясе $\frac{1}{2}x$ була, ә $f_2(x)=\cos 6x$ функциясе өчен 3^0 кагыйдә буенча башлангыч функциясе $\frac{\sin 6x}{6}$ була. 1^0 һәм 2^0 кагыйдәсе буенча $f(x)=$ $=f_1(x)-\frac{1}{2}f_2(x)$ функциясе өчен башлангыч функция $\frac{1}{2}x-$ $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6}$, ягъни $\frac{1}{2}x-\frac{\sin 6x}{12}$ була. Башлангыч функцияләрнең гомуми рәвеше: $\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C$ була.

227. Интеграл. $y=f(x)$ функциясе $[a;\ b]$ кисемтәдә өзлексез булсын ди. $[a;\ b]$ кисемтәне n өлешкә $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1}$ нокталары белән бүләбез; тамгалары бериш булсын өчен, $a=x_0$, $b=x_n$ дип алабыз (121 нче рәсем). Тамгалар кертәбез: $x_1-x_0=\Delta x_0$, $x_2-x_1=\Delta x_1$, $x_3-x_2=\Delta x_2$, ..., $x_n-x_{n-1}=\Delta x_{n-1}$ һәм түбәндәге сумманы карыйк:

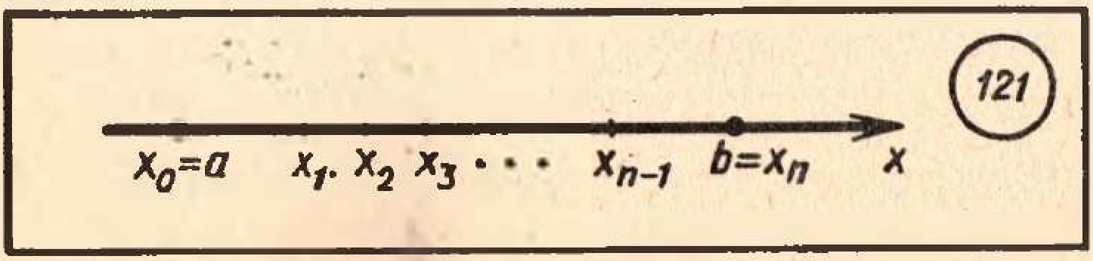
$$f(x_0)\Delta x_0+f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+\dots+f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}. \qquad (1)$$

Ул $[a;\ b]$ *кисемтә буенча* $y=f(x)$ *функциясе өчен интеграль сумма* дип атала.

(1) интеграль сумма белән беррәттән

$$f(x_1)\Delta x_0+f(x_2)\Delta x_1+\dots+f(x_n)\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

рәвешендәге интеграль сумманы да карыйлар. (1) сумманың (2) суммадан аермасы шуннан гыйбарәт: беренче очракта һәрбер $[x_0;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ..., $[x_{n-1};\ x_n]$ кисемтәләреннән функция-



121

нең кыйммәте кисемтәнен сул очыннан, ә икенче очракта уң очыннан сайлап алына.

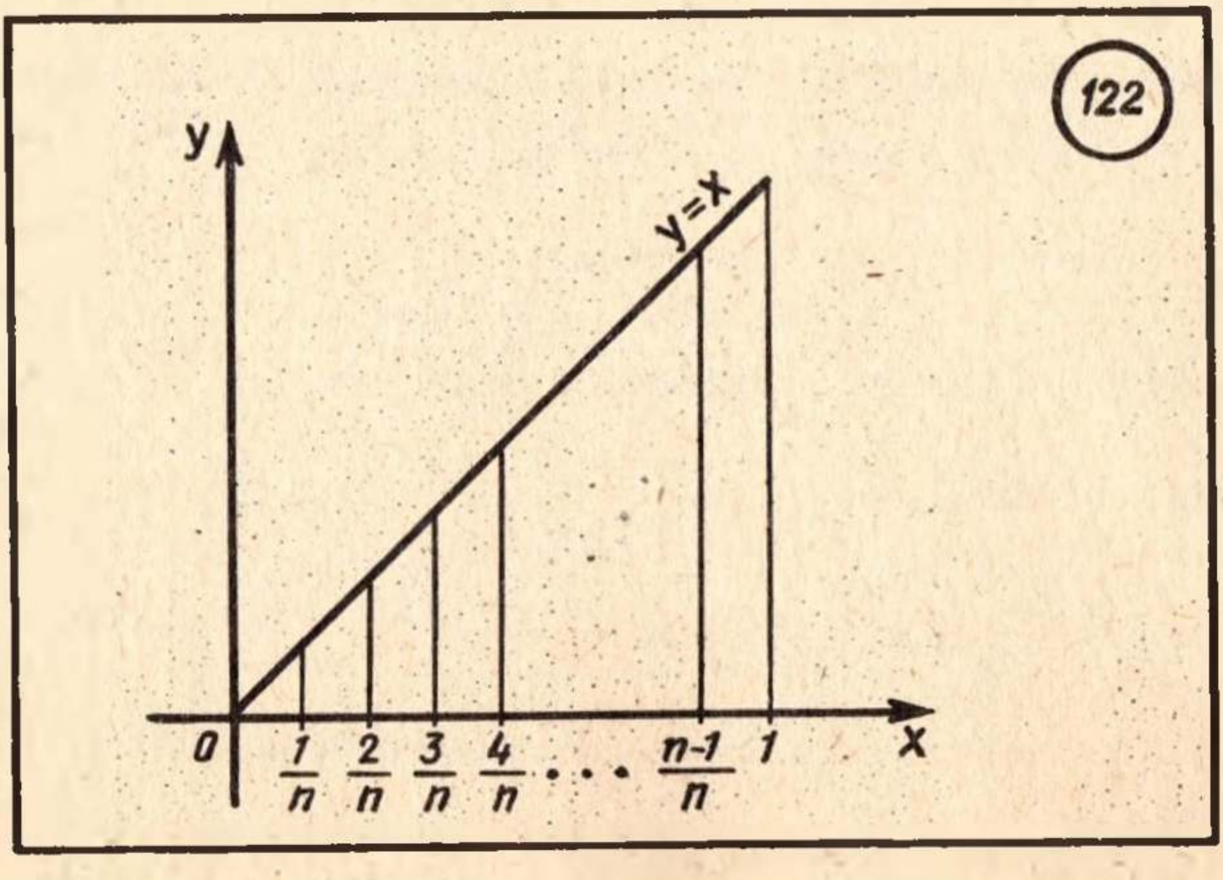
Практикада $[a; b]$ кисемтәне n тигез өлешләргә бүлү җайлы. Ул вакытта $\Delta x_0=\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_{n-1}=\frac{b-a}{n}$ һәм (1) сумма $\frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1}))$ рәвешендә була. Димәк, сумманың кыйммәте n санына гына бәйле, шуңа күрә бу сумманы Σ_n дип тамгаларга мөмкин (Σ — грек хәрефе «сигма»).

Интеграль суммалар Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n эзлеклелеген карыйк. Математикада $[a; b]$ кисемтәдә өзлексез булган $y=f(x)$ функциясе өчен бу эзлеклелек омтыла дип расланган (200 нче п. ны карагыз). Аның чикләмәсен $f(x)$ функциясенең a дан b га *кадәр интегралы* дип атыйлар һәм $\int_a^b f(x)dx$ дип тамгалыйлар. («эф икс дә иксның a дан b га кадәр интегралы» дип укыла).

Шулай итеп, $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma_n$. a һәм b саннары тиңдәшле рәвештә *интеграллауның түбәнге һәм югарыгы чикләре*, $\int$ тамгасы — *интеграл тамгасы*, $f(x)$ функциясе — *интеграл асты функциясе* дип атала.

Мисал. $\int_0^1 xdx$ табарга.

Чишү. $[0; 1]$ кисемтәдә $f(x)=x$ функциясе өчен интеграль сумма Σ_n ны төзик. Моның өчен $[0; 1]$ кисемтәне n тигез



122

өлешкә $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$ нокталары белән бүләбез (122 нче рәсем). $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$, $f\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}$, $f\left(\frac{3}{n}\right)=\frac{3}{n}$, ..., $f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}$ була. Интеграль сумма Σ_n түбәндәге рәвештә була:

$$\sum_n=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}.$$

Санаучыны арифметик прогрессиянең беренче $(n-1)$ буынының суммасы тәшкил итә, аның беренче буыны 1 гә, ә $(n-1)$ нче буыны $n-1$ гә тигез. Ул вакытта S_{n-1} суммасы формула буенча исәпләнә (197 нче п. ны карагыз).

$$S_{n-1}=\frac{1+(n-1)}{2}\,(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Нәтиҗәдә табабыз: $\sum_n=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

Алга таба табабыз: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$. Димәк, $\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

228. Интеграл белән башлангыч функциянең бәйләнеше (Ньютон-Лейбниц формуласы). Әгәр $[a;\ b]$ кисемтәдә $f(x)$ өчен $F(x)$ — башлангыч функция булса,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \qquad (1)$$

(Ньютон-Лейбниц формуласы). Практикада (1) формулада $F(b)-F(a)$ урынына $F(x)\Big|_b^a$ дип язу җайлы.

1 нче мисал. $\int\limits_0^1 x^7dx$ исәпләргә.

Чишү. $f(x)=x^7$ функциясе өчен $F(x)=\frac{x^8}{8}$ башлангыч функция була. Димәк, $\int\limits_0^1 x^7dx=\frac{x^8}{8}\Big|_0^1=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$.

2 нче мисал. $\int\limits_1^2\frac{dx}{2x+3}$ исәпләргә.

Чишү. $f(x)=\frac{1}{2x+3}$ функциясе өчен башлангыч функция $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+3|$ була. Димәк,

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\,\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}.$$

229. Интегралларны исәпләү кагыйдәләре.

1^0. *Сумманың интегралы интеграллар суммасына тигез.*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

2^0. ***Даими тапкырлаучыны интеграл тамгасы тышына чыгарырга мөмкин.***

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

1 нче мисал. $\int_{-2}^{1} (2x^3 + 3x - 4)dx$ **исәпләргә.**

Чишү. 1^0 һәм 2^0 кагыйдәләреннән файдаланып, табабыз:

$$\int_{-2}^{1} (2x^3 + 3x - 4)dx = \int_{-2}^{1} 2x^3dx + \int_{-2}^{1} 3xdx + \int_{-2}^{1} -4dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{1} x^3dx + 3\int_{-2}^{1} xdx - \int_{-2}^{1} 4dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - 4x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - 4\right) + \frac{3}{2}(1-4) - 4(1+2) = -24.$$

2 нче мисал. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, xdx$ **исәпләргә.**

Чишү. Интеграл асты функциясен функцияләр суммасы рәвешендә күрсәтик, аларның башлангыч функцияләрен таблица буенча табарга мөмкин (225 нче п. ны карагыз).

Табабыз:

$$\mathrm{tg}^2\, x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Димәк, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, xdx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx =$

$$= \mathrm{tg}\, x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\pi}{12} =$$

$$= \frac{4(3 - \sqrt{3}) - \pi}{12}.$$

230. Интегралны яссы фигураларның мәйданнарын исәпләү өчен куллану. Координаталар яссылыгы xy нокталар күплеген тәшкил итүче яссы фигура Φ ны карыйк. Бу фигура $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ турылары арасындагы полосада ята, үзенең составында координаталары $x=a$, $x=b$ булган нокталар була, өстән һәм астан $[a;\ b]$ да өзлексез һәм барлык $[a;\ b]$ дагы x лар өчен $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ тигезсезлеге дөрес булган $y=f_1(x)$ һәм $y=f_2(x)$ функцияләре белән чикләнгән. Мондый фигуралар 123—127 рәсемнәрдә күрсәтелгән. Аерым алганда, 124 *а* рәсемендә сурәтләнгән фигура, өстән $y=f(x)$ функциясе графигы белән, ә астан $y=0$ турысы белән чикләнгән. Мондый фигура *кәкресызыклы трапеция* дип атала. Φ фигурасының мәйданы S түбәндәге формула буенча исәпләнә:

$$S=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx. \qquad (1)$$

Аерым алганда, 124, *а* рәсемендә сурәтләнгән кәкресызыклы трапеция өчен:

$$S=\int_a f(x)dx, \qquad (2)$$

ә 124, *б* рәсемендә сурәтләнгән кәкресызыклы трапеция өчен:

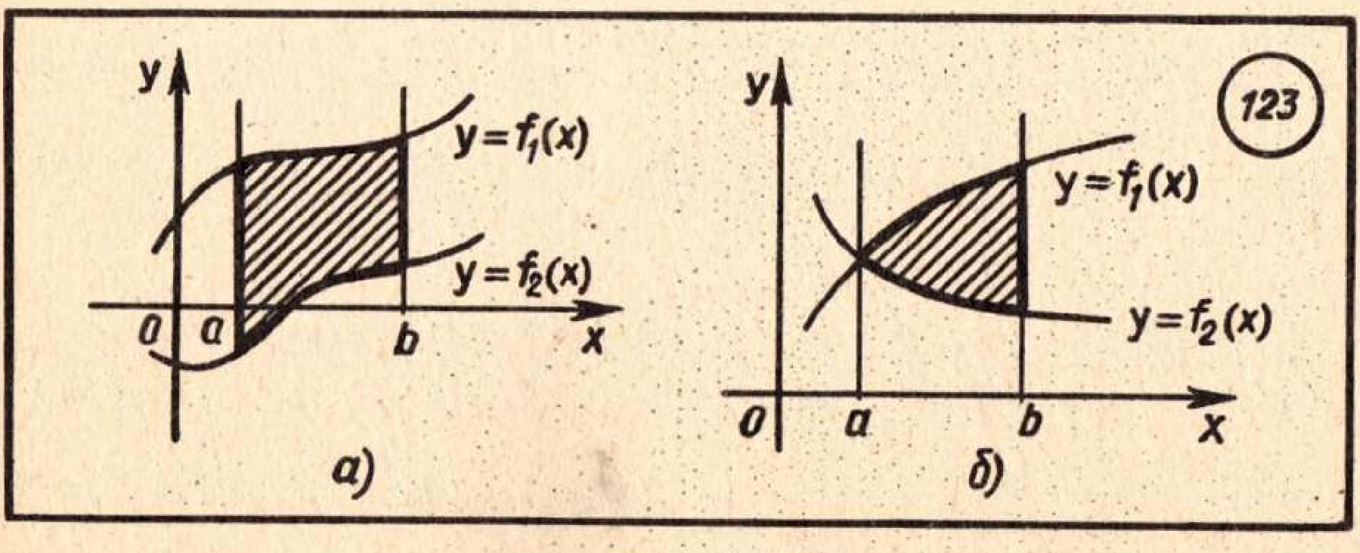
$$S=-\int_a^b f(x)dx \text{ була.} \qquad (3)$$

1 нче мисал. $y=4-x^2$, $y=0$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

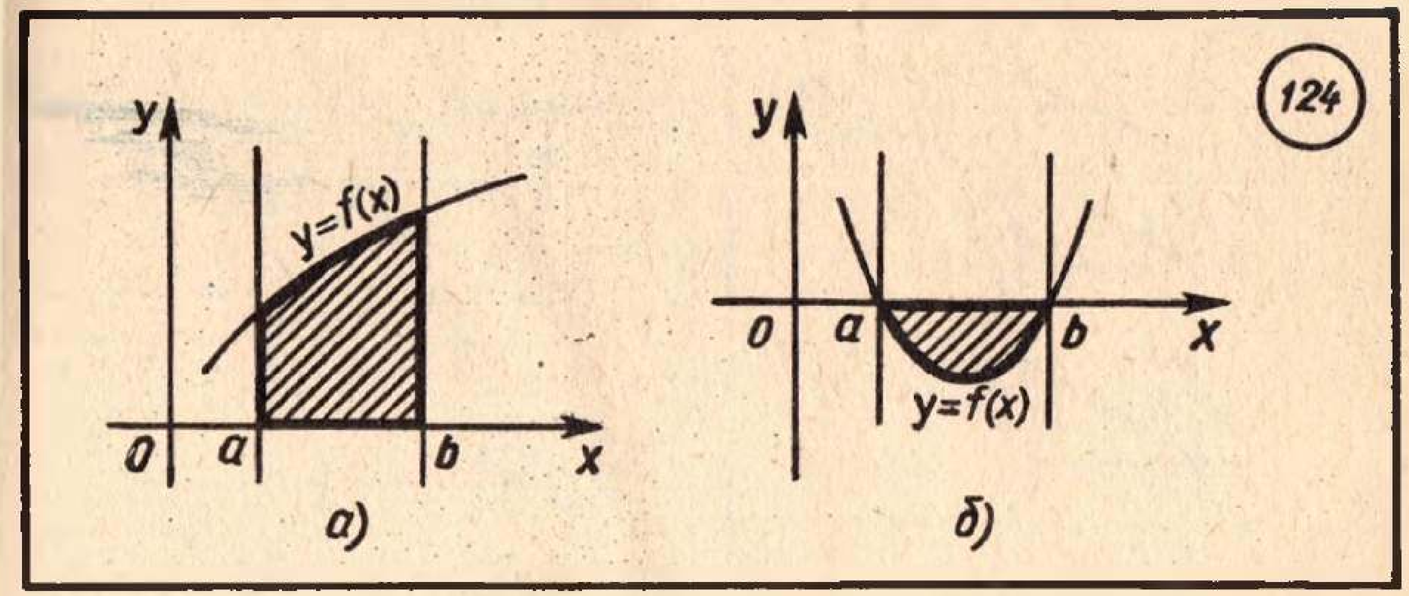
Чишү. Мәйданын табарга кирәк булган фигура 125 нче рәсемдә сурәтләнгән. (2) формуладан файдаланып, табабыз:

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\int_{-2}^{2}4dx-\int_{-2}^{2}x^2dx=4x\Big|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=4(2+2)-\frac{1}{3}(8+8)=\frac{32}{3}.$$



123


124

2 нче мисал. $y=x$, $y=5-x$, $x=1$, $x=2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

Чишү. Мәйданын табарга кирәк булган фигура 126 нчы рәсемдә сурәтләнгән. (1) формуладан табабыз:

$$S=\int_1^2((5-x)-x)dx=\int_1^2(5-2x)dx=\int_1^2 5dx-2\int_1^2 xdx=5x\Big|_1^2-$$

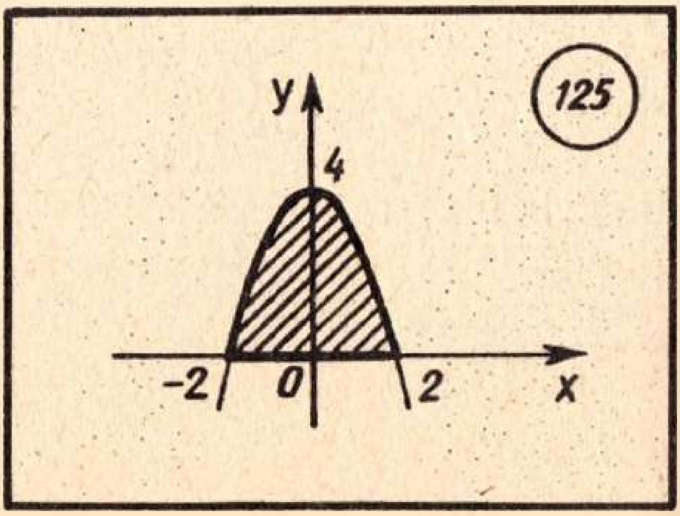
$$-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=5(2-1)-(4-1)=2.$$

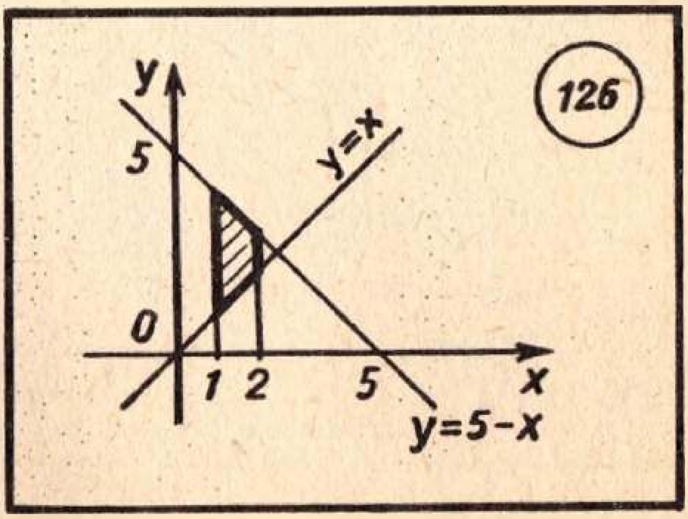
3 нче мисал. $y=x-2$, $y=x^2-4x+2$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

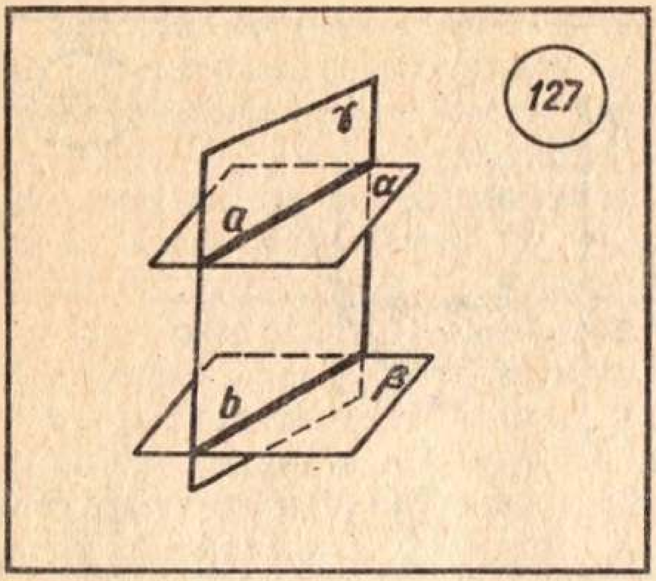
Чишү. $y=x-2$ турысын һәм $y=x^2-4x+2$ параболасын төзеп (п. 114 нче карагыз), мәйданын исәпләргә кирәк булган фигураны табабыз (127 нче рәсем). Димәк,

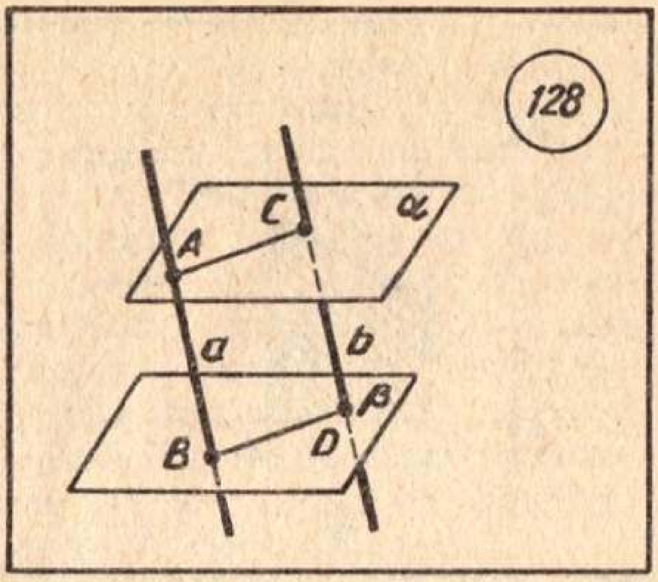
$$S=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx,\quad \text{биредә}\quad f_1(x)=x-2,\quad f_2(x)=x^2-4x+2,$$

ә интеграллауның чикләре a һәм b чынлыкта парабола белән турының кисешү нокталарының абсциссалары ул. Бу абсциссаларны табу өчен $f_1(x)=f_2(x)$, ягъни $x-2=x^2-4x+2$ тигезләмәсен чишәбез, аннан $x_1=1$, $x_2=4$ була.


125


126





$$S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=$$

$$=5\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4=\frac{5}{2}(16-1)-\frac{1}{3}(64-1)-4(4-1)=4{,}5.$$

4 нче мисал. $y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$ сызыклары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

Чишү. Мәйданын табарга кирәк булган фигура 128 нче рәсемдә сурәтләнгән (п. 158 не карагыз). $x=2$ турысын үткәрик. Ул вакытта безне кызыксындырган фигураның мәйданы S S_1+S_2 суммасына тигез, биредә S_1 — 128 нче рәсемдә горизонталь сызыклар белән штрихланган фигураның мәйданы, ә S_2 — вертикаль сызыклар белән штрихланган фигураның мәйданы.

$$S_1=\int_1^2(\sqrt{x}-(2-x))dx=\int_1^2(x^{\frac{1}{2}}+x-2)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+$$

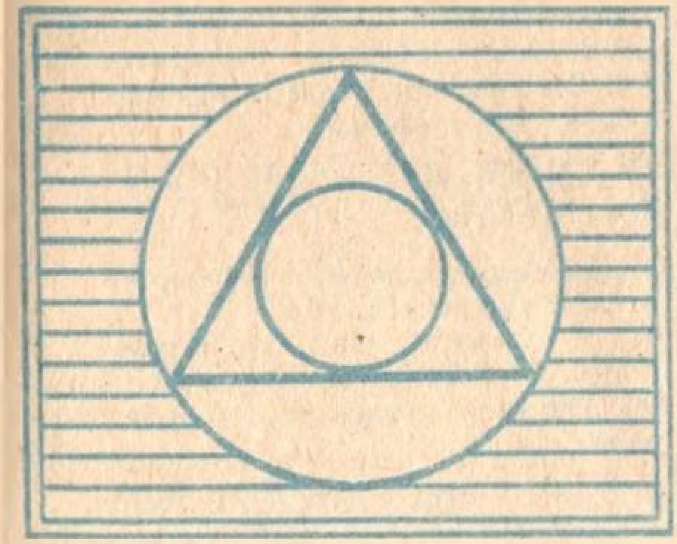
$$+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2x\Big|^2=\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)+\frac{1}{2}(4-1)-2(2-1)=\frac{-8\sqrt{2}-7}{6};$$

$$S_2=\int_2^4(\sqrt{x}-(x-2))dx=\int_2^4(x^{\frac{1}{2}}-x+2)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_2^4-\frac{x^2}{2}\Big|_2^4+$$

$$+2x\Big|_2^4=\frac{2}{3}(8-\sqrt{8})-\frac{1}{2}(16-4)+2(4-2)=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}.$$

Димәк, $S=S_1+S_2=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}+\frac{10-4\sqrt{2}}{3}=\frac{13}{6}.$

ГЕОМЕТРИЯ



I БҮЛЕК. ЯССЫЛЫКТА ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАР

§ 1. Геометрия курсының төзелеше турында

1. Геометрик фигуралар . . . 257
2. Нокта. Туры 258
3. Билгеләмәләр. Аксиомалар. Теоремалар 259

§ 2. Иң гади геометрик фигураларның төп үзлекләре

4. Кисемтә 261
5. Нур 263
6. Әйләнә. Түгәрәк 264
7. Ярымъяссылык 265
8. Почмак. Почмакның градуслы үлчәме 266
9. Чиктәш һәм вертикаль почмаклар 268
10. Үзәк һәм камаулы почмаклар 269
11. Параллель турылар . . . 271
12. Турыларның параллельлек билгеләре 273
13. Перпендикуляр турылар . . 274
14. Әйләнәгә орынма. Әйләнәләрнең орынуы 276
15. Өчпочмаклар 277
16. Өчпочмакларның тигезлеге 279
17. Тигезьянлы өчпочмак . . . 281
18. Өчпочмакларның почмаклары суммасы 281
19. Турыпочмаклы өчпочмак. Пифагор теоремасы 282
20. Өчпочмакка камаулы әйләнәләр һәм өчпочмакны камаучы әйләнәләр 285

§ 3. Яссылыкта геометрик төзүләр

21. Сызым инструментлары . . 286
22. Төзүгә иң гади мәсьәләләр 288
23. Яссылыкта нокталарның геометрик урыны 291

§ 4. Дүртпочмаклар

24. Кабарынкы дүртпочмаклар 293
25. Параллелограмм 294
26. Турыпочмаклык. Ромб. Квадрат 296
27. Трапеция 297

§ 5. Күппочмаклар

28. Сынык сызык 299
29. Кабарынкы күппочмаклар 299
30. Төзек күппочмаклар . . . 301
31. Әйләнә озынлыгы 303

§ 6. Өчпочмакларны чишү

32. Косинус, синус һәм тангенс 304
33. Турыпочмаклы өчпочмакның почмаклары һәм яклары арасындагы бәйләнешләр . . . 307
34. Косинуслар теоремасы. Синуслар теоремасы 308
35. Өчпочмакларны чишү . . . 309

§ 7. Яссы фигураларның мәйданнары

36. Гади фигураларның мәйдан төшенчәсе 311
37. Күппочмакларның мәйданнары 311
38. Охшаш фигураларның мәйданнары 314
39. Түгәрәк мәйданы 315

II БҮЛЕК. ПРОСТРАНСТВОДА ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАР

§ 8. Стереометрия аксиомалары һәм алардан кайбер нәтиҗәләр

40. Стереометриянең төп төшенчәләре 317

§ 9. Турыларның һәм яссылыкларның параллельлеге

41. Чалышма турылар 320
42. Туры белән яссылыкның параллельлеге 321
43. Параллель яссылыклар . . 322

§ 10. Турыларның һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы

44. Туры белән яссылыкның перпендикулярлыгы 324
45. Яссылыкка перпендикуляр һәм авышма 327
46. Яссылыкларның перпендикулярлыгы 328

III БҮЛЕК. ПРОСТРАНСТВОДА ҖИСЕМНӘР

§ 11. Күпкырлыклар

47. Җисем һәм аның өслеге . . 330
48. Күпкырлы почмаклар. Күпкырлыклар 330
49. Призма. Параллелепипед. Куб 331
50. Пирамида 334
51. Төзек күпкырлыклар . . . 336

§ 12. Әйләнү җисемнәре

52. Цилиндр 337
53. Конус 339
54. Шар 341

§ 13. Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү

55. Параллель проекция . . . 343
56. Ортогональ проекцияләү . . 345
57. Пространствода нокталарның геометрик урыны 346

§ 14. Җисемнәрнең күләмнәре

58. Гади җисемнәрнең күләм төшенчәсе 348
59. Параллелепипед, призма һәм пирамиданың күләме . . . 348
60. Цилиндр һәм конусның күләме 350
61. Әйләнү җисемнәре күләмнәренең гомуми формуласы. Шар һәм аның кисәкләренең күләме 351

§ 15. Җисемнәрнең өслек мәйданнары

62. Күпкырлыкларның өслек мәйданнары 352
63. Өслек мәйданы төшенчәсе 353
64. Әйләнү җисемнәре өслекләренең мәйданнары 353

IV БҮЛЕК. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ

§ 16. Яссылыкта һәм пространствода координаталар

65. Яссылыкта һәм пространствода координаталар кертү . . 355
66. Кисемтә уртасының координаталары 357

§ 17. Яссылыкта фигураларның тигезләмәләре

67. Әйләнә тигезләмәсе 359
68. Ике әйләнәнең кисешүе . . 360
69. Туры тигезләмәсе 361
70. Турының һәм әйләнәнең кисешүе 363

§ 18. Фигураларның пространстводагы тигезләмәләре

71. Яссылык тигезләмәсе . . . 364
72. Сфера тигезләмәсе 364
73. Сфера белән яссылыкның үзара торышы 366
74. Ике сфераның кисешүе . . 367

V БҮЛЕК. ФИГУРАЛАРНЫ ҮЗГӘРТҮ

§ 19. Хәрәкәт

75. Фигураларны үзгәртүгә мисаллар 368
76. Хәрәкәт төшенчәсе. Хәрәкәтнең үзлекләре 372

§ 20. Фигураларның охшашлыгы

77. Охшаш үзгәртү 378
78. Охшаш фигуралар 379

VI БҮЛЕК. ВЕКТОРЛАР

§ 21. Вектор төшенчәсен кертү

79. Параллель күчерү 381
80. Вектор төшенчәсе 382
81. Векторның координаталары 384

§ 22. Векторлар өстендә операцияләр

82. Векторларның суммасы . . 385
83. Векторны санга тапкырлау. Коллинеар векторлар 386
84. Векторларны скаляр тапкырлау 388

I БҮЛЕК. ЯССЫЛЫКТА ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАР

§ 1. Геометрия курсының төзелеше турында

1. Геометрик фигуралар. Геометрия — геометрик фигураларның: өчпочмак, квадрат, түгәрәк, пирамида, сфера һ. б. үзлекләрен өйрәнә торган фән ул.

«Геометрия» — грек сүзе, татарчага тәрҗемәсе «җир үлчәү»не аңлата.

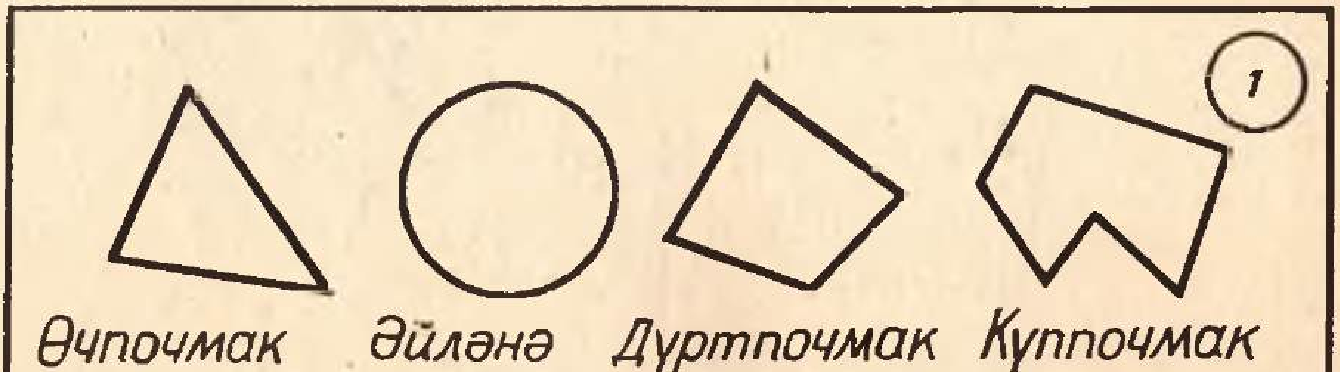
Мәктәптә өйрәнелә торган геометрия борынгы грек галиме Евклид (безнең эрага кадәр III гасыр) хөрмәтенә Евклид геометриясе дип атала.

Мәктәп геометриясе ике кисәктән: планиметрия һәм стереометриядән тора. Геометриянең беренче кисәге белән сез — тугызъеллык мәктәптә, икенче кисәге белән өлкән классларда танышасыз. *Планиметрия* — ул геометриянең яссылыктагы фигураларны өйрәнә торган бүлеге. *Стереометрия* — ул геометриянең пространстводагы фигураларны өйрәнә торган бүлеге (II бүлекне карагыз).

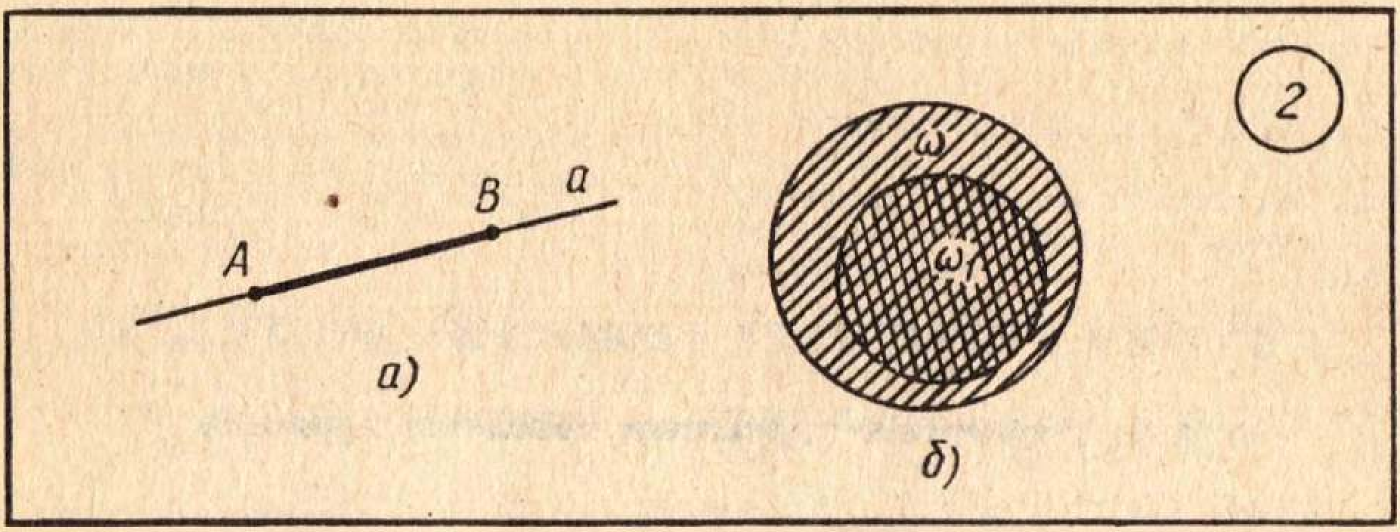
Беренче рәсемдә яссылыктагы төрле фигуралар сурәтләнгән. Һәрбер геометрик фигураны без нокталардан төзелгән дип күз алдына китерәбез. Теләсә нинди геометрик фигураның бер кисәге шулай ук геометрик фигура була. 2, *а* рәсемендә *AB* кисемтәсе *а* турысының кисәге була, һәм 2, *б* рәсемендә w_1 әйләнәсе w әйләнәсенең кисәге була.

Берничә геометрик фигураларның берләшмәсе шулай ук яңадан геометрик фигура була. 3 нче рәсемдә фигура өчпочмактан һәм өч квадраттан төзелгән, 4 нче рәсемдәге фигура өч түгәрәктән тора.

Бу бүлектә яссылыктагы фигураларны гына карарбыз.



1



2. Нокта. Туры. *Нокта һәм туры яссылыкта төп геометрик фигуралар.*

Нокталар латин баш хәрефләре белән тамгалана:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots .$$

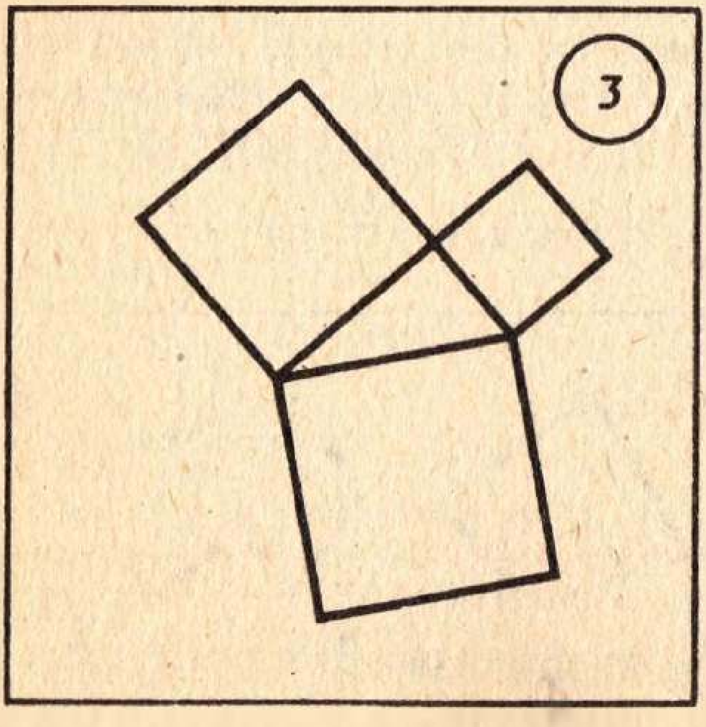
Турылар латин юл хәрефләре белән тамгалана:

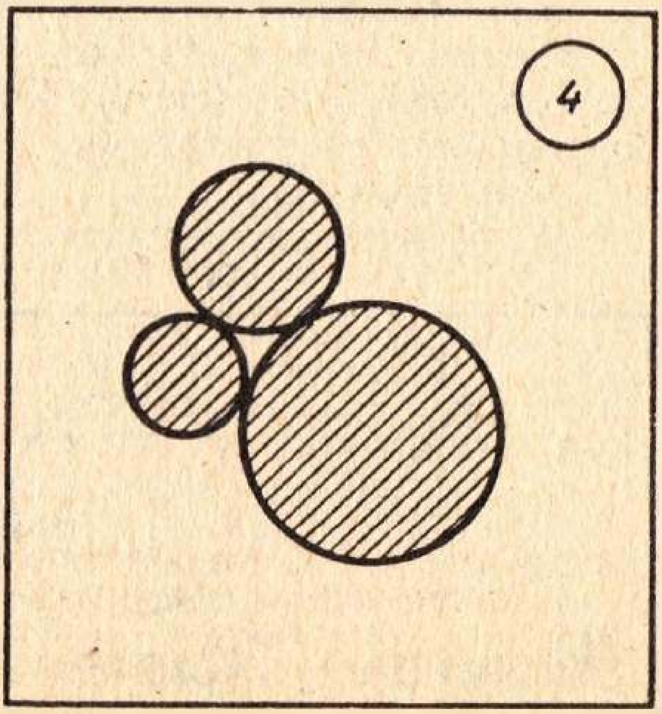
$$a,\ b,\ c,\ \ldots .$$

Турыны шулай ук үзендә яткан тиңдәшле ике хәреф белән дә тамгаларга мөмкин. Мәсәлән, 5 нче рәсемдәге a турысын AB дип, ә b турысын MK дип тамгаларга мөмкин.

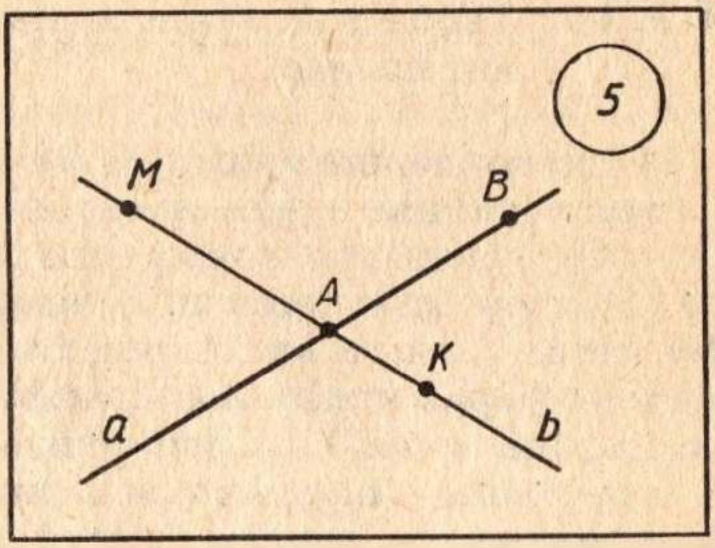
5 нче рәсемдә a һәм b турылары һәм A, B, M һәм K нокталары сурәтләнгән. M һәм K нокталары хакында, алар *b турысында яталар* дип яки M һәм K нокталары *b турысыныкы* дип әйтәләр.

Кайвакытта *туры нокталар аша уза* дип әйтәләр. Мәсәлән, 5 нче рәсемдә a турысы A һәм B нокталары аша уза, ә b турысы M, K һәм A нокталары аша уза.





Шулай ук, *a турысы M ноктасы аша узмый* яки K ноктасы *a турысыныкы булмый* дип әйтергә мөмкин.



3. Билгеләмәләр. Аксиомалар. Теоремалар. Моннан соңгы пунктларда күп кенә геометрик фигураларга һәм башка төшенчәләргә билгеләмәләр биреләчәк. Берәр нәрсәгә билгеләмә бирү — аның нәрсә икәнен аңлату дигән сүз. Теләсә нинди төшенчәгә билгеләмә биргәндә таныш булган башка төшенчәләр кулланыла. Ләкин барлык төшенчәләргә дә билгеләмә биреп булмый, шуңа күрә аларның кайберләре билгеләмәсез генә алына һәм аларны билгеләп булмый торган төшенчәләр дип атыйлар. Мәсәлән, шундый төшенчәләргә нокта һәм туры төшенчәсе керә (п. 2 не карагыз).

5 нче рәсемдә a һәм b турыларының уртак A ноктасы бар. Бер уртак ноктасы булган турыларны *кисешүче* турылар, ә A ноктасы a һәм b турыларының *кисешү ноктасы* дип атала. Фикерләү ярдәмендә геометрик фигураның үзлекләре турындагы раслауның дөреслеген ачыклау исбатлау дип атала.

Геометрик фигураның үзлеген аңлатучы һәм дөреслеге исбат ителә торган җөмлә *теорема* дип атала.

Билгеле инде, геометрик фигураларның барлык үзлекләрен дә исбатлау мөмкин түгел, аларның кайберләре төп үзлекләр дип кабул ителә һәм фигураларның башка үзлекләрен исбатлаганда нигез итеп алыналар.

Фигураларның исбатлаусыз алынган үзлекләре *аксиомалар* дип атала.

Материалны аңлату барышында аксиомалар кыска итеп әйтеп бирелер, алар нигезендә планиметриянең мәктәп курсы төзелгән. Бу аксиомалар **А** хәрефе белән тамгалана.

II бүлектә стереометриянең аксиомалар группасы каралыр.

Планиметрия аксиомаларына, мәсәлән, *нокталарның һәм турыларның яссылыкныкы булу* турындагы төп үзлекләре керә.

А — I_2. Туры нинди генә булмасын, шул турыныкы булган нокталар да һәм аныкы булмаган нокталар да бар.

А — I_2. Теләсә нинди ике нокта аша туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

Булган билгеләмәләрне һәм аксиомаларны кулланып, планиметриянең беренче теоремасын исбатларга мөмкин.

Т. 1. 1. **Төрле ике туры я кисешмиләр, ә бер генә ноктада кисешәләр.**

Әгәр төрле ике турының ике кисешү ноктасы булса, бу нокталар аша ике туры үтәр иде. Ә бу мөмкин түгел, чөнки А — I_2 буенча ике нокта аша бер генә туры үтә.

Бу теорема *каршы куеп исбатлау методы* белән исбатлана. Бу метод шуннан гыйбарәт, башта теорема раслаганга капма-каршы фараз ителә. Аннары фикер йөртү юлы белән аксиомаларга, еш кына алда исбат ителгән теоремаларга нигезләнеп, я теореманың шартына, я аксиомаларның берсенә, я элек билгеле теоремага каршы булган нәтиҗәгә киләләр. Шуның нигезендә, фараз итү дөрес түгел, димәк, теоремадагы фикер дөрес дип йомгак ясыйлар.

Геометрия курсының төзелешен түбәндәгечә характерларга була:.

1. Төп геометрик төшенчәләр санап чыгыла, алар билгеләмәсез кертелә.

2. Кертелгән төшенчәләргә нигезләнеп, барлык калган геометрик төшенчәләргә билгеләмәләр бирелә.

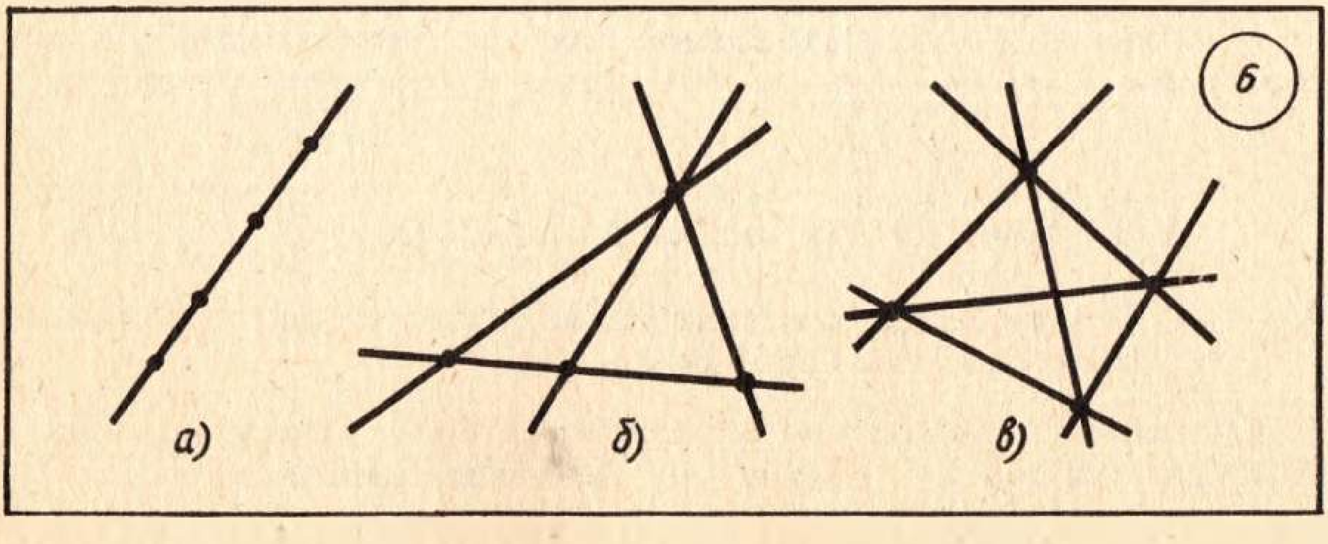
3. Аксиомалар әйтелә.

4. Аксиомаларга һәм билгеләмәләргә нигезләнеп, теоремалар исбатлана, алар чиратында геометрия курсының башка теоремаларын исбатлаганда кулланыла.

Барлык бу пунктларның үтәлеше исәпкә алынган геометриянең төзелеше аксиоматик дип атала.

Мисал. Дүрт нокта бирелгән. Бу нокталарның төрле ничә турыны билгеләүләре мөмкин?

Чишү. Геометриянең А — I_2 аксиомасыннан файдаланыйк. Биредә нокталарның төрлечә урнаша алуын карау мөһим. Дүрт ноктаның өч очракта урнашуы принципиаль рәвештә төрлечә була. Беренче очракта (6 нчы *а* рәсем) без бер турыны, икенче очракта (6 нчы *б* рәсем) дүрт турыны, өченче очракта (6 нчы *в* рәсем) алты турыны күрәбез.


⑥

а) *б)* *в)*

§ 2. Иң гади геометрик фигураларның төп үзлекләре

4. Кисемтә. *a* турысында (7 нче *а* рәсем) *A*, *B* һәм *C* нокталары алынган. *B* ноктасы *A* һәм *C* нокталары *арасында ята.* Шулай ук *A* һәм *C* нокталары *B* ноктасыннан төрле якларда яталар дип тә әйтергә мөмкин. *A* һәм *B* нокталары *C* ноктасыннан бер үк якта яталар, аларны *C* ноктасы аермый. *B* һәм *C* нокталары *A* ноктасыннан бер үк якта яталар.

Турының бирелгән ике ноктасы арасында яткан барлык нокталарыннан торган кисәге *киһемтә* дип атала. Бирелгән нокталар кисемтәнең очлары дип атала. Кисемтә үзенең очлары белән тамгалана.

7 нче *б* рәсемдә *AB* кисемтәсе *a* турысының бер кисәге. *M* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ята, һәм шуңа күрә *AB* кисемтәсенеке була; *K* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ятмый, шуңа күрә дә *AB* кисемтәсенеке булмый.

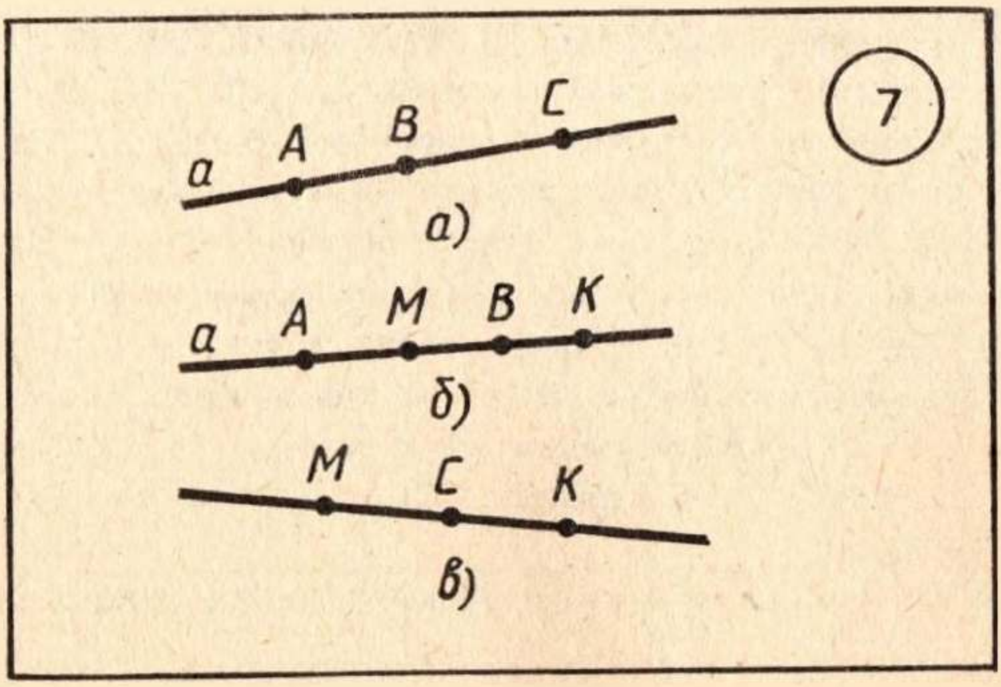
Туры нокталарның урнашу аксиомасы (төп үзлеге) түбәндәгечә әйтелә:

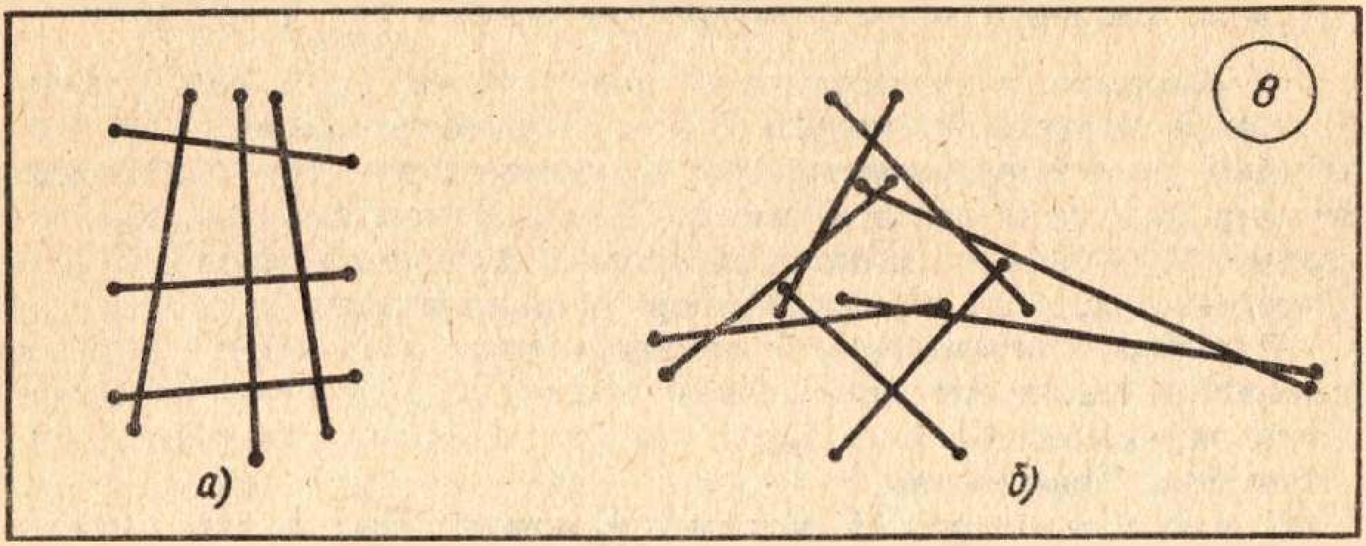
A — II$_1$ Туры эчендәге өч ноктаның берсе, һәм бары тик берсе генә, калган икесе арасында ята.

Түбәндәге аксиома *кисемтәләрне үлчәүнең төп үзлеген* аңлата.

A — III$_1$. Һәр кисемтәнең нульдән зуррак билгеле бер озынлыгы була. Кисемтәнең озынлыгы аның теләсә нинди ноктасы белән бүленүдән килеп чыккан кисәкләре озынлыкларының суммасына тигез.

Бу, әгәр *MK* кисемтәсендә теләсә нинди *C* ноктасын алсак, *MK* кисемтәсенең озынлыгы *MC* һәм *CK* кисемтәләре озынлыкларының суммасына тигез дигән сүз (7 нче *в* рәсем).





MK кисемтәсенең озынлыгын шулай ук M һәм K *нокталары арасындагы ераклык* дип атыйлар.

1 нче мисал. Турыда өч нокта: O, P һәм M бирелгән. $OM = 14$ см, $OP = 8$ см, $PM = 6$ см икәне билгеле. P ноктасы O һәм M арасында ятамы? Әгәр $BM = 5$ см, $PB = 4$ см булса, B ноктасы PM кисемтәсенеке буламы? Җавапны аңлатырга.

Чишү. Әгәр $OP + PM = OM$ булса, P ноктасы O һәм M нокталары арасында ята. Бу шартның үтәлүен тикшерик: 8 см + 6 см = 14 см. Нәтиҗә: P ноктасы O һәм M нокталары арасында ята.

Әгәр B ноктасы P һәм M нокталары арасында ятса, B ноктасы PM кисемтәсенеке була, ягъни $PB + BM = PM$. Тикшерик: 4 см + 5 см = 9 см, ә шарт буенча $PM = 6$ см. Нәтиҗә: B ноктасы PM кисемтәсенеке булмый.

2 нче мисал. 6, 7 һәм 8 кисемтәне, һәрберсе башка өчесе белән кисешерлек итеп, урнаштырып буламы?

Чишү. 6 кисемтәне шулай урнаштырып була (8 нче *а* рәсем). 8 кисемтәне дә урнаштырып була (8 нче *б* рәсем). 7 кисемтәне алай урнаштырып булмый.

Соңгы раслауны исбатлыйк. 7 кисемтәнең шулай урнашуы мөмкин дип фараз итик. Кисемтәләрне номерлап чыгыйк һәм шундый 7×7 таблицасын төзик: әгәр i кисемтәсе j кисемтәсе белән кисешсә, i юлы белән j баганасы кисешкән (i, j) шакмагында «+» куябыз, һәм, әгәр алар кисешмәсә, «—» куябыз. Әгәр $i = j$ булса, шулай ук «—» куябыз. Ике ысул белән таблицада ничә «+» тамгасы булуын исәплибез.

Бер яктан, һәр юлда алар 3, шуңа күрә «+» тамгалары барлыгы $3 \cdot 7 = 21$ була. Икенче яктан, таблица диагональгә карата симметрик тутырылган: әгәр $(i; j)$ шакмагында «+» торса, $(j; i)$ шакмагында шулай ук «+» тора. Димәк, «+» тамгасының барлык саны җөп булырга тиеш. Каршылыкка очрадык.

Биредә без каршы куеп исбатлау методыннан файдаландык.

5. Нур. Турының бирелгән ноктасыннан бер якта ятучы барлык нокталарыннан торган кисәге *ярымтуры* яки *нур* дип атала. Бу нокта ярымтурының *башлангыч ноктасы* яки *нурның башлангычы* дип атала. Уртак башлангыч ноктасы булган бер үк турының төрле ярымтурылары *өстәмә ярымтурылар* дип атала.

Ярымтурылар латин юл хәрефләре белән тамгаланалар. Ярымтурыны ике хәреф: башлангыч һәм ярымтурының тиңдәшле ноктасына туры килгән тагын ниндидер хәреф белән тамгаларга мөмкин. Бу очракта башлангыч нокта беренче урынга куела. Мәсәлән, 9 нчы *а* рәсемдә AB һәм AC нурлары сурәтләнгән, алар өстәмә нурлар була. 9 нчы *б* рәсемдә MA һәм MB нурлары һәм c нуры сурәтләнгән.

Түбәндәге аксиома *кисемтәләр салуның төп үзлеген чагылдыра:*

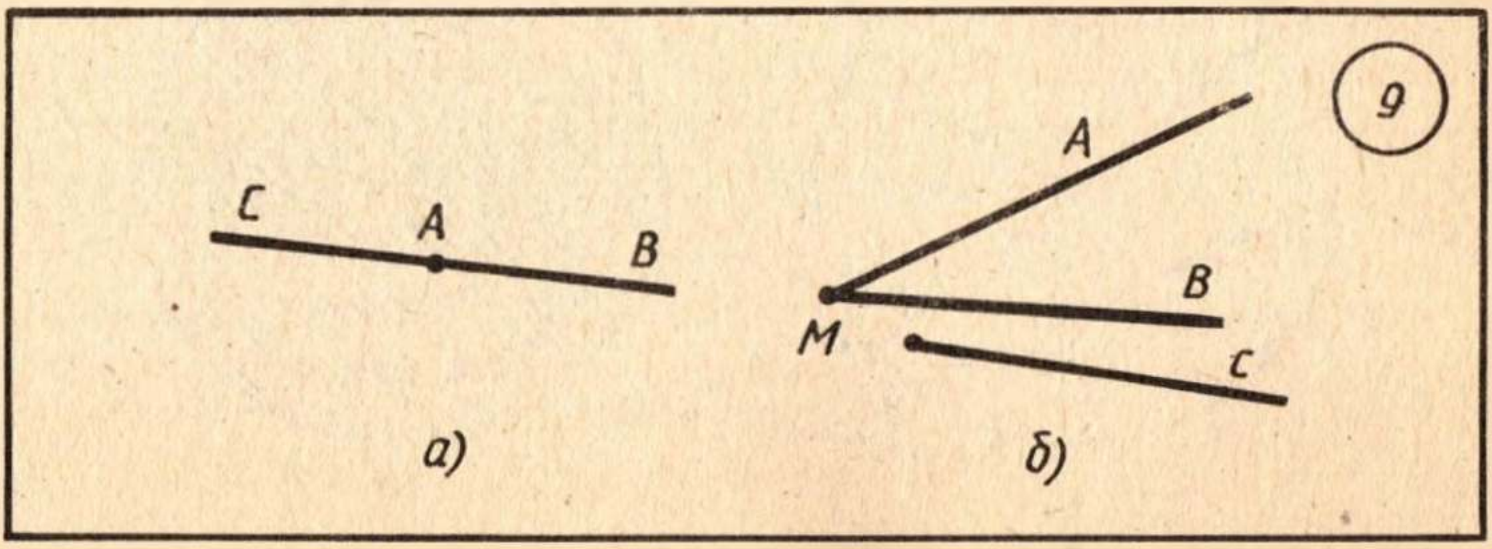
А — IV$_1$. Теләсә нинди ярымтурыда, аның башлангыч ноктасыннан башлап, бирелгән озынлыкта кисемтә салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

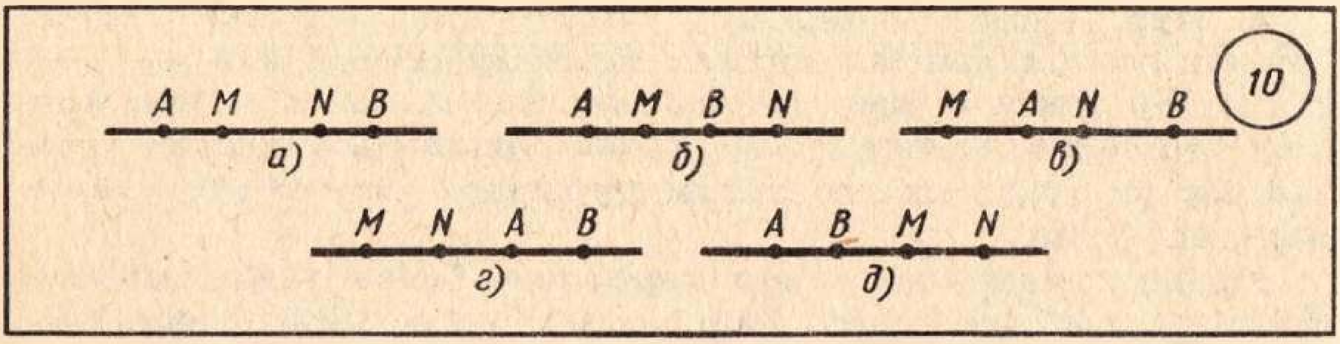
Мисал. Ике нокта: A һәм B бирелгән. A һәм B нокталары аша ничә туры үткәрергә мөмкин? AB турысында башлангычы A ноктасында, B ноктасында булган ничә нур бар? Алар AB кисемтәсенеке буламы?

Чишү. 1) А — I$_2$ аксиома буенча A һәм B нокталары аша һәрвакыт туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

2) Башлангычы A булган AB турысында ике нур бар, алар өстәмә нурлар дип атала. B ноктасы өчен дә шулай ук.

3) Җавап билгеләнгән нокталарның урнашуына бәйле. Мөмкин булган очракларны карыйк (10 нчы рәсем). а) очрагында M һәм N нокталары AB кисемтәсенеке; б), в) очракларында берсе кисемтәнеке, икенчесе юк; г) һәм д) очракларында M һәм N нокталары AB кисемтәсенеке булмаганы ачык күренә.





10

6. Әйләнә. Түгәрәк. Яссылыкның бирелгән ноктасыннан тигез ераклыкта яткан барлык нокталарыннан торган фигура *әйләнә* дип атала. Бу нокта әйләнәнең *үзәге* дип атала.

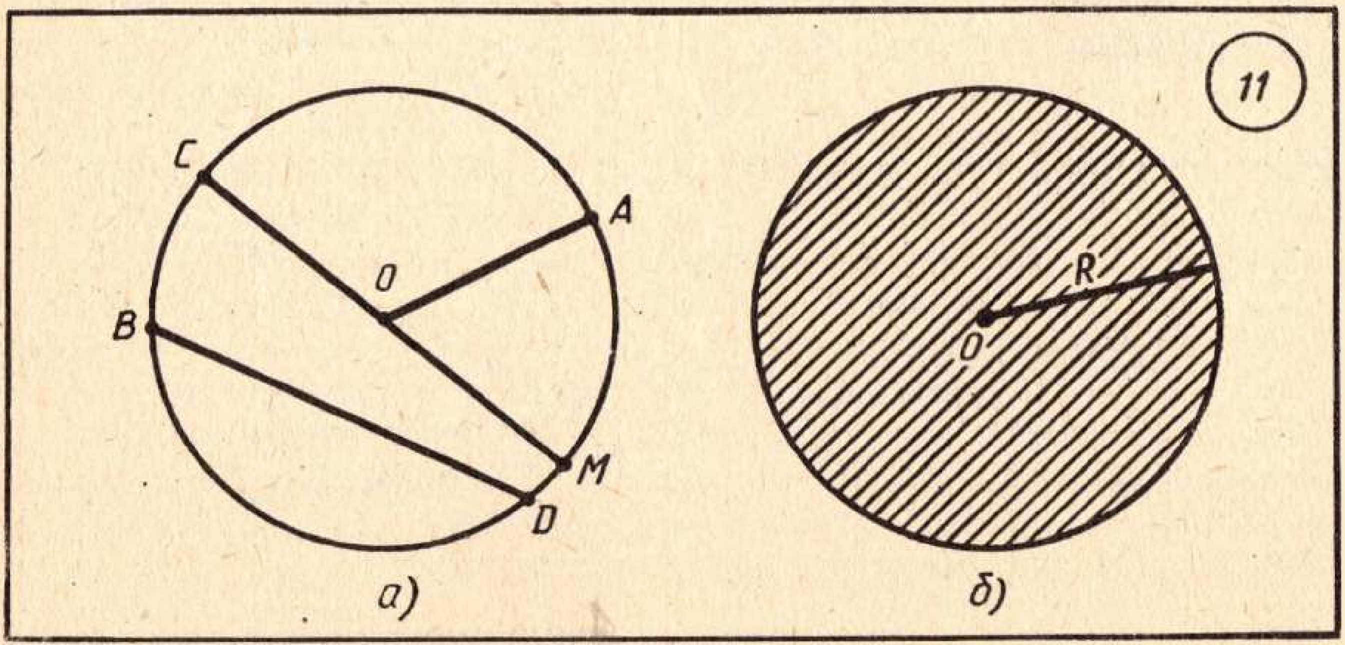
Әйләнә ноктасыннан аның үзәгенә кадәр ераклык әйләнәнең *радиусы* дип атала. Әйләнә ноктасын аның үзәге белән тоташтыручы теләсә нинди кисемтә шулай ук радиус дип атала.

Әйләнәнең ике ноктасын тоташтыручы кисемтә *хорда* дип атала. Үзәк аша узучы хорда *диаметр* дип атала.

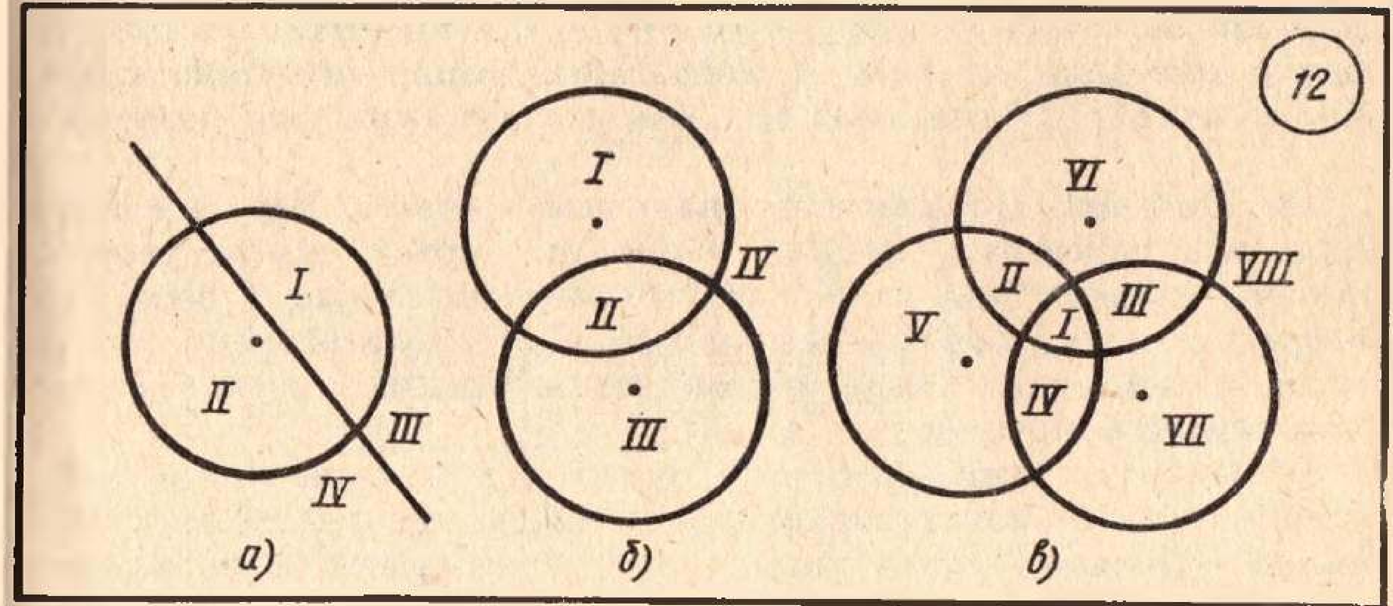
11 нче *а* рәсемдә үзәге O ноктасында булган әйләнә сурәтләнгән. OA кисемтәсе — бу әйләнәнең радиусы, BD — әйләнәнең хордасы, CM — әйләнәнең диаметры.

Яссылыкның бирелгән ноктасыннан ераклыгы бирелгән ераклыктан артмаган барлык нокталарыннан торган фигура *түгәрәк* дип атала. Бу нокта үзе — түгәрәкнең *үзәге* дип, ә бирелгән ераклык — түгәрәкнең *радиусы* дип атала. Үзәге дә, радиусы да шул ук булган әйләнә түгәрәкнең *чиге* була (11 нче *б* рәсем).

Мисал. Яссылыкны: а) туры һәм әйләнә; б) ике әйләнә; в) өч әйләнә үзләренең чикләреннән башка уртак нокталары булмаган нинди иң зур санлы төрле өлешләргә бүлүләре мөмкин?



11

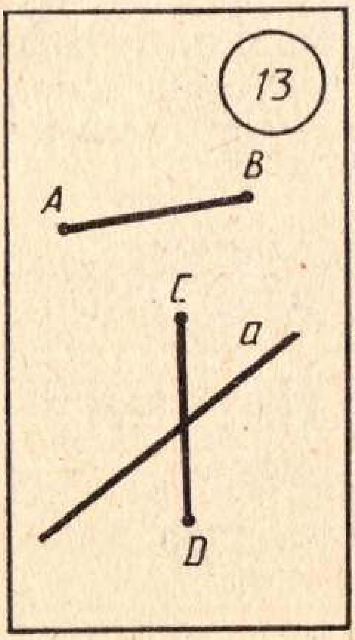

12
I
II
III
IV
а)
I
II
III
IV
б)
VI
II
I
III
VIII
V
IV
VII
в)

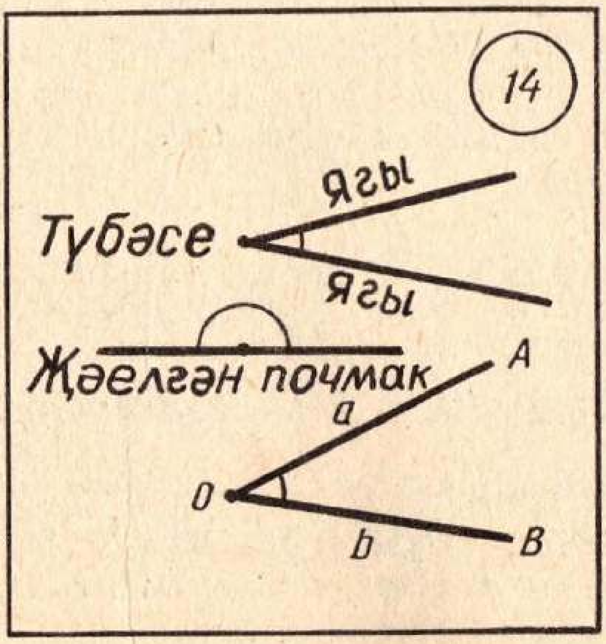
Чишү. Рәсемдә шартка тәңгәл килүче фигураларның үзара урнашу очракларын сурәтлик. Җавапны язабыз: а) дүрт өлешкә (12 нче *а* рәсем); б) дүрт өлешкә (12 нче *б* рәсем); в) сигез өлешкә.

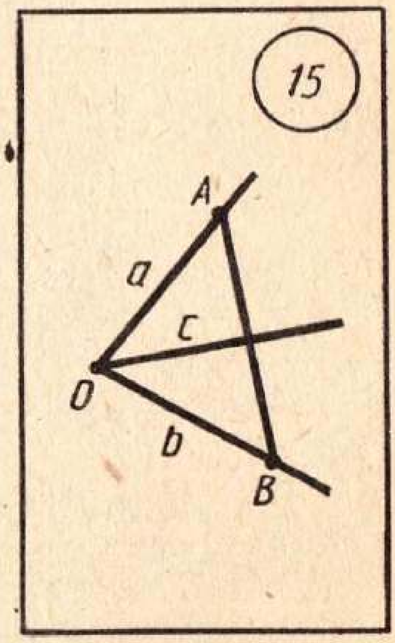
7. **Ярымъяссылык.** Геометриянең тагын бер аксиомасын әйтик.

А—II. | **Туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә.**

13 нче рәсемдә *а* турысы яссылыкны ике *ярымъяссылыкка бүлә,* биредә *а* турысында ятмаган яссылыкның һәр ноктасы, ярымъяссылыкларның берсендә ята. Бу бүленү түбәндәге үзлеккә ия: әгәр ниндидер кисемтәнең очлары бер ярымъяссылыкныкы булса, кисемтә туры белән кисешми; әгәр кисемтәнең очлары төрле ярымъяссылыкларныкы булса, кисемтә туры белән кисешә. 13 нче рәсемдә *A* һәм *B* нокталары *а* турысы яссылыкны бүлгәндә барлыкка килгән ярымъяссылык-


13


14
Ягы
Түбәсе
Ягы
Җәелгән почмак
A
a
O
b
B


15

ларның берсендә яталар. Шуңа күрә AB кисемтәсе a турысы белән кисешми. C һәм D нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар. Шуңа күрә CD кисемтәсе a турысын кисеп үтә.

8. Почмак. Почмакның градуслы үлчәме. Бер ноктадан һәм шул ноктадан чыккан төрле ике ярымтурыдан торган фигура *почмак* дип атала. Ул нокта почмакның түбәсе дип, ә ярымтурылар *почмакның яклары* дип атала (14 нче рәсем). Әгәр почмакның яклары өстәмә ярымтурылар булса, бу почмак *җәелгән почмак* дип атала.

Почмакны тамгалаганда я түбәсен, я якларын, я өч ноктасын: түбәсен һәм почмак якларындагы ике ноктасын күрсәтәләр. «Почмак» сүзен кайвакытта $\angle$ символы белән алмаштыралар. 14 нче рәсемдәге почмакны өч ысул белән тамгаларга мөмкин:

$$\angle O,\ \angle (ab),\ \angle AOB.$$

Әгәр нур почмак түбәсеннән чыкса һәм очлары почмакның якларында ятучы ниндидер кисемтәне кисеп үтсә, c нуры (ab) почмагының яклары *арасыннан уза* дип әйтәләр.

15 нче рәсемдә c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан уза, чөнки ул AB кисемтәсен кисеп үтә.

Җәелгән почмак түбәсеннән чыгучы һәм аның якларыннан үзгә булган теләсә нинди нур почмакның яклары арасыннан уза.

Почмаклар градусларда үлчәнә. Әгәр җәелгән почмак алсак һәм аны 180 тигез почмакка бүлсәк, бу почмакларның һәркайсының градуслы үлчәме *градус* дип атала.

Түбәндәге аксиомада почмакларны үлчәүнең төп үзлекләре бирелгән:

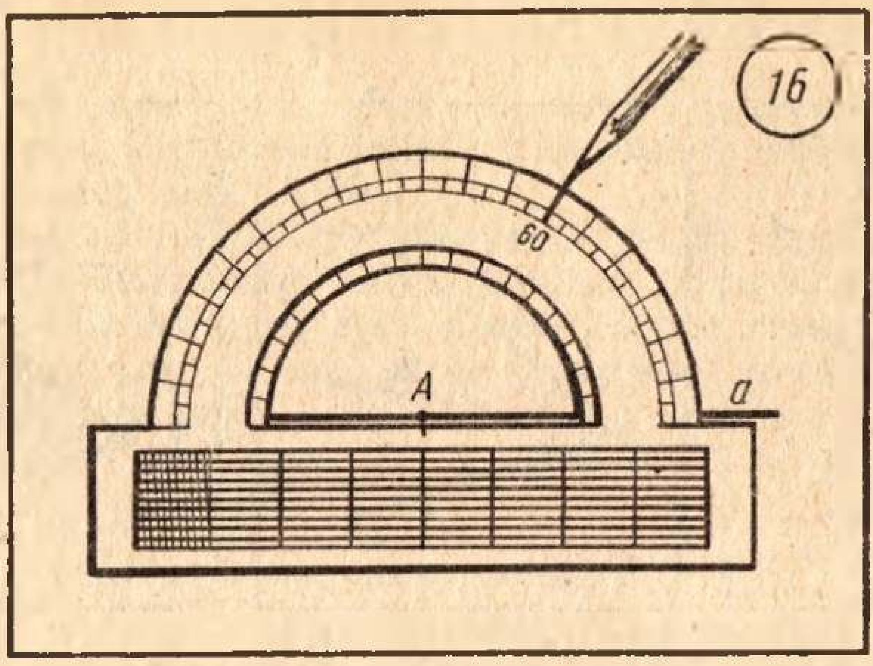
А — III$_2$ | Һәр почмакның нульдән зуррак билгеле бер градуслы үлчәме бар. Җәелгән почмак 180° ка тигез. Почмакның градуслы үлчәме аның яклары арасыннан үтүче теләсә нинди нур белән бүлүдән килеп чыккан почмакларның градуслы үлчәмнәре суммасына тигез.

Димәк, әгәр c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан үтсә, (ab) почмагы (ac) һәм (bc) почмакларының суммасына тигез, ягъни $\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (cb)$.

Почмакның градуслы үлчәме *транспортир* ярдәмендә табыла.

90° ка тигез почмак туры почмак дип атала. 90° тан кечкенә почмак *кысынкы* почмак дип атала. 90° тан зуррак һәм 180° тан кечкенә почмак *җәенке* почмак дип атала.

Почмаклар салуның төп үзлеген әйтик.



A — IV$_2$. Теләсә нинди ярымтурыдан бирелгән ярымъяссылыкка градуслы үлчәме 180° тан кечерәк булган почмак салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

a ярымтурысын карыйк. Аны башлангыч A ноктасыннан дәвам иттерик. Килеп чыккан туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә. 16 нчы рәсемдә градуслы үлчәме 60° дип бирелгән почмакны a ярымтурысыннан өске ярымъяссылыкка транспортир ярдәмендә ничек салырга икәне күрсәтелгән.

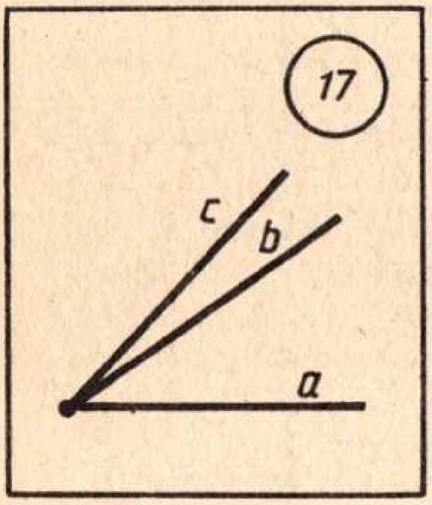
Т. 1. 2. Әгәр бирелгән ярымтурыдан бер үк ярымъяссылыкка почмак салсаң, бирелгән ярымтурыдан үзгә булган кечерәк почмакның ягы зуррак почмакның яклары арасыннан уза.

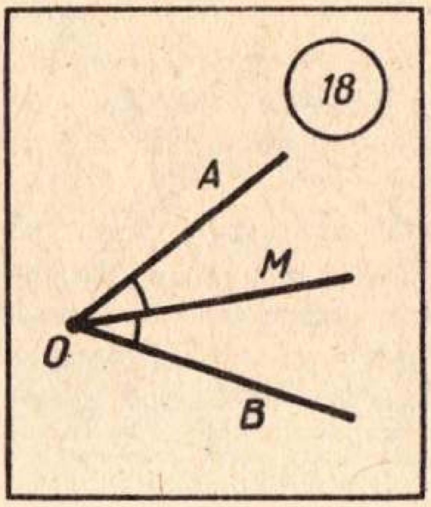
$\angle(ab)$ һәм $\angle(ac)$ — бирелгән a турысыннан бер үк ярымъяссылыкка салынган почмаклар булсын, һәм (ab) почмагы (ac) почмагыннан кечкенәрәк булсын. 1.2 теоремасында b нуры (ac) почмагының яклары арасыннан уза дип раслана (17 нче рәсем).

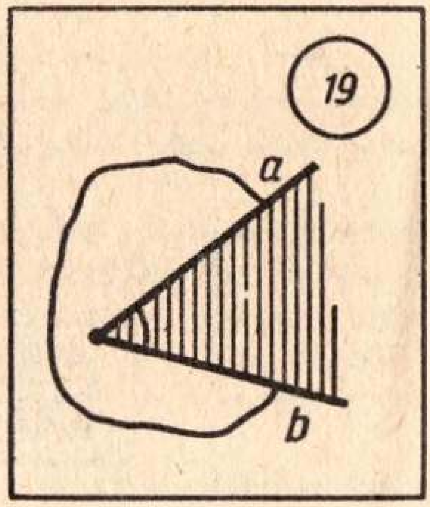
Почмакның түбәсеннән чыгып, аның яклары арасыннан үтүче һәм почмакны урталай бүлүче нур *почмакның биссектрисасы* дип атала.

Геометриядә яссы почмак төшенчәсе бар. Бер ноктадан чыгучы төрле ике нур белән чикләнгән яссылыкның өлеше *яссы почмак* дип атала. Бу нурлар *почмакның яклары* дип атала. Бирелгән яклар белән ике яссы почмак бар. Алар *өстәмә* почмаклар дип атала. 19 нчы рәсемдә яклары a һәм b булган яссы почмакларның берсе штрихланган.

Әгәр яссы почмак ярымъяссылыкның өлеше булса, аның градуслы үлчәме булып, яклары шул ук булган гадәти поч-







макның градуслы үлчәме була. Әгәр яссы почмак ярымъяссылыкны үз эченә алса, ул вакытта аның градуслы үлчәме $360° - \alpha$ га тигез, биредә α — өстәмә яссы почмакның градуслы үлчәме.

Мисал. 120° ка тигез булган (cd) почмагының яклары арасыннан a нуры уза. Әгәр (ca) һәм (da) почмакларының градуслы үлчәмнәре 4 : 2 чагыштырмасында булса, бу почмакларны табарга.

Чишү. a нуры (cd) почмагы яклары арасыннан уза, димәк, почмакларны үлчәүнең төп үзлегеннән (п. 8 не кара)

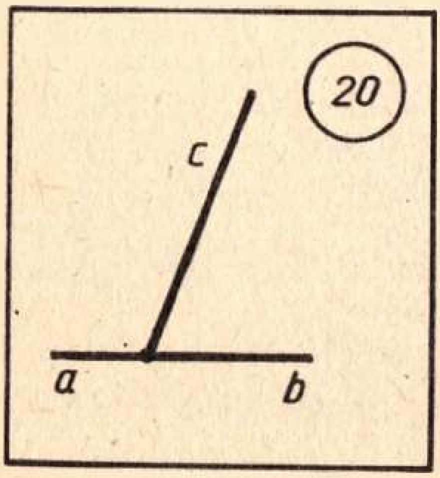
$$\angle(ca) + \angle(ad) = \angle(cd).$$

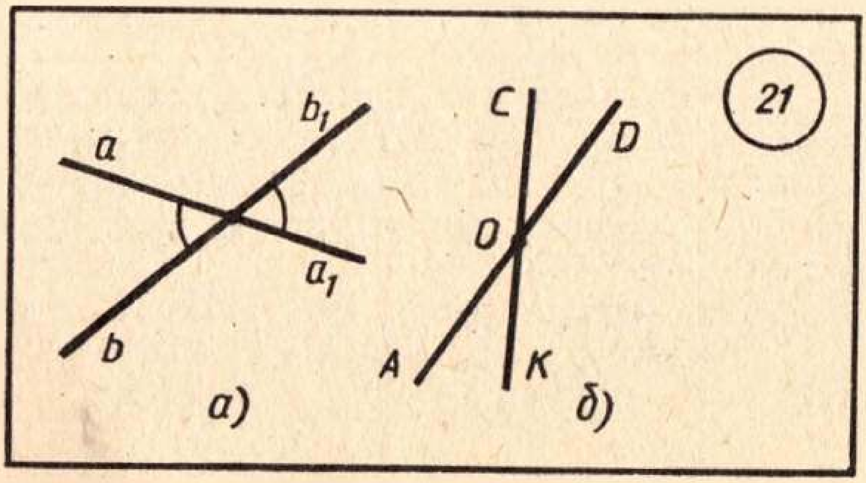
$\angle(ca)$ һәм $\angle(da)$ ның градуслы үлчәме 4 : 2 чагыштырмасында булганга күрә,

$$\angle(ca) = \frac{120°}{6} \cdot 4 = 80°, \ \angle(da) = \frac{120°}{6} \cdot 2 = 40°.$$

9. Чиктәш һәм вертикаль почмаклар. Әгәр ике почмакның бер ягы уртак булып, калган ике ягы өстәмә ярымтурылар икән, алар *чиктәш* почмаклар дип атала. 20 нче рәсемдә (ac) һәм (cb) почмаклары чиктәш почмаклар.

Т. 1. 3. | Чиктәш почмакларның суммасы 180° ка тигез.





а)

б)

1.3 теоремасыннан түбәндәге үзлекләр чыга:

1) Әгәр ике почмак тигез булса, алар белән чиктәш булган почмаклар тигез була.

2) туры почмак белән чиктәш почмак туры почмак була.

3) кысынкы почмак белән чиктәш почмак җәенке почмак була, ә җәенке почмак белән чиктәш почмак кысынкы була.

Әгәр бер почмакның яклары икенче почмак якларының өстәмә ярымтурылары булса, андый ике почмак *вертикаль* почмаклар. 21 нче *а* рәсемдә (ab) һәм (a_1b_1) почмаклары вертикаль почмаклар була.

Т. 1. 4. | Вертикаль почмаклар тигез була.

Кисешүче ике турының чиктәш һәм вертикаль почмаклар хасил итүе үзеннән-үзе аңлашыла. Чиктәш почмаклар берберсен 180° ка кадәр тулыландыралар. Аларның кечкенәсенең почмакча үлчәме *турылар арасындагы почмак* дип атала.

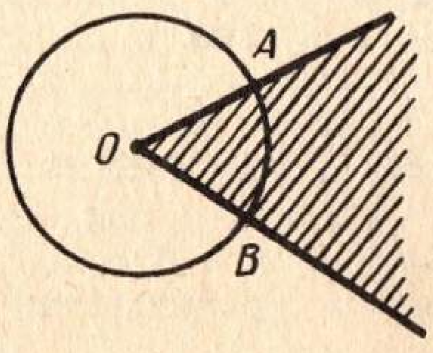
Мисал. 21 нче *б* рәсемдә COD почмагы 30° ка тигез. AOK һәм DOK почмаклары күпмегә тигез?

Чишү. COD һәм AOK почмаклары — вертикаль почмаклар, димәк, 1.4 теоремасы буенча алар тигез, ягъни $\angle AOK = 30°$ була. DOK почмагы COD почмагы белән чиктәш, димәк, 1.3 теоремасы буенча

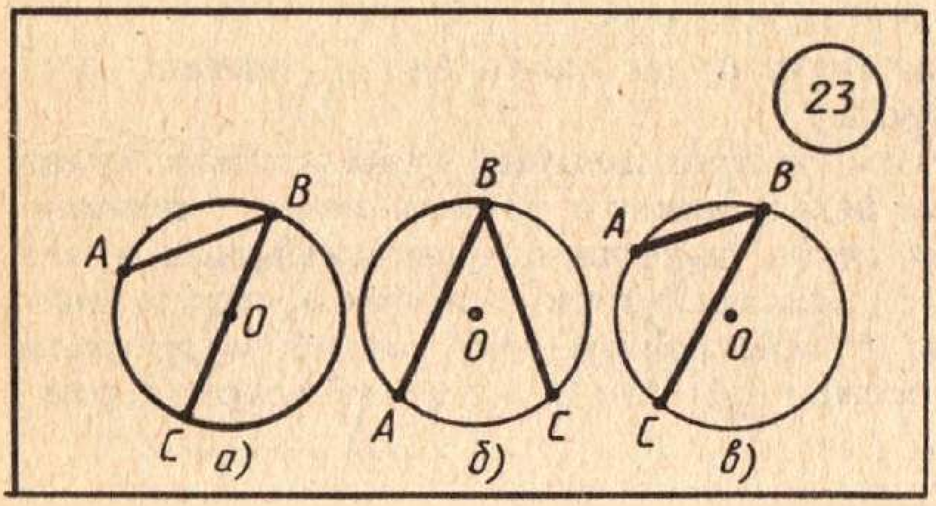
$$\angle DOK = 180° - \angle COD = 180° - 30° = 150°.$$

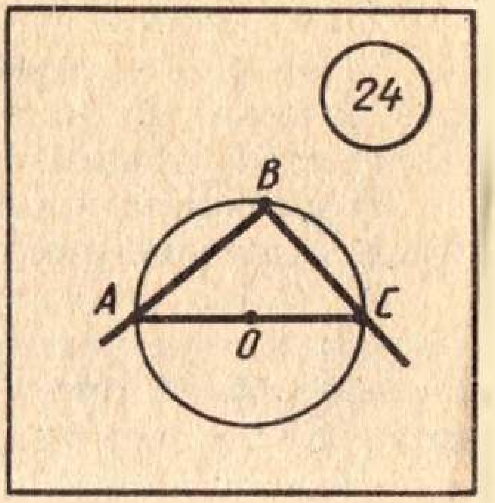
10. Үзәк һәм камаулы почмаклар. Түбәсе әйләнә үзәгендә яткан яссы почмак әйләнәнең *үзәк почмагы* дип атала. Әйләнәнең яссы почмак эчендә урнашкан шушы үзәк почмакка тиңдәшле кисәге *әйләнә дугасы* дип атала. Әйләнә дугасының *градуслы үлчәме* дип тиңдәшле үзәк почмакның градуслы үлчәме атала.

22 нче рәсемдә AOB почмагы — әйләнәнең үзәк почмагы, аның түбәсе O бирелгән әйләнәнең үзәге була, ә OA һәм OB яклары әйләнәне кисеп үтәләр. Үзәк почмакның эчендә урнашкан AB дугасы әйләнәнең бер кисәге була.



22





22 нче рәсемдә AB дугасының градуслы үлчәме AOB почмагының градуслы үлчәменә тигез. AB дугасының градуслы үлчәме $\smile AB$ дип тамгалана.

Түбәсе әйләнә өстендә яткан, ә яклары шул әйләнәне кисеп үткән почмак әйләнәгә *камаулы* почмак дип атала. 23 нче рәсемдә камаулы почмаклар сурәтләнгән.

Т. 1. 5. Яклары әйләнәнең бирелгән ике ноктасы аша үтә торган әйләнәгә камаулы почмак шул нокталарга үткәрелгән радиуслар арасындагы почмакның яртысына тигез була, яки аны 180° ка кадәр тулыландыра.

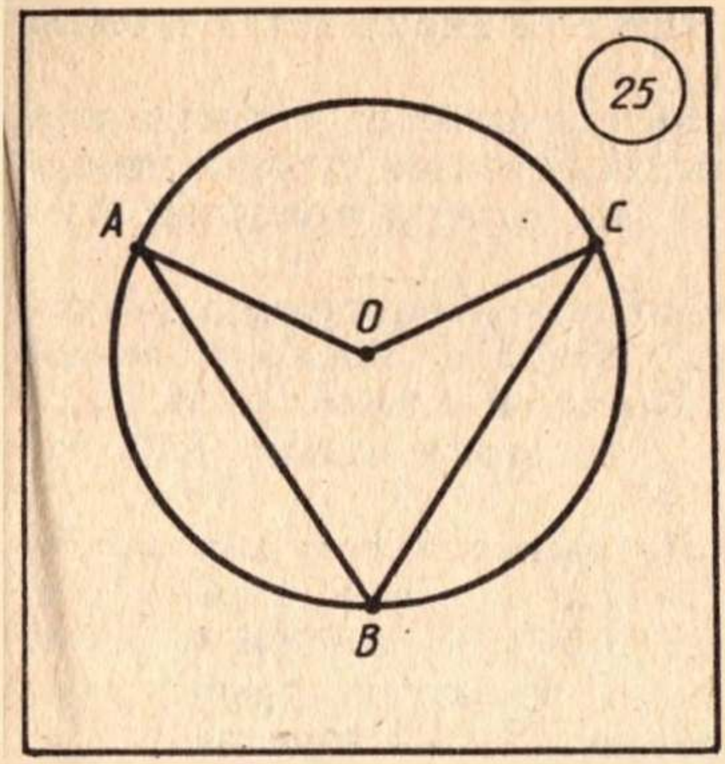
1.5 теоремасын исбатлау өчен, 23 нче рәсемдә сурәтләнгән өч төрле очракны карарга кирәк: камаулы почмакның бер ягы әйләнәнең үзәге аша уза (23 нче *а* рәсем); әйләнәнең үзәге камаулы почмакның эчендә ята (23 нче *б* рәсем); әйләнәнең үзәге камаулы почмакның тышында ята (23 нче *в* рәсем).

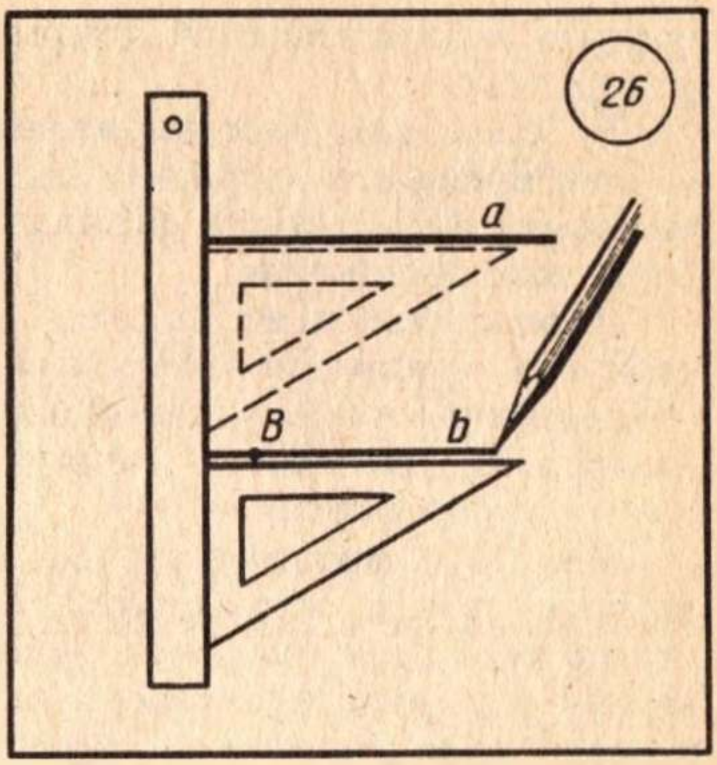
1.5 теоремасыннан шундый нәтиҗә чыга: яклары әйләнәнең бирелгән ике ноктасы аша үтә торган, ә түбәләре шул нокталарны тоташтыручы турының бер ягында яткан әйләнәгә камаулы барлык почмаклар үзара тигез була; яклары әйләнә диаметрының очлары аша узучы почмак туры почмак була.

24 нче рәсемдә камаулы ABC почмагының яклары AC диаметрының очлары аша уза, шуңа күрә $\angle ABC = 90°$.

Мисал. A, B, C нокталары үзәге O ноктасында булган әйләнәдә яталар. Әгәр $\angle ABC = 66°$ булса, AOC почмагын табарга.

Чишү. Әйләнәгә камаулы ABC почмагы AC дугасына таяна, ә $\angle AOC$ — бирелгән әйләнәнең үзәк почмагы (25 нче рәсем). $\angle ABC = 66°$, димәк, 1.5 теоремасы буенча $\smile AC = 132°$, ә AOC почмагы үзәк почмак булганга күрә, аның градуслы үлчәме AC дугасының градуслы үлчәменә тигез, ягъни $\angle AOC = 132°$.





11. Параллель турылар. Әгәр яссылыктагы ике туры кисешмәсә, алар *параллель* турылар дип атала.

26 нчы рәсемдә, бирелгән a турысына параллель итеп, бирелгән B ноктасы аша b турысын почмаклык һәм линейка ярдәмендә ничек үткәрергә икәне күрсәтелгән.

Турыларның параллель икәнен күрсәтү өчен $\parallel$ тамгасы кулланыла. $a \parallel b$ язмасы болай укыла: «a турысы b турысына параллель».

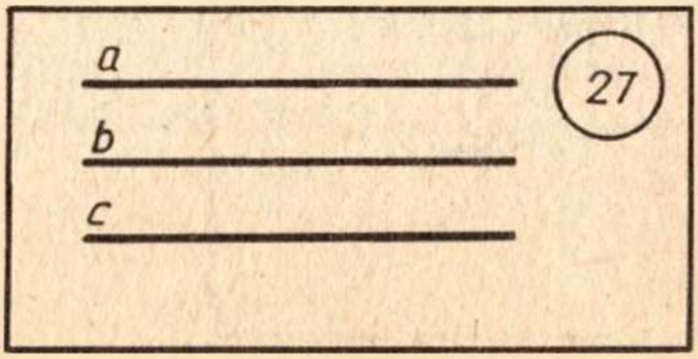
Параллельлек аксиомасы *параллель турыларның төп үзлеген* аңлата.

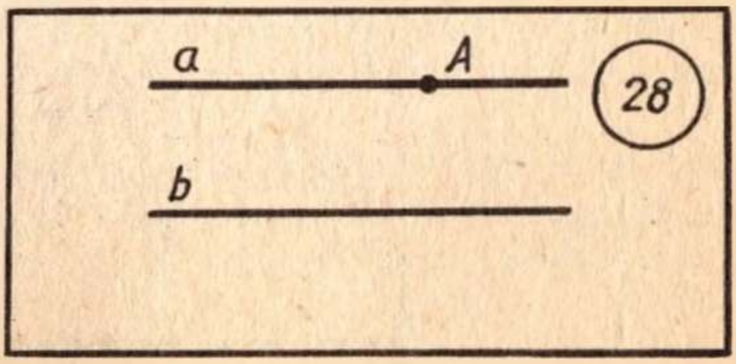
А — V. Яссылыкта бирелгән турыда ятмаган нокта аша, шул турыга параллель итеп, бер генә туры үткәрергә мөмкин.

Т. 1. 6. Бер үк турыга параллель булган ике туры үзара да параллель була.

27 нче рәсемдә a һәм b турылары c турысына параллель була. 1.6 теоремасы $a \parallel b$ дип раслый.

Турыда ятмаган нокта аша бирелгән турыга параллель булган туры үткәрергә мөмкин икәнен исбатларга була. 28 нче





рәсемдә b да ятмаган A ноктасы аша b га параллель a турысы үткәрелгән.

Бу раслауны һәм параллельләр аксиомасын чагыштырып мөһим нәтиҗәгә киләләр: яссылыкта бирелгән турыда ятмаучы нокта аша турыга параллель туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

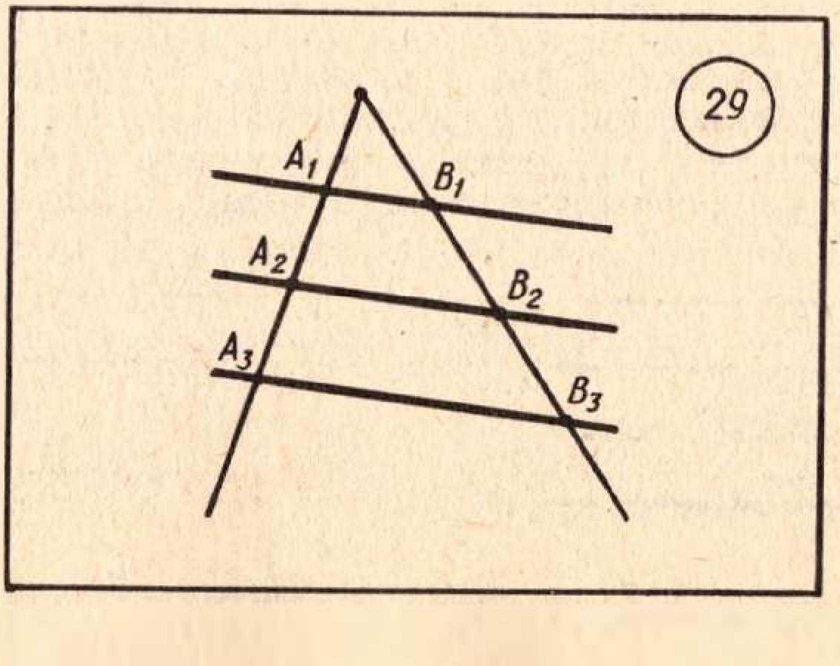
Параллельлек аксиомасы Евклидның «башлангычлар» китабында «бишенче постулат» дип аталган. Борынгы заман геометрлары параллельнең бердәнберлеген исбатларга тырышканнар. Бу нәтиҗәсез сынаулар 2000 елдан артык, XIX гасырга кадәр барган.

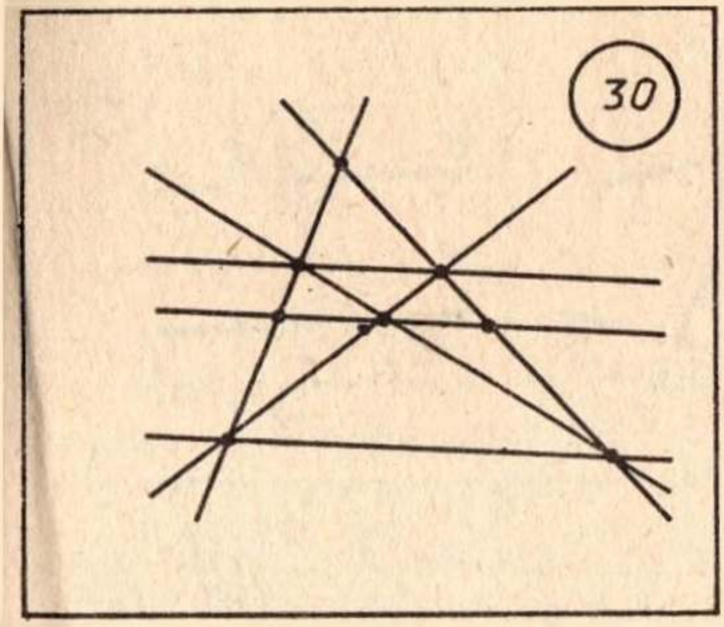
Бөек рус математигы Н. И. Лобачевский һәм аңа бәйсез рәвештә венгр математигы Я. Бойяи бирелгән турыга бер нокта аша берничә туры үткәрергә мөмкинлеген фараз итеп, икенче шундый ук «дөрес» «евклидча булмаган геометрия» не төзергә мөмкин икәнен күрсәткәннәр. Шулай итеп, *Лобачевский геометриясе* барлыкка килгән.

Параллельлек төшенчәсен кулланучы теоремага мисал булып Фалес теоремасы хезмәт итә, ә аның исбатланышы параллельләр аксиомасына таяна. Фалес Милетский — борынгы грек математигы, 625—547 елларда безнең эрага кадәр яшәгән.

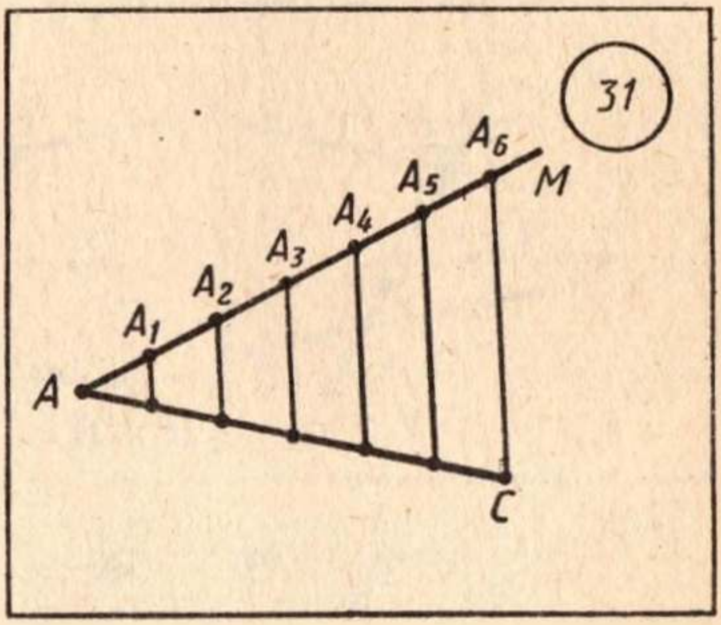
Т. 1. 7. Әгәр почмакның якларын кисүче параллель турылар аның бер ягында тигез кисемтәләр кисеп алса, бу турылар аның икенче ягында да тигез кисемтәләр кисеп ала *(Фалес теоремасы)*.

A_1, A_2, A_3 — параллель турыларының почмак якларының берсе белән кисешү нокталары һәм A_2 ноктасы A_1 һәм A_3 арасында ятсын ди (29 нчы рәсем). B_1, B_2, B_3 — бу турыларның почмакның икенче ягы белән тиңдәшле кисешү нокталары





30



31

булсын. Әгәр $A_1A_2 = A_2A_3$ булса, теорема 1.7 $B_1B_2 = B_2B_3$ икәнен раслый.

1 нче мисал. Җиде туры сигез ноктада кисешә аламы?

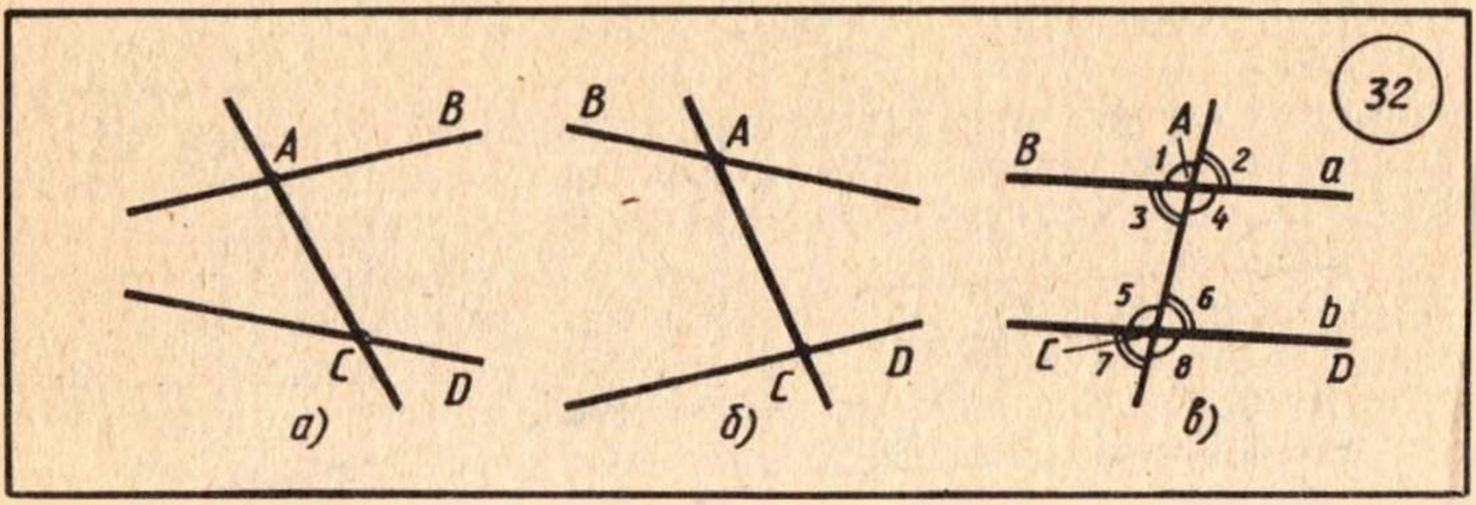
Чишү. Кисешә ала. Мәсәлән, 30 нчы рәсемдә шундый җиде туры сурәтләнгән, аларның өчесе параллель.

2 нче мисал. Ирекле AC кисемтәсен 6 тигез кисәккә бүләргә.

Чишү. AC кисемтәсен сызыйк. AC турысында ятмаган A ноктасыннан AM нуры үткәрик. AM нурында A ноктасыннан эзлекле рәвештә 6 тигез кисемтә салыйк (31 нче рәсем). Кисемтәләрнең очларын A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 дип тамгалыйк. A_6 ноктасын C ноктасы белән тоташтырыйк һәм A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 нокталары аша A_6C турысына параллель булган турылар үткәрик. Бу турыларның AC кисемтәсе белән кисешү нокталары аны 6 тигез кисәккә бүлә (1.7 теоремасы буенча).

12. Турыларның параллельлек билгеләре. AB һәм CD — ике туры булсын ди. AC турысы һәм CD турыларын кисеп үтүче өченче туры булсын (32 нче *а* рәсем). AC турысы AB һәм CD турыларына карата кисүче дип атала. Бу турылар белән барлыкка килгән почмакларны парлап карыйлар. Почмак парларының махсус исемнәре бар. Мәсәлән, әгәр B һәм D нокталары AC турысына карата бер ярымъяссылыкта ятсалар, BAC һәм DCA почмаклары эчке якташ почмаклар дип атала (32 нче *а* рәсем). Әгәр B һәм D нокталары AC турысына карата төрле ярымъяссылыкларда ятсалар, ул вакытта BAC һәм DCA почмаклары эчке аркылы ятучы почмаклар дип атала (32 нче рәсем, *б*).

AC кисешүче AB һәм CD турылары белән ике пар эчке якташ ($\angle 4$ һәм $\angle 6$, $\angle 3$ һәм $\angle 5$) һәм ике пар эчке аркылы ятучы ($\angle 4$ һәм $\angle 5$, $\angle 3$ һәм $\angle 6$) почмаклар хасил итә (32 нче рәсем, *в*).



Т. 1. 8. Әгәр эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булса яки эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез икән, турылар параллель була.

32 нче *в* рәсемдә почмакларның дүрт пары цифрлар белән тамгаланган. Әгәр $\angle 3 = \angle 6$ яки $\angle 4 = \angle 5$ булса, 1.8 теоремасы a һәм b турыларының параллель икәнен раслый. Әгәр $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ яки $\angle 3 + \angle 5 = 180°$ булса, 1.8 теоремасы шулай ук a һәм b турыларының параллель булуын раслый.

1.6 һәм 1.8 теоремалары *турыларның параллельлек билгеләрен* аңлата. 1.8 теоремасына кире булган теорема да дөрес була.

Т. 1. 9. Параллель турыларны өченче туры белән кистергәндә барлыкка килгән эчке аркылы ятучы почмаклар тигез, ә эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез була.

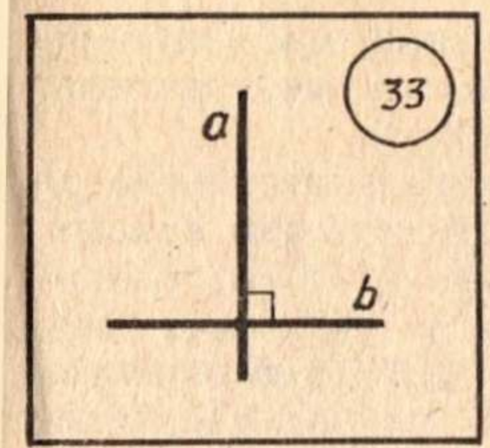
Мисал. Ике параллель туры өченчесе белән кисешкәндә хасил булган эчке якташ почмакларның берсе икенчесеннән 4 тапкыр зуррак. Бу почмаклар күпмегә тигез?

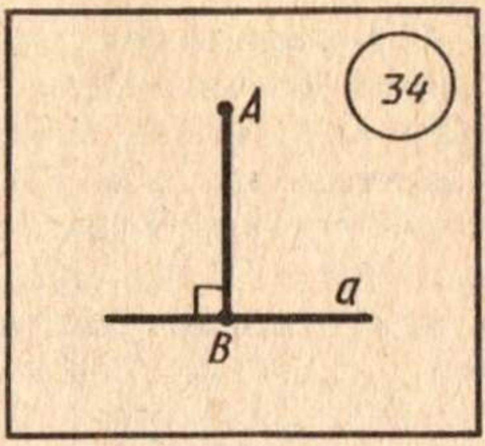
Чишү. 1.9 теоремасы буенча параллель турыларны өченчесе белән кистергәндә эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез. Бу почмакларны α һәм β хәрефләре белән тамгалыйк, ул вакытта $\alpha + \beta = 180°$; α β дан 4 тапкыр зуррак икәне билгеле, димәк, $\alpha = 4\beta$, ул вакытта $5\beta = 180°$, ягъни $\beta = 36°$, $4\beta = \alpha = 144°$. Шулай итеп, $\alpha = 144°$, $\beta = 36°$.

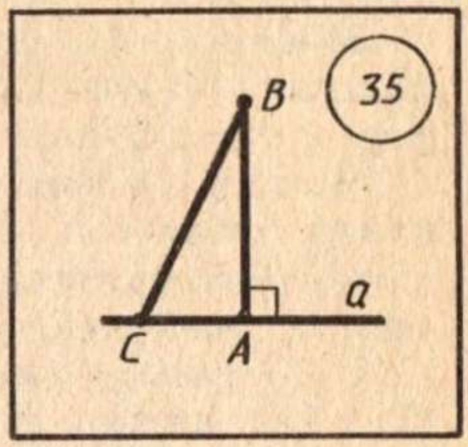
13. Перпендикуляр турылар. Әгәр ике туры үзара туры почмак ясап кисешсә, андый турылар *перпендикуляр* турылар дип атала (33 нче рәсем).

Турыларның перпендикулярлыгы $\perp$ тамгасы ярдәмендә языла. $a \perp b$ язмасы болай укыла: «a турысы b турысына перпендикуляр».

Бирелгән турыга перпендикуляр туры кисемтәсенең бер очы аларның кисешү ноктасында ятса, ул кисемтә бирелгән







турыга *перпендикуляр* дип атала. Кисемтәнең бу очы перпендикулярның *нигезе* дип атала.

34 нче рәсемдә AB перпендикуляры A ноктасыннан a турысына үткәрелгән. B ноктасы — перпендикулярның нигезе.

Т. 1. 10. Турының һәр ноктасы аша, аңа перпендикуляр туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

Т. 1. 11. Бирелгән турыда ятмаучы теләсә нинди ноктадан бу турыга перпендикуляр төшерергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

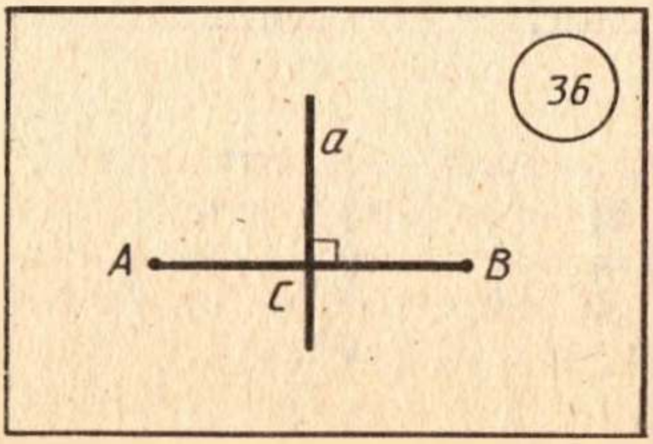
Бирелгән ноктадан турыга төшерелгән перпендикулярның озынлыгы *ноктадан турыга кадәрге ераклык* дип атала.

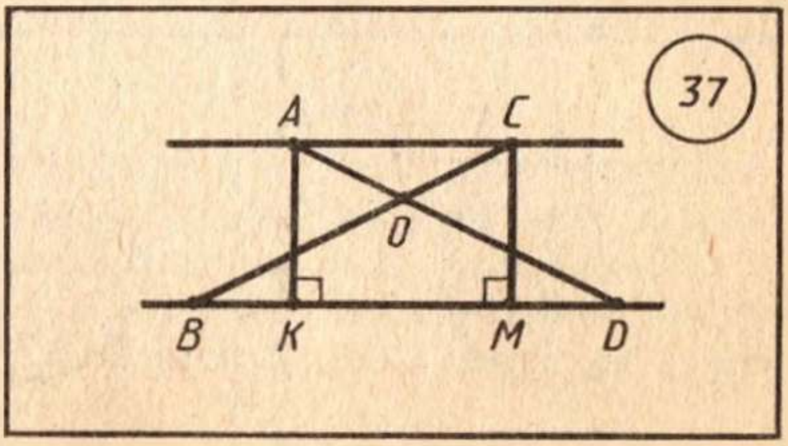
Параллель турыларның берсенең теләсә нинди ноктасыннан икенчесенә кадәрге ераклык *параллель турылар арасындагы ераклык* дип атала.

BA — B ноктасыннан a турысына төшерелгән перпендикуляр, һәм C — A дан аермалы a турысының теләсә нинди ноктасы булсын, ди. BC кисемтәсе B ноктасыннан a турысына үткәрелгән *авышма* дип атала (35 нче рәсем). C ноктасы *авышманың нигезе* дип атала. AC кисемтәсе *авышманың проекциясе* дип атала.

Кисемтәнең уртасы аша аңа перпендикуляр үтүче турыны *урта перпендикуляр* дип атыйлар.

36 нчы рәсемдә a турысы AB кисемтәсенә перпендикуляр һәм AB кисемтәсенең уртасы C ноктасы аша уза, ягъни a — урта перпендикуляр.





Мисал. AC һәм BD параллель турылары арасында урнашкан AD һәм CB тигез кисемтәләре O ноктасында кисешәләр. $AO = CO$ һәм $BO = DO$ икәнен исбатларга.

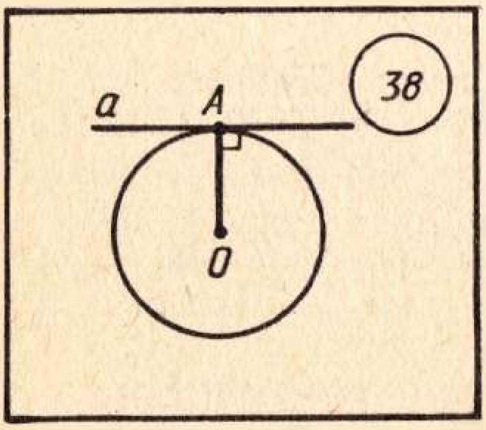
Чишү. A һәм C ноктлары аша BD турысына перпендикуляр үткәрәбез (37 нче рәсем). Параллель турылар арасындагы ераклык буларак $AK = CM$. $\triangle AKD$ һәм $\triangle CMB$ турыпочмаклы өчпочмаклар, алар гипотенуза һәм катет буенча тигез (Т.1 25 кара), димәк, $\angle CBM = \angle ADK$. $\triangle BOD$ тигезьянлы (Т. 1 19), димәк, $BO = DO$. AKD һәм CMB өчпочмакларының тигезлегеннән $\angle DAK = \angle BCM$ икәне чыга, шулай булгач, $\angle CAO = \angle ACO$, ягъни $\triangle AOC$ тигезьянлы, димәк, $AO = CO$.

14. Әйләнәгә орынма. Әйләнәләрнең орынуы. Әйләнә ноктасы аша узучы һәм бу ноктага үткәрелгән радиуска перпендикуляр булган туры *орынма* дип атала. Шуның белән бергә әйләнәнең бирелгән ноктасы *орыну ноктасы* дип атала. 38 нче рәсемдә әйләнәнең A ноктасы аша үткәрелгән a турысы OA радиусына перпендикуляр. a турысы әйләнәгә орынма була. A ноктасы орыну ноктасы була. Шулай ук әйләнә a турысына A ноктасында орына дип тә әйтергә мөмкин.

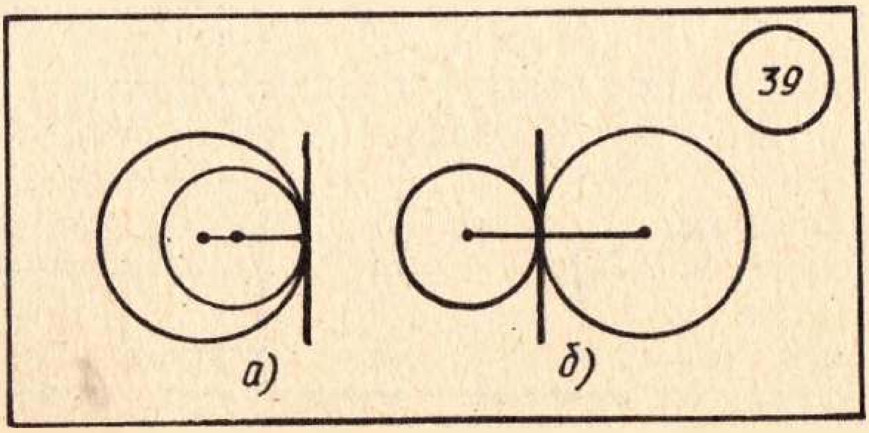
Әгәр уртак ноктлары булган ике әйләнәнең шул ноктада уртак орынмалары булса, ул ике әйләнә бу ноктада *орына* диләр. Орынучы ике әйләнәнең үзәкләре аларның уртак орынмасыннан бер үк якта ятса, әйләнәләрнең орынуы *эчке* дип атала. Әгәр әйләнәләрнең үзәкләре уртак орынмадан төрле якта ятсалар, әйләнәләрнең орынуы *тышкы* дип атала. 39 нчы *а* рәсемендә әйләнәләрнең орынуы эчке, ә 39 нчы *б* рәсемендә — тышкы.

1 нче мисал. Бирелгән турыга бирелгән ноктада орынучы, бирелгән радиуслы әйләнә төзергә.

Чишү. Әйләнәгә орынма орыну ноктасына үткәрелгән радиуска перпендикуляр була. Шуңа күрә эзләнелә торган әйләнәнең үзәге бирелгән нокта аша узучы бирелгән турыга үткәрелгән перпендикулярда ята, һәм бирелгән ноктадан радиуска тигез ераклыкта урнаша. Мәсьәләнең ике чишелеше була — бирелгән турыга карата бер-берсенә симметрик булган ике әйләнә (40 нчы рәсем).

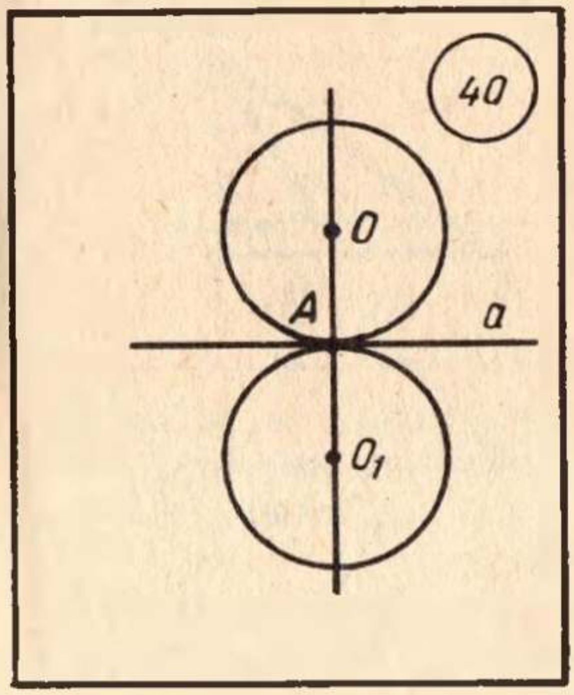


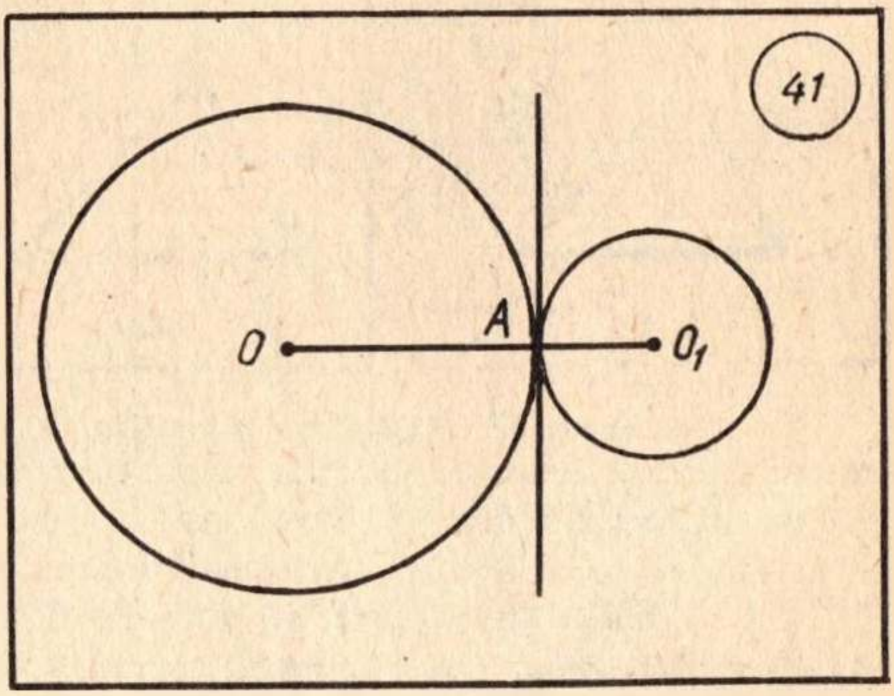
38


39

а)

б)





2 нче мисал. Диаметры 4 һәм 8 см булган ике әйләнә тышкы яктан орыналар. Бу әйләнәләрнең үзәкләре арасындагы ераклык нәрсәгә тигез?

Чишү. Әйләнәләрнең радиуслары OA һәм O_1A A ноктасы аша узучы уртак орынмага перпендикуляр (41 нче рәсем). Шуңа күрә $OO_1 = OA + AO_1 = 6$ см.

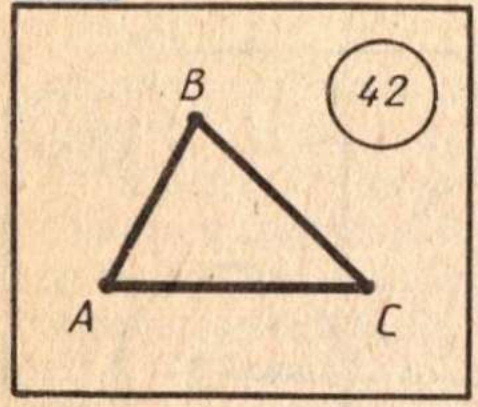
15. Өчпочмаклар. Бер турыда ятмаган өч ноктадан һәм шул нокталарны парлап тоташтыручы өч кисемтәдән торган фигура *өчпочмак* дип атала. Нокталар — өчпочмакның *түбәләре* дип, ә кисемтәләр аның *яклары* дип аталалар. Өчпочмак үзенең түбәләре белән билгеләнә. «Өчпочмак» сүзе урынына $\triangle$ тамгасы кулланыла.

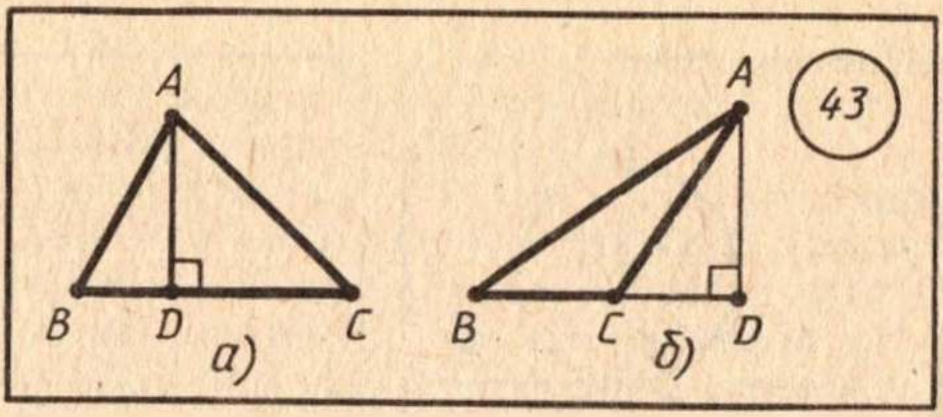
42 нче рәсемдә ABC өчпочмагы сурәтләнгән; A, B, C — бу өчпочмакның түбәләре; AB, BC һәм AC — аның яклары.

AB һәм AC ярымтурылары белән төзелгән почмак ABC өчпочмагының A түбәсе янындагы *почмагы* дип атала. Өчпочмакның B һәм C түбәсендәге почмаклары да шулай ук тамгалана.

Т. 1. 12. Әгәр туры өчпочмакның бер түбәсе аша да үтмәсә һәм аның бер ягы белән кисешсә, бу туры өчпочмакның калган ике ягының бары тик берсе белән генә кисешә.

Өчпочмакның бирелгән түбәсеннән каршы ягын эченә алган турыга төшерелгән перпендикулярны аның *биеклеге* дип атыйлар. 43 нче *а* рәсемендә AD кисемтәсе — кысынкыпочмаклы $\triangle ABC$ биеклеге, ә 43 нче *б* рәсемендә җәенкепочмаклы $\triangle ABC$ биеклегенең нигезе — D ноктасы — BC ягының дәвамында ята.


42


43

Өчпочмакның түбәсен каршы ягының ноктасы белән тоташтыручы өчпочмак почмагының биссектриса кисемтәсе өчпочмакның *биссектрисасы* дип атала. 44 нче рәсемдә AD кисемтәсе — ABC өчпочмагының биссектрисасы.

Өчпочмакның бирелгән түбәсе белән каршы ягының уртасын тоташтыручы кисемтәне өчпочмакның *медианасы* дип атыйлар. 45 нче рәсемдә AD кисемтәсе — ABC өчпочмагының медианасы.

Өчпочмакның ике ягының уртасын тоташтыручы кисемтә өчпочмакның *урта сызыгы* дип атала.

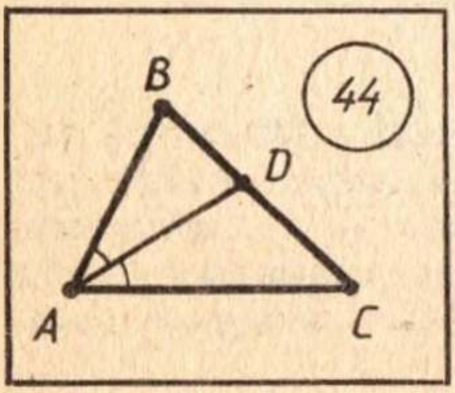
Т. 1. 13. Бирелгән ике ягының уртасын тоташтыручы өчпочмакның урта сызыгы өченче ягына параллель һәм аның яртысына тигез.

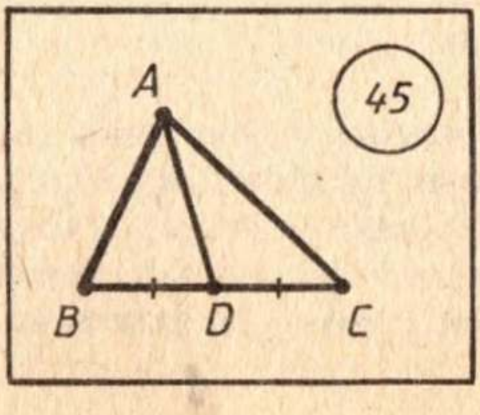
DE — ABC өчпочмагының урта сызыгы булсын ди (46 нчы рәсем). Теорема $DE \parallel AC$ һәм $DE = \frac{1}{2} AC$ икәнен раслый.

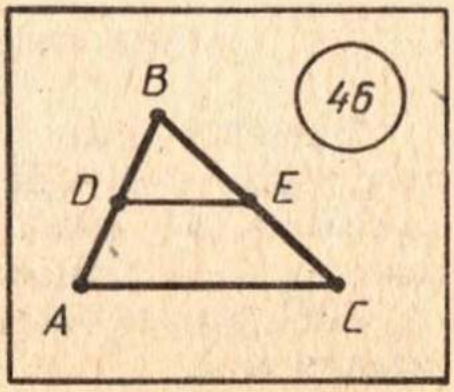
Өч нокта арасындагы ераклыклар үзлеге *өчпочмакның тигезсезлеге* дип атала, ул түбәндәге теорема белән белдерелә:

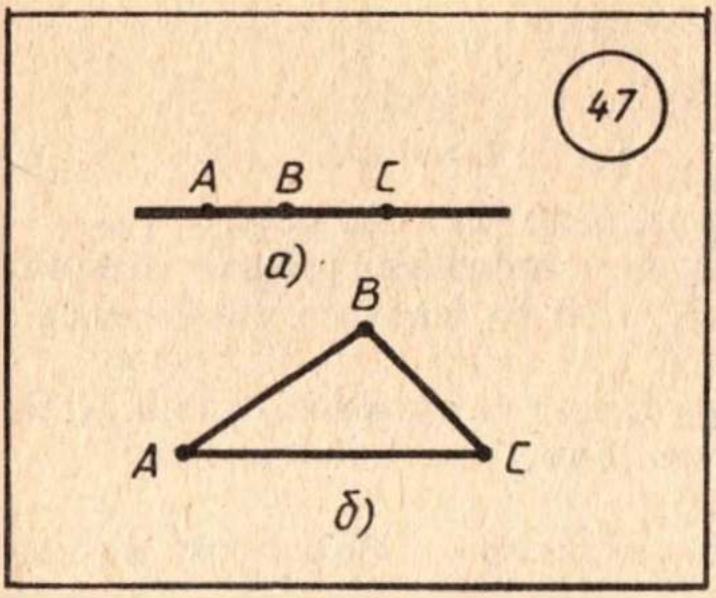
Т. 1. 14. Өч нокта нинди генә булмасын, аларның теләсә кайсы икесе арасындагы ераклык бу ике ноктадан өченчесенә кадәр ераклыклар суммасыннан зур түгел.

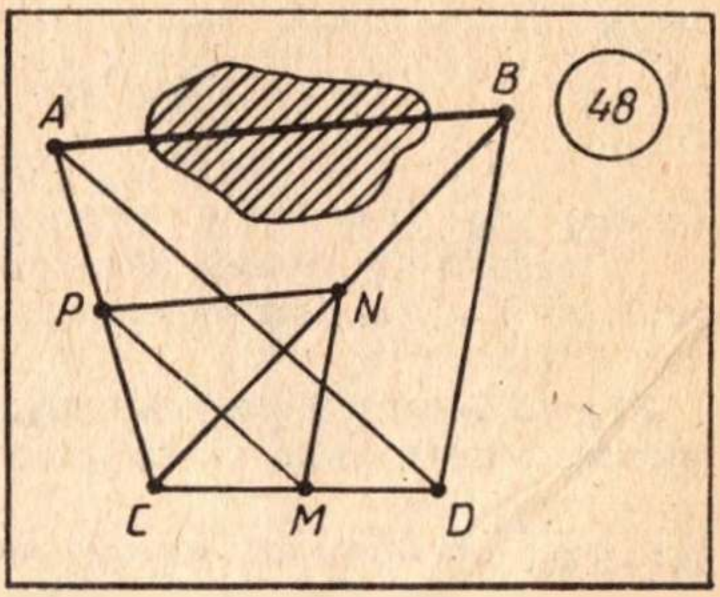
A, B, C — бирелгән өч нокта булсын. Бу өч ноктаның үзара торышы төрлечә булуы мөмкин: а) өч ноктада икесе яки өчесе дә тәңгәл киләләр, бу очракта теореманың рас-


44


45


46





лавы үзеннән-үзе аңлашыла; б) нокталар төрле һәм бер турыда яталар (47 нче *а* рәсем), аларның берсе, мәсәлән, B, калган икесе арасында ята, бу очракта $AB+BC=AC$, моннан өч ераклыкның һәркайсы калган икесенең суммасыннан зур түгел; в) нокталар бер турыда ятмыйлар (47 нче *б* рәсем), ул вакытта 1.14 теоремасы $AC<AB+BC$ икәнен раслый.

в) очрагында өч нокта: A, B; C өчпочмакның түбәләре була. Шуңа күрә *теләсә нинди өчпочмакта һәр ягы калган ике ягының суммасыннан кечкенәрәк.*

1 нче мисал. Яклары а) $AB=5$ см, $AC=18$ см, $BC=12$ см; б) $AB=7$ см, $AC=8$ см, $BC=12$ см булган ABC өчпочмагы буламы?

Чишү. ABC өчпочмагы яклары өчен түбәндәге тигезсезлекләр үтәлергә тиеш:

$$AB \leqslant AC+BC, \tag{1}$$
$$AC \leqslant AB+BC, \tag{2}$$
$$BC \leqslant AB+AC. \tag{3}$$

а) очрагында (2) тигезсезлеге үтәлми, димәк, нокталарның андый торышы була алмый; б) очрагында (1)—(3) тигезсезлекләре үтәлә, ягъни өчпочмак була ала.

2 нче мисал. Каршылыклар белән бүленгән A һәм B пунктлары арасындагы ераклыкны табарга.

Чишү. Ераклыкны табу өчен CD базисын маяклыйбыз һәм BC һәм AD турылары үткәрәбез (48 нче рәсем). CD уртасы — M ноктасын табабыз. $BD \parallel MN$ һәм $AD \parallel MP$ үткәрәбез. ABC өчпочмагыннан: PN бу өчпочмакның урта сызыгы, ягъни $PN=\frac{1}{2}AB$ (Т. 1. 13) PN ны үлчәп, AB ны табуы авыр түгел.

16. Өчпочмакларның тигезлеге. Әгәр ике кисемтә бер үк озынлыкта булса, алар *тигез кисемтәләр* дип атала. Әгәр ике почмакның почмакча үлчәмнәре бер үк булса, алар *тигез почмаклар* дип атала.

Әгәр

$$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$$

булса, ABC һәм $A_1B_1C_1$ *өчпочмаклары тигез була.*

Кыскача бу болай әйтелә: әгәр өчпочмакларның тиңдәш яклары һәм тиңдәш почмаклары тигез булса, бу өчпочмаклар тигез була.

Тигез өчпочмакларның булуының төп үзлеген әйтик (бирелгән өчпочмакка тигез өчпочмак булуның аксиомасы):

А — IV$_3$. Өчпочмак нинди генә булмасын, бирелгән ярымтурыга карата күрсәтелгән тәртиптә урнашкан аңа тигез өчпочмак бар.

Өчпочмаклар тигезлегенең өч билгесе дөрес:

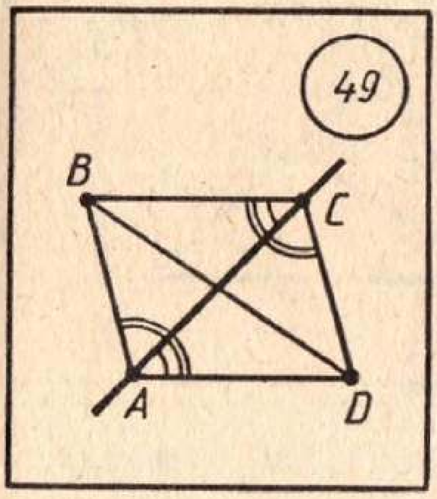
Т. 1. 15. Әгәр бер өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы икенче өчпочмакның ике ягына һәм алар арасындагы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булсалар, андый өчпочмаклар тигез була (өчпочмакларның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча тигезлек билгесе).

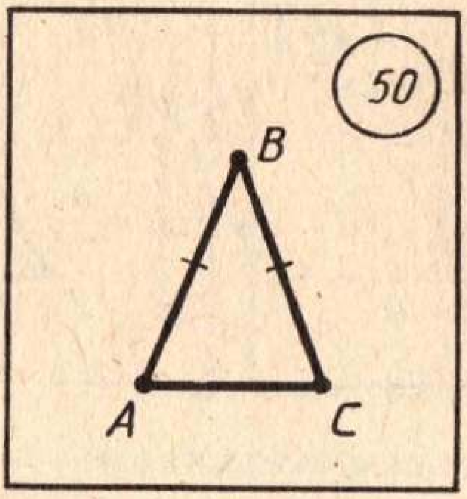
Т. 1. 16. Әгәр бер өчпочмакның бер ягы һәм шул як янындагы почмаклары икенче өчпочмакның бер ягына һәм шул як янындагы почмакларына тиңдәшле рәвештә тигез булсалар, андый өчпочмаклар тигез була (өчпочмакларның бер ягы һәм шул як янындагы почмаклары буенча тигезлек билгесе).

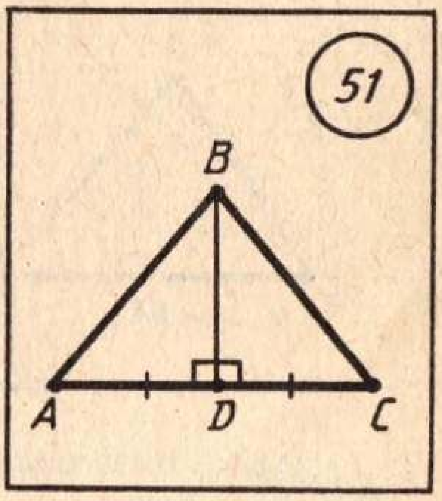
Т. 1. 17. Әгәр бер өчпочмакның өч ягы икенче өчпочмакның өч ягына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була (өчпочмакларның өч ягы буенча тигезлек билгесе).

Мисал. B һәм D нокталары AC турысына карата төрле ярымъяссылыкларда ята (49 нчы рәсем). $\angle BCA = \angle DAC$ һәм $\angle DCB = \angle BAD$ икәне билгеле. $\triangle ABC = \triangle CDA$ икәнен исбатларга.

Чишү. Шарт буенча $\angle BCA = \angle DAC$, һәм $\angle BAC = \angle DCA$, чөнки бу почмаклар тигез BCD һәм DAB почмакларыннан тигез BCA һәм DAC почмакларын алып табылган. Моннан тыш, күрсәтелгән почмакларда AC ягы уртак. Бу өчпочмаклар ягы һәм аның янында ятучы почмаклар буенча тигез (Т. 1. 16).







17. Тигезьянлы өчпочмак. Әгәр өчпочмакның ике ягы тигез булса, ул *тигезьянлы* дип атала. Бу тигез яклар өчпочмакның *ян яклары* дип, ә өченче ягы *нигезе* дип атала.

ABC өчпочмагында (50 нче рәсем) $AB = CB$, димәк, $\triangle ABC$ — тигезьянлы, AC — нигезе.

Т. 1. 18. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез була.

Т. 1. 19. Әгәр өчпочмакның ике почмагы тигез булса, бу өчпочмак тигезьянлы була (Т. 1. 18 гә *кире теорема*).

Т. 1. 20. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасы биссектриса да, биеклек тә була.

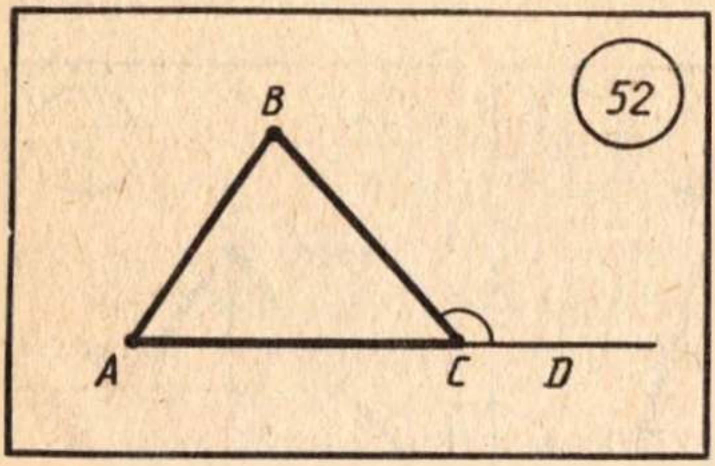
Шулай ук, тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән биеклеге биссектриса да, медиана да булганын исбатларга мөмкин. Моңа охшаш рәвештә тигезьянлы өчпочмакның түбәсеннән каршы ятучы нигезенә үткәрелгән биссектрисасы медиана да, биеклек тә була.

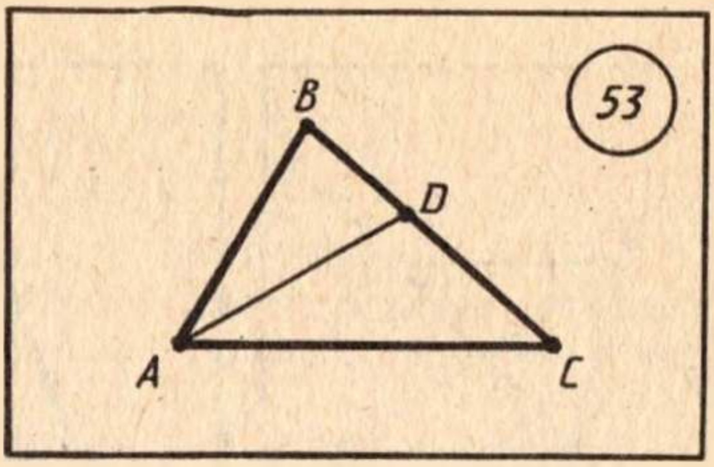
Барлык яклары да тигез булган өчпочмак *тигезьяклы* дип атала.

Мисал. ADB өчпочмагында D почмагы 90° ка тигез. AD ягының дәвамында AD га тигез булган DC кисемтәсе салынган (D ноктасы A һәм C нокталары арасында ята) (51 нче рәсем). ABC өчпочмагының тигезьянлы икәнен исбат итәргә.

Чишү. ADB һәм CDB өчпочмакларында $AD = CD$, BD — уртак як, ә $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$ ка икәне билгеле. Димәк, $\triangle ADB$ $\triangle CDB$ га ике ягы һәм алар арасындагы почмак буенча тигез (Т.1.15). Өчпочмакларның тигезлегеннән $BC = AB$ икәне чыга, ягъни $\triangle ABC$ — тигезьянлы.

18. Өчпочмакның почмаклары суммасы. Теләсә нинди өчпочмакта почмакларының суммасы турындагы теорема дөрес.


52


53

Т. 1. 21. | Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез була.

1. 21 теоремасыннан теләсә нинди өчпочмакның һич югында ике почмагы кысынкы икәне килеп чыга.

Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагы белән чиктәш почмак өчпочмакның бу түбәсе янындагы *тышкы почмагы* дип атала. 52 нче рәсемдә ABC өчпочмагының тышкы почмагы — $\angle BCD$ сурәтләнгән. Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагын, шул түбә янындагы тышкы почмак белән бутамас өчен, аны *эчке почмак* дип атыйлар.

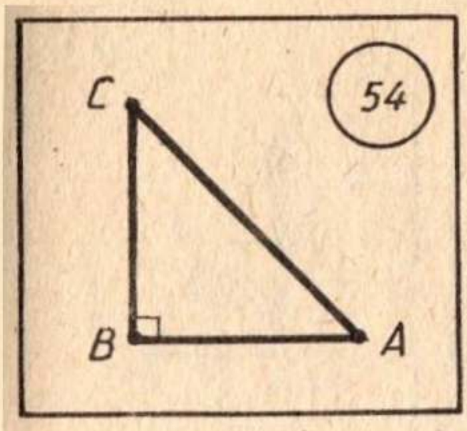
Т. 1. 22. | Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган ике эчке почмакның суммасына тигез була.

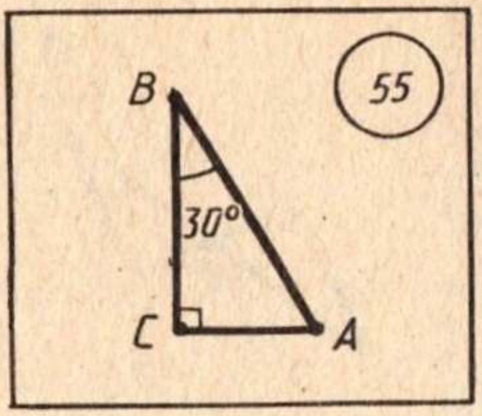
1. 22 теоремасыннан өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган теләсә кайсы өчпочмактан зуррак икәне килеп чыга.

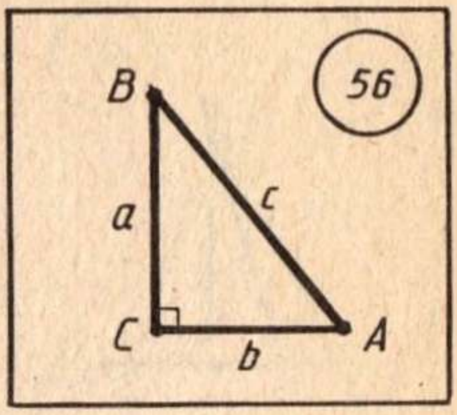
Мисал. ABC өчпочмагында (53 нче рәсем) $\angle A=60°$, $\angle B=80°$. Бу өчпочмакның AD биссектрисасы аннан $\triangle ACD$ кисеп ала. Бу өчпочмакның почмакларын табарга.

Чишү. $\angle DAB=30°$, чөнки $AD-A$ почмагының биссектрисасы (п. 15 не кара). $\triangle ABD$ ның тышкы почмагы буларак, $\angle ADC=30°+80°=110°$ (Т. 1. 22). $\triangle ACD$ ның почмаклары суммасы турындагы теоремасы буенча $\angle C=180°-(110°+ +30°)=40°$ (Т. 1. 21).

19. Турыпочмаклы өчпочмак. Пифагор теоремасы. Әгәр өчпочмакның туры почмагы булса, ул *турыпочмаклы өчпочмак* дип атала. Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез, шуңа күрә турыпочмаклы өчпочмакның бер генә почмагы туры почмак була. Турыпочмаклы өчпочмакның калган ике почмагы кысынкы була, өстәвенә алар бер-берсен 90° ка тутыралар. Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагына каршы ятучы ягы *гипотенуза* дип атала, калган ике ягы *катетлар* дип атала. 54 нче рәсемдә сурәтләнгән $\triangle ABC$ —







турыпочмаклы, $\angle B$ — туры, CA — гипотенуза, CB һәм BA — катетлар.

Турыпочмаклы өчпочмаклар өчен үзләренә хас тигезлек билгеләре бар.

Т. 1. 23. Әгәр бер турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы һәм кысынкы почмагы икенче өчпочмакның гипотенузасына һәм кысынкы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була (гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча тигезлек билгесе).

Т. 1. 24. Әгәр бер турыпочмаклы өчпочмакның катеты һәм аңа каршы ятучы почмагы икенче өчпочмакның катетына һәм аңа каршы ятучы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була (катеты һәм аңа каршы ятучы почмагы буенча тигезлек билгесе).

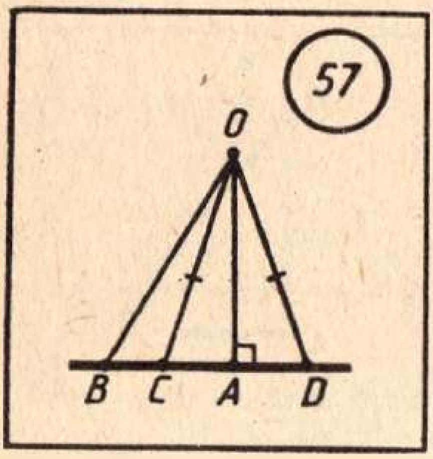
Т. 1. 25. Әгәр бер турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы һәм катеты икенче өчпочмакның гипотенузасына һәм катетына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була (гипотенузасы һәм катеты буенча тигезлек билгесе).

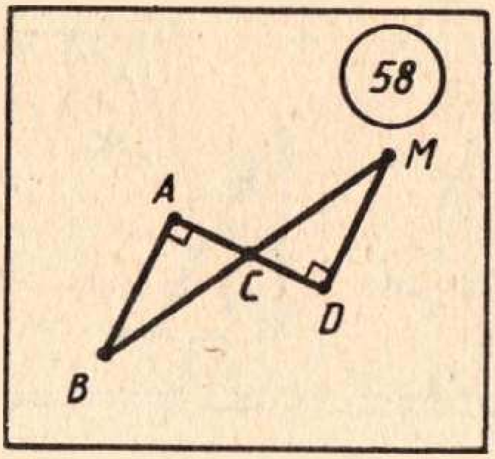
Турыпочмаклы өчпочмакта 30° лы почмакка каршы ятучы катет гипотенузаның яртысына тигез.

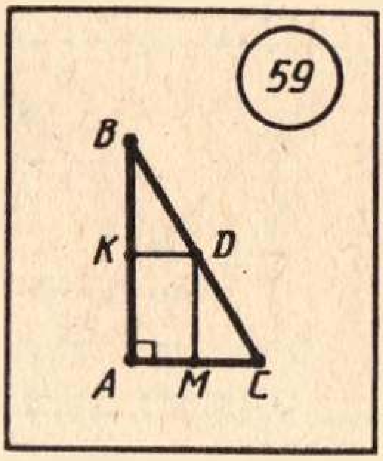
55 нче рәсемдә сурәтләнгән ABC өчпочмагында $\angle C$ — туры, $\angle B = 30°$. Димәк, бу өчпочмакта $CA = \frac{1}{2}AB$.

Турыпочмаклы өчпочмакта Пифагор теоремасы дөрес, бу теорема шулай дип безнең эрага кадәр VI гасырда яшәгән борынгы грек галиме Пифагор хөрмәтенә аталган.

Т. 1. 26. Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенузаның квадраты катетларының квадратлары суммасына тигез *(Пифагор теоремасы).*


57


58


59

ABC — туры почмагы C, катетлары a һәм b, гипотенузасы c булган бирелгән турыпочмаклы өчпочмак булсын (56 нчы рәсем). Теорема раслаганча, $a^2+b^2=c^2$.

Пифагор теоремасыннан, турыпочмаклы өчпочмакта катетларның теләсә кайсы гипотенузадан кечкенәрәк булуы килеп чыга.

Пифагор теоремасыннан, әгәр турыга бер үк ноктадан перпендикуляр һәм авышма үткәрелсә, авышманың перпендикулярдан зуррак булуы, тигез авышмаларның проекцияләре тигез булуы; ике авышмадан проекциясе зуррак булган авышманың зуррак булуы килеп чыга.

57 нче рәсемдә O ноктасыннан a турысына OA перпендикуляры һәм OB, OC һәм OD авышмалары үткәрелгән, биредә $OC=OD$, ә $OB>OC$. Алда әйтелгәннәргә нигезләнеп: а) $OA<OB$, $OA<OC$, $OA<OD$; б) $AC=AD$, чөнки $OC=OD$; в) $AB>AC$, чөнки $OB>OC$.

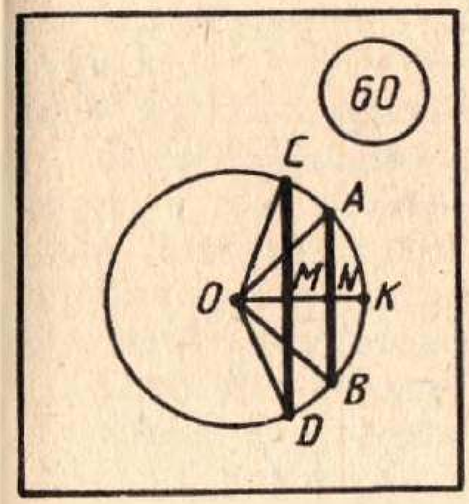
1 нче мисал. 58 нче рәсемдә сурәтләнгән ABC һәм DMC өчпочмакларында $AB=DM$, $AB\perp AC$, $MD\perp CD$. Бу өчпочмакларның тигезлеген исбатларга.

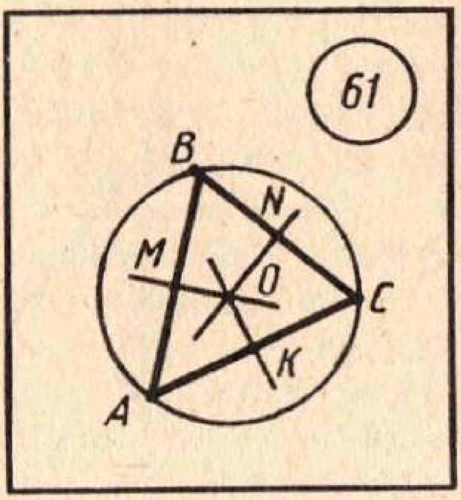
Чишү. ABC һәм DMC өчпочмакларының шарт буенча $AB=DM$ һәм $\angle BAC=\angle MDC=90°$, ә $\angle BCA=\angle MCD$ вертикаль почмаклар буларак (Т. 1. 4). Өчпочмаклар катеты һәм каршы ятучы почмак буенча тигез (Т. 1. 24).

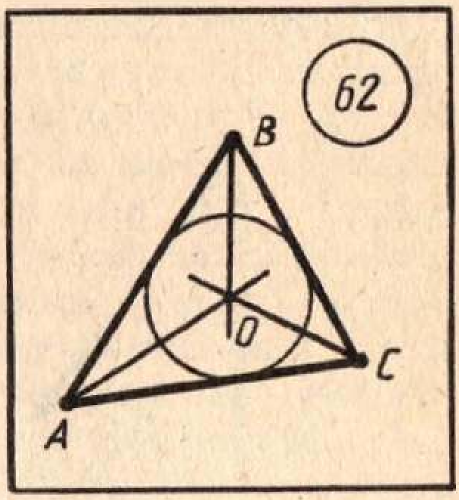
2 нче мисал. Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенузаның уртасы аша аның катетларына параллель турылар үткәрелгән. Әгәр өчпочмакның катетлары 10 һәм 8 см га тигез булса, килеп чыккан турыпочмаклыкның периметрын табарга.

Чишү. ABC өчпочмагында $\angle A$ туры, $AB=10$ см, $AC=8$ см, KD һәм MD — ABC өчпочмагының урта сызыклары, моннан $KD=\frac{1}{2}AC=4$ см, $MD=\frac{1}{2}AB=5$ см (Т. 1. 13). $KDMA$ турыпочмаклыгының периметры 18 см га тигез.

3 нче мисал. Радиусы 25 см га тигез булган әйләнәдә аның үзәгеннән бер үк якка озынлыгы 40 һәм 30 см лы ике параллель хорда үткәрелгән. Бу хордалар арасындагы ераклыкны табарга.







Чишү. AB һәм CD хордаларына перпендикуляр булган OK радиусы үткәрәбез, әйләнә үзәге O ны C, A, D һәм B нокталары белән тоташтырабыз (60 нчы рәсем). COD һәм AOB өчпочмаклары тигезьянлы, чөнки $OC=OD$ һәм $OA=OB$ (радиус буларак); OM һәм ON — бу өчпочмакларның биеклекләре. 1. 20 теоремасы буенча биеклекләрнең һәркайсы бер үк вакытта тиңдәшле өчпочмакның медианасы була, ягъни $DM=MC$ һәм $BN=NA$.

OCM һәм OAN өчпочмаклары турыпочмаклы, аларның $OC=OA=25$ см, $CM=20$ см, $AN=15$ см. ON һәм OM ны Пифагор теоремасы буенча табабыз (Т. 1. 26) : $ON=\sqrt{25^2-15^2}=20$ см, $OM=\sqrt{25^2-20^2}=15$ см.

$$MN=ON-OM, \text{ ягъни } MN=5 \text{ см.}$$

20. Өчпочмакка камаулы әйләнәләр һәм өчпочмакны камаучы әйләнәләр. Әгәр әйләнә өчпочмакның барлык түбәләре аша узса, ул *өчпочмакны камаучы* әйләнә дип атала.

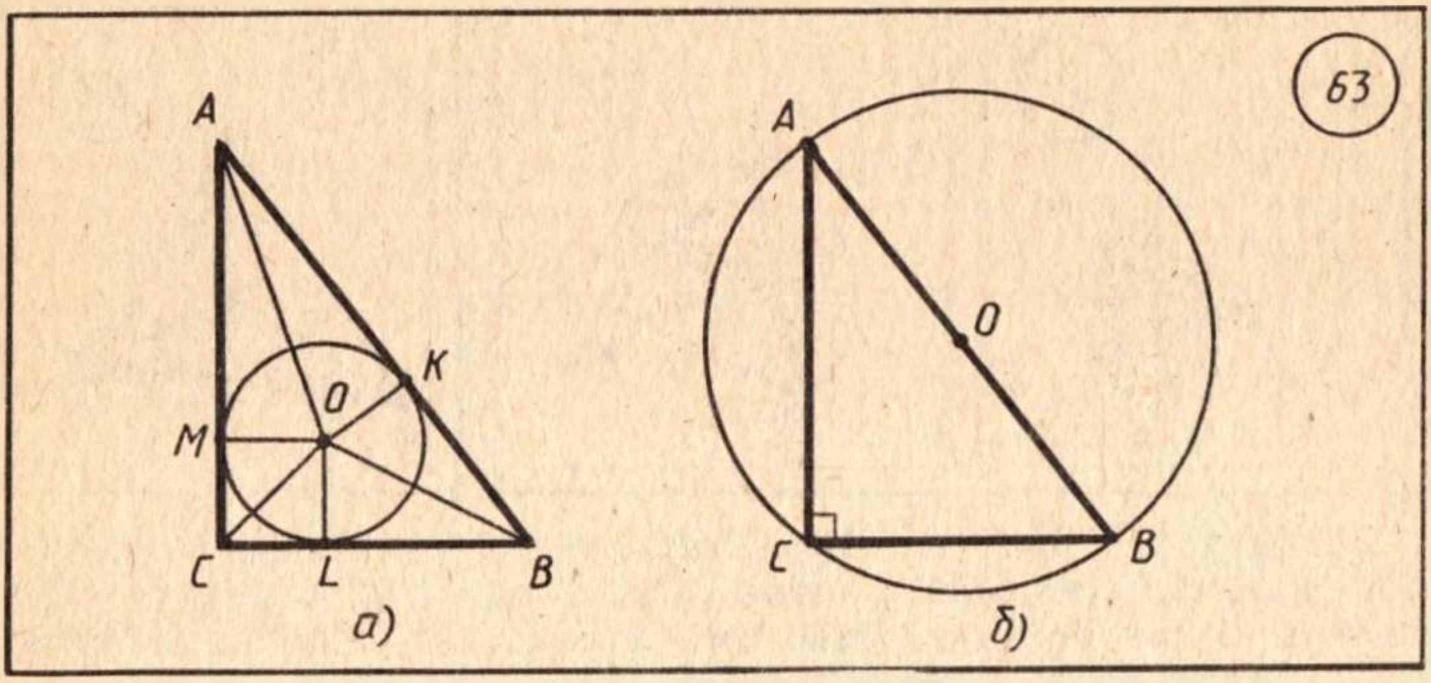
Т. 1. 27. **Өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге өчпочмак якларына үткәрелгән урта перпендикулярларның кисешү ноктасы була.**

61 нче рәсемдә әйләнә ABC өчпочмагын камый. Бу әйләнәнең O үзәге AB, BC һәм CA якларына үткәрелгән тиңдәшле OM, ON һәм OK урта перпендикулярларының кисешү ноктасы.

Әгәр әйләнә өчпочмакның барлык якларына орынса, ул өчпочмакка *камаулы* әйләнә дип атала.

Т. 1. 28. **Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге шул өчпочмакның биссектрисалары кисешкән ноктасында була.**

62 нче рәсемдә әйләнә ABC өчпочмагына камаулы. Бу әйләнәнең үзәге O өчпочмак почмакларының тиңдәшле AO, BO һәм CO биссектрисаларының кисешү ноктасы була.



а) б)

Мисал. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 12 һәм 16 см га тигез. 1) Өчпочмакка камаулы әйләнәнең; 2) өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусларын исәпләргә.

Чишү. ABC өчпочмагы бирелгән булсын, биредә $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см, O — камаулы әйләнәнең үзәге (63 нче *а* рәсем). ABC өчпочмагының периметры икеләтелгән гипотенуза белән өчпочмакка камаулы әйләнә диаметрының суммасына тигез (әйләнәгә орынма билгеләмәсен һәм гипотенуза һәм катет буенча турыпочмаклы өчпочмаклар AOM һәм AOK, MOC һәм LOC тигезлеген кулланыгыз).

Шулай итеп, $AB + BC + AC = 2AB + 2r$, моннан $2r = AB + BC + AC - 2AB = BC + AC - AB$.

Пифагор теоремасы буенча $AB = 20$ см (Т. 1. 26), $2r = 8$ см, ягъни $r = 4$ см.

2) Турыпочмаклы өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге гипотенузаның уртасы белән тәңгәл килә, моннан камаучы әйләнәнең радиусы $R = 10$ см (63 нче рәсем, *б*).

§ 3. Яссылыкта геометрик төзүләр

21. Сызым инструментлары. Геометриядә һәрвакыт сызым инструментлары ярдәмендә геометрик фигураларны төзүгә мәсьәләләр чишәргә туры килә.

Кайбер очракларда мәсьәләнең үзендә төзү барышында нинди сызым инструментлары кулланырга мөмкин икәне әйтелгән була. Болар әйтелмәгән очракта, төзү өчен кирәкле инструментларны үзеңә сайлап алырга мөмкин.

Геометриянең мәктәп курсында без линейка (бер яклы), циркуль, почмаклык, транспортир кебек сызым инструментлары кулланабыз.

Инструментлар җыелмасына бәйле буларак, төзүгә төрле типтагы мәсьәләләр була: циркуль һәм линейка белән төзүләр; циркуль белән генә төзүләр (Мор-Маскерони төзүләре); линейка белән генә төзүләр, әгәр яссылыкта әйләнә һәм аның үзәге төзелгән булса (Штейнер төзүләре); почмаклык ярдәмендә; транспортир ярдәмендә һ. б. ш.

Линейка ярдәмендә: а) иректе турының; б) бирелгән нокта аша узучы турының; в) бирелгән ике нокта аша узучы турының сурәтен (кисемтә рәвешендә) сызарга мөмкин. Линейка ярдәмендә, хәтта анда бүлемнәр булса да, кисемтәләр салып булмый, линейканың ике кырыен да кулланып булмый.

Циркуль ярдәмендә: а) үзәге бирелгән ноктада булган бирелгән радиуслы әйләнә төзергә; б) бирелгән ноктадан бирелгән турыда бирелгән кисемтә салырга мөмкин.

Почмаклык ярдәмендә линейка белән төзергә мөмкин булган төзүләр үтәргә була; моннан тыш, почмаклыкның бер ягын бирелгән туры белән тәңгәл китерергә һәм почмакның икенче ягыннан туры үткәрергә мөмкин. Почмаклык ярдәмендә шулай ук туры почмак үткәрергә мөмкин. 11 нче пунктта (26 нчы рәсем) ничек итеп почмаклык һәм линейка ярдәмендә параллель турылар үткәрергә мөмкин икәне сөйләнде.

Транспортир ярдәмендә түбәсе бирелгән ноктада булган бирелгән туры белән ниндидер бирелгән почмак хасил итүче нурда нокта төзергә мөмкин. 16 нчы рәсемдә (п. 8) ничек итеп транспортир ярдәмендә өске ярымъяссылыкка ярымтурыдан градуслы үлчәме бирелгән почмак салырга мөмкин икәне күрсәтелгән.

Геометриядә, кагыйдә буларак, циркуль һәм линейка ярдәмендә үтәлә торган төзүләр тәгәл дип санала.

Циркуль һәм линейка ярдәмендә үтәп булмый торган төзүгә мәсьәләләр барлыгы билгеле.

1) Почмакның трисекциясе турындагы мәсьәлә. α почмагы бирелгән. $\frac{1}{3}\alpha$ почмагын төзергә.

2) Кубны икеләтү турындагы мәсьәлә. Куб бирелгән (ягъни кубның кабыргасына тигез булган кисемтә бирелгән). Күләме бирелгән кубның күләменнән ике тапкырга зур булган куб төзергә (ягъни шундый кубның кабыргасын төзергә).

3) Әйләнәнең квадратурасы турындагы мәсьәлә. Әйләнә бирелгән. Бу әйләнәгә тигез зурлыктагы квадрат төзергә.

Бу мәсьәләләрнең чишелмәслегенең исбатланышы тирән математик белемнәр сорый. «Яссылыкта Декарт координаталары» бүлеге сезне геометрик мәсьәләләрне чишүдә аналитик метод белән таныштыра, бу вакытта мәсьәлә формулалар теленә тәрҗемә ителә. Әгәр без төзергә теләгән геометрик фигура рациональ функцияләр һәм квадрат тамырны чыгару гамәлен генә эченә алган формула белән аңлатыла алса, ул вакытта бу объектны циркуль һәм линейка ярдәмендә төзергә мөмкин.

22. Төзүгә иң гади мәсьәләләр. Хәзер каралачак барлык мәсьәләләрдә ике сызым инструменты — линейка һәм циркуль гына кулланырга мөмкин.

Мәктәп курсы геометриясендә төзүгә мәсьәләләр чишкәндә, иң элек төзүне ничек үтәргә икәнен белергә, шуннан соң гына төзергә кирәк. Моннан тыш, тәкъдим ителгән төзү таләп ителгән үзлекләре белән фигураны төзүгә китерүен исбатлый белү мөһим.

Төзүгә иң гади мәсьәләләр карыйк.

1 нче мәсьәлә. *Бирелгән яклары: a, b, c буенча өчпочмак төзергә.*

64 нче рәсемдә ABC өчпочмагын төзү болай үтәлә: линейка ярдәмендә туры үткәрәләр, циркуль белән өч әйләнә сызалар: үзәге B ноктасында булган $BC = a$ һәм $BA = c$ радиуслары белән, үзәге C ноктасында булган $CA = b$ радиусы белән.

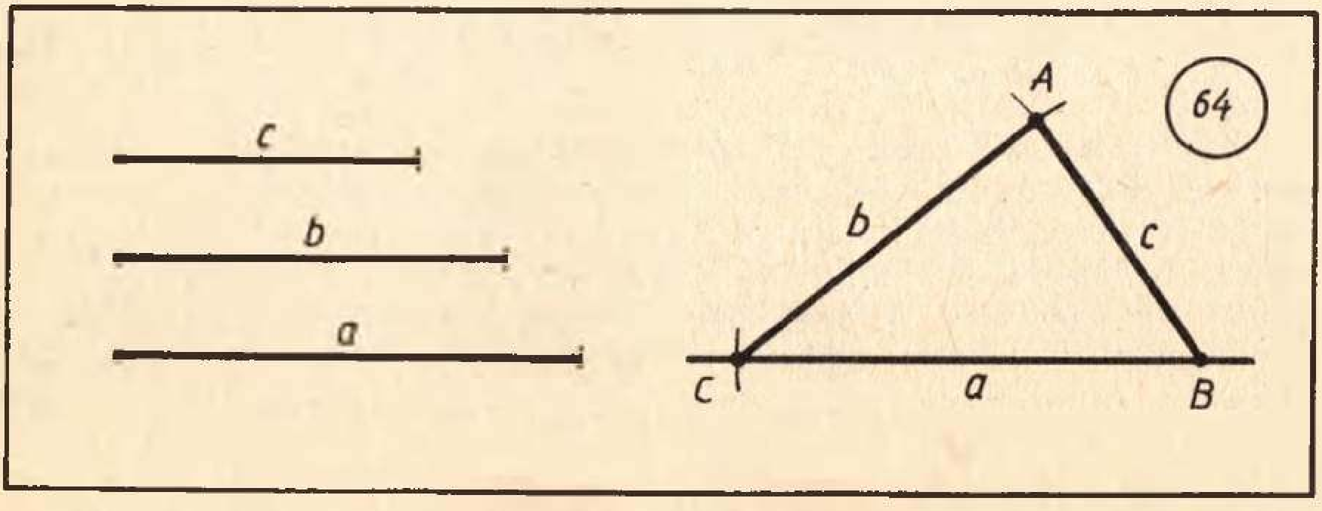
Бу мәсьәләнең чишелеше һәрвакытта да булмаска мөмкин. Өчпочмакның a, b, c яклары өчен түбәндәге шартлар үтәлергә тиеш:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b \text{ (п. 15 не кара).}$$

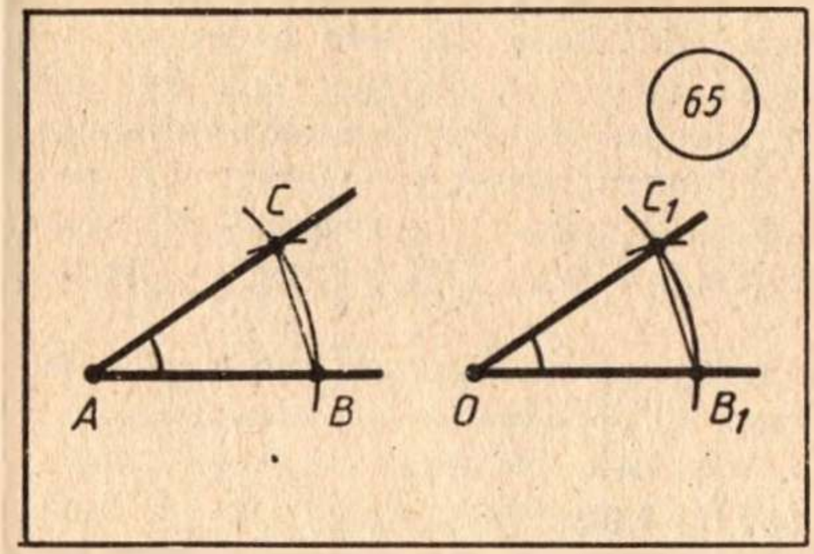
2 нче мәсьәлә. *Бирелгән почмакка тигез почмак төзергә.*

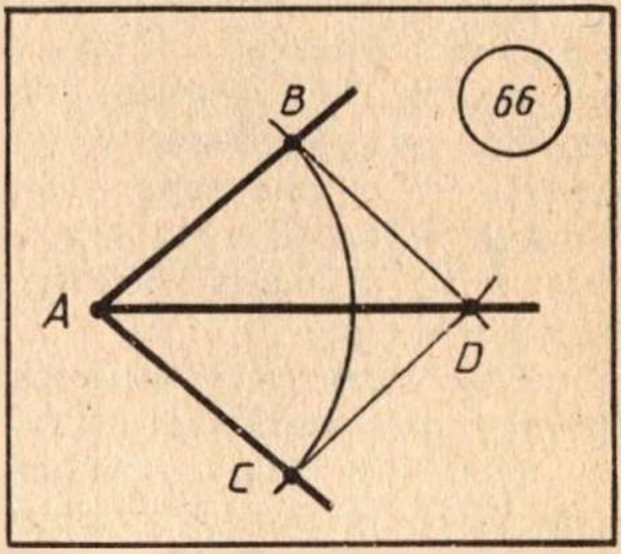
$\mathrm{A} - \mathrm{IV}_2$ аксиомасына (п. 8 не кара) нигезләнеп бирелгән ярымъяссылыкка бирелгән ярымтурыдан бирелгән почмакка тигез булган почмак салырга мөмкин. Циркуль һәм линейка ярдәмендә моны ничек эшләргә?

65 нче рәсемдә төзү болай үтәлгән: $\angle A$ — бирелгән почмак, OB_1 — бирелгән ярымтуры. Үзәкләре A һәм O ноктасында булган ирекле бертигез радиуслы ике әйләнә һәм үзәге B ноктасында булган BC радиуслы әйләнә үткәрәбез. Өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча $\triangle BAC = \triangle B_1OC_1$ (Т. 1. 17), моннан $\angle A = \angle O$.



64





3 нче мәсьәлә. *Бирелгән почмакның биссектрисасын төзергә.*

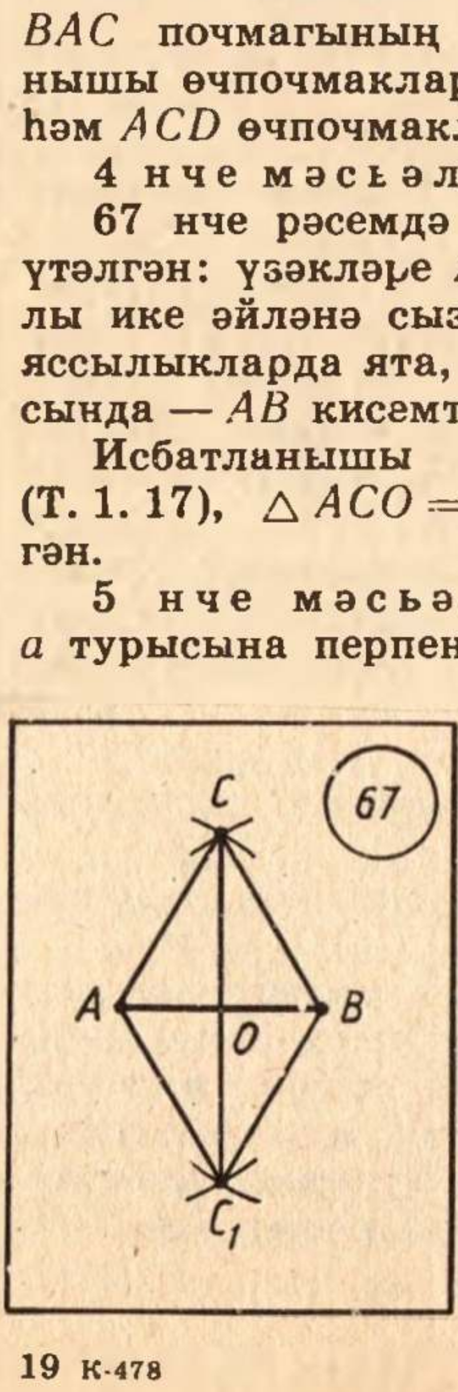
66 нчы рәсемдә бирелгән почмак BAC ның AD биссектрисасы болай төзелгән: үзәкләре A, B һәм C нокталарында булган бер үк ирекле радиус белән өч әйләнә сызалар. Үзәкләре B һәм C нокталарында булган әйләнәләрнең кисешү ноктасы D ны A ноктасы белән тоташтырабыз. AD ярымтурысы — BAC почмагының биссектрисасы. Әлеге фактның исбатланышы өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча ABD һәм ACD өчпочмакларының тигезлегенә нигезләнгән (Т. 1. 17).

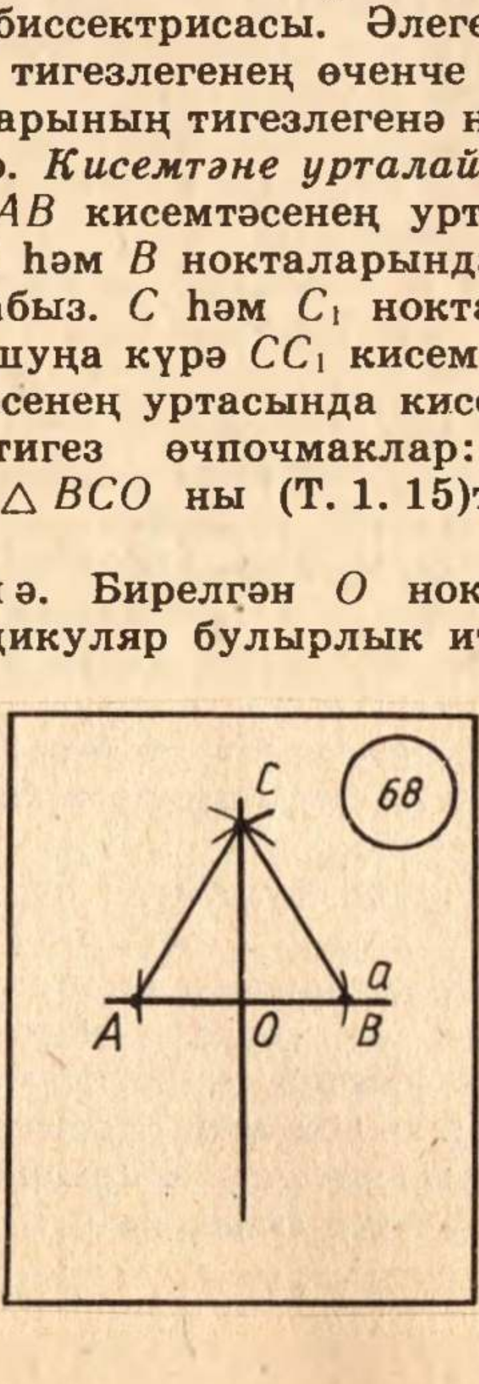
4 нче мәсьәлә. *Кисемтәне урталай бүләргә.*

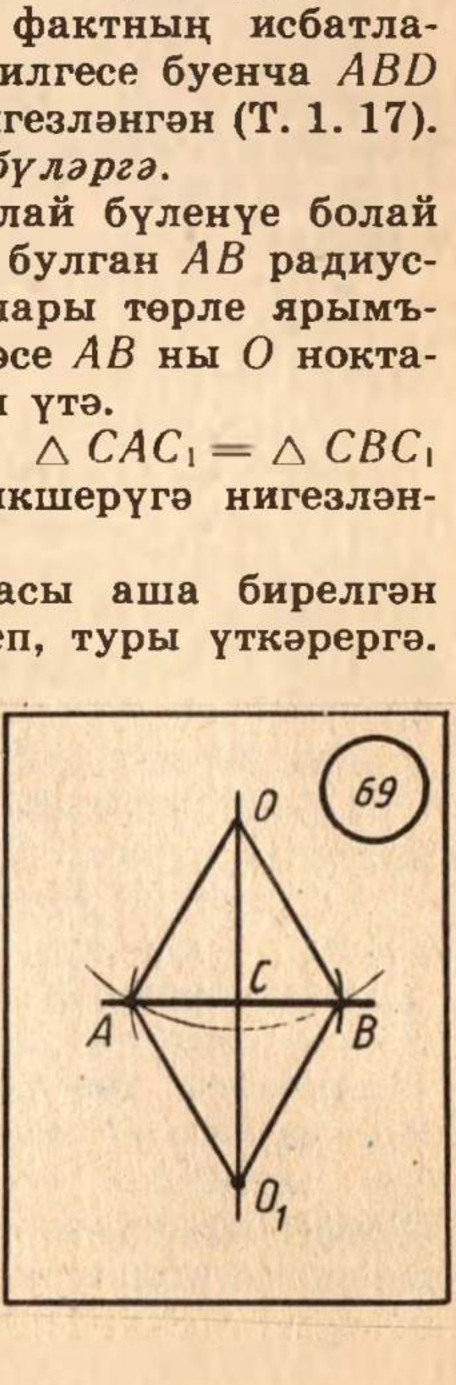
67 нче рәсемдә AB кисемтәсенең урталай бүленүе болай үтәлгән: үзәкләре A һәм B нокталарында булган AB радиуслы ике әйләнә сызабыз. C һәм C_1 нокталары төрле ярымъяссылыкларда ята, шуңа күрә CC_1 кисемтәсе AB ны O ноктасында — AB кисемтәсенең уртасында кисеп үтә.

Исбатланышы тигез өчпочмаклар: $\triangle CAC_1 = \triangle CBC_1$ (Т. 1. 17), $\triangle ACO = \triangle BCO$ ны (Т. 1. 15)тикшерүгә нигезләнгән.

5 нче мәсьәлә. Бирелгән O ноктасы аша бирелгән a турысына перпендикуляр булырлык итеп, туры үткәрергә.







Ике очрак булуы мөмкин:

1) O ноктасы a турысында ята. Төзү 68 нче рәсемдә сурәтләнгән. Өч әйләнә сызабыз: үзәге O ноктасында булган ирекле радиус белән (ул a турысын A һәм B нокталарында кисеп үтә), үзәкләре A һәм B нокталарында булган AB радиусы белән. Соңгы ике әйләнәнең кисешү ноктасы — C ноктасын O ноктасы белән тоташтырабыз. OC турысы — эзләнелгән туры.

ACO һәм BCO өчпочмаклары тигезлегеннән турыларның перпендикулярлыгы килеп чыга (Т. 1. 17).

2) O ноктасы a турысында ятмый. 69 нчы рәсемдә сурәтләнгән төзү болай үтәлгән: өч әйләнә төзиләр: үзәге O ноктасында булган ирекле радиус белән, A һәм B — бу әйләнәнең a турысы белән кисешү нокталары; үзәге A һәм B нокталарында булган шул ук радиус белән O_1 — аларның кисешү ноктасы, ул O ноктасы яткан ярымъяссылыкта ятмый. OO_1 турысы — эзләнелгән перпендикуляр.

Исбатлауны түбәндәгечә үткәрәбез:

1) $\triangle AOB = \triangle AO_1B$ (Т. 1. 17), моннан $\angle OAC = \angle O_1AC$.

2) $\triangle AOC = \triangle AO_1C$ (Т. 1. 15), моннан $\angle ACO = \angle ACO_1$.

3) $\angle ACO$ һәм $\angle ACO_1$ — чиктәш почмаклар, алар тигез булганга күрә, бу почмаклар туры. Димәк, OC — O ноктасыннан a турысына төшерелгән перпендикуляр.

Әле карап үткән мәсьәләләр төзүгә карата авыррак мәсьәләләр чишкәндә файдаланылалар.

Мисал. Бирелгән R радиусы, бирелгән a турысына орынучы һәм бу турыда ятмаган бирелгән M ноктасы аша узучы әйләнә төзергә.

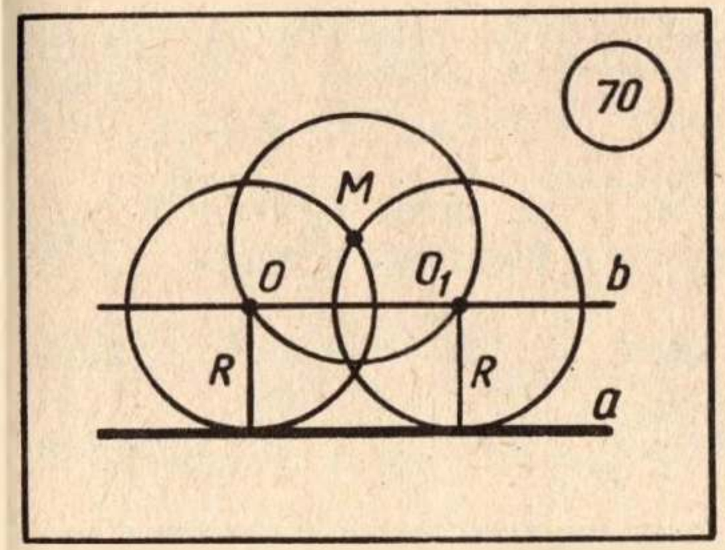
Чишү. Мәсьәлә чишелгән һәм үзәге O ноктасында булган бирелгән R радиуслы, a турысына орынучы һәм M ноктасы аша узучы әйләнә төзелгән дип фараз итик (70 нче рәсем). Аның үзәге a турысыннан R ераклыгында урнашкан a га параллель b турысында ята, ә O ноктасы — үзәге M ноктасында булган шул ук радиуслы әйләнә белән b турысының кисешү ноктасы.

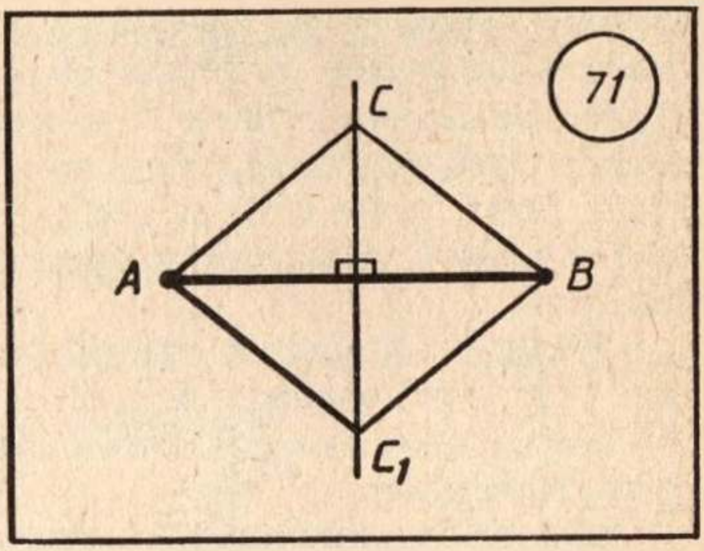
Төзүне шундый эзлеклелектә үтибез:

1) a турысыннан R ераклыгында урнашкан a га параллель булган b турысы үткәрәбез.

2) үзәге M ноктасында булган R радиуслы әйләнә үткәрәбез.

b ноктасының һәм үткәрелгән әйләнәнең кисешү ноктасы O — эзләнелгән әйләнәнең үзәге. Исбатланышы үзеннән-үзе аңлашыла: төзелгән әйләнә a турысына орына, радиусы R була һәм M ноктасы аша уза. Мәсьәләнең ике чишелеше, бер чишелеше булуы яки чишелешләре булмавы мөмкин. (Төрле очракларын үзегез тикшерегез. 70 нче рәсемдә ике чишелеше китерелгән).


70


71

23. Яссылыкта нокталарның геометрик урыны. Яссылыкның билгеле бер үзлеккә ия булган барлык нокталарыннан торучы фигура *яссылыктагы нокталарның геометрик урыны* дип атала.

Т. 1. 29. Бирелгән ике ноктадан тигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны бу нокталарны тоташтыручы кисемтәнең урта перпендикуляры була.

71 нче рәсемдә AB кисемтәсенә CC_1 урта перпендикуляры үткәрелгән. Т. 1. 29 раславы буенча а) CC_1 турысының һәр ноктасы A һәм B дан тигез ераклашкан; б) A һәм B нокталарыннан бертигез ераклашкан яссылыкның һәр ноктасы CC_1 турысында ята.

Түбәндә яссылыктагы нокталарның берничә геометрик урыны санап үтелгән.

1. Бирелгән ноктадан бирелгән ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны үзәге шул ноктада һәм радиусы бирелгән ераклыкка тигез булган әйләнә була.

2. Бирелгән турыдан бирелгән ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны һәркайсы бирелгән турыга параллель һәм аннан бирелгән ераклыкта яткан ике турыдан тора.

3. Кисешүче ике турыдан бертигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны бирелгән турылар кисешкәндә килеп чыккан барлык почмакларның биссектрисалары яткан ике турыдан тора.

4. Нокталарның геометрик урыны AB кисемтәсе бу нокталарның геометрик урыныннан бирелгән α почмагы белән күренгән һәм AB турысыннан бер якта ятучы, очлары A һәм B нокталары булган әйләнә дугасы була.

Төзүгә мәсьәләләр чишкәндә кулланыла торган геометрик урыннар методы түбәндәгегә нигезләнгән.

Безгә ике шартны канәгатьләндергән X ноктасын төзергә кирәк булсын ди. Беренче шартны канәгатьләндергән нокталарның геометрик урыны — F_1 фигурасы, ә икенче шартны канәгатьләндергән нокталарның геометрик урыны F_2 фигурасы була. Эзләнелә торган X ноктасы F_1 һәм F_2 неке, ягъни аларның уртак ноктасы була.

1 нче мисал. p периметры, β га тигез булган B почмагы һәм A түбәсеннән төшерелгән h биеклеге буенча $\triangle ABC$ төзергә.

Чишү. Мәсьәлә чишелгән һәм $\triangle ABC$ төзелгән булсын ди (72 нче рәсем). BC турысында $DB = AB$ һәм $CE = AC$ кисемтәләрен салып, тигезьянлы ABD һәм ACE өчпочмакларын табарбыз.

Югарыда китерелгән фикерләүләрдән чыгып төзүне түбәндәге эзлеклелектә башкарырга була:

1) Туры үткәрәбез һәм анда $DE = p$ кисемтәсе салабыз.

2) DE турысыннан h ераклыгында DE турысына параллель итеп l турысы үткәрәбез.

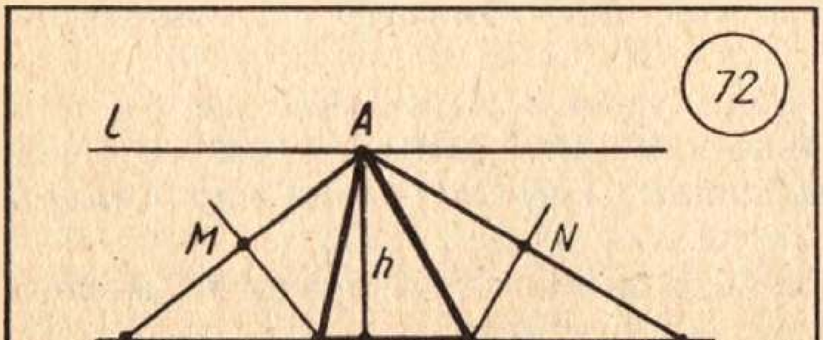
3) Түбәсе D ноктасында һәм $\frac{\beta}{2}$ гә тигез булган ADE почмагын төзибез. A ноктасы — эзләнелә торган өчпочмак түбәләренең берсе.

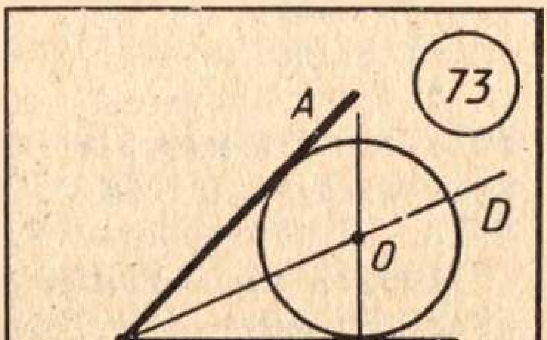
4) AD һәм AE кисемтәләренә урта перпендикуляр үткәрәбез. Бу урта перпендикулярларның DE турысы белән кисешү нокталары — B һәм C — эзләнелә торган өчпочмакның башка ике түбәсе була.

$\triangle ABC$ ның эзләнелә торган өчпочмак икәнен түбәндәгечә исбатлыйбыз: бу өчпочмакның биеклеге төзү буенча h ка тигез, $\angle ABC = 2\angle ADB = \beta$ ($\triangle ABD$ тигезьянлы, $\angle ABC$ — әлеге өчпочмакның тышкы почмагы, Т. 1. 22 не кара), төзү буенча $AB + BC + CA = p$.

2 нче мисал. Бирелгән почмакның якларына (якларның берсенә бирелгән K ноктасында) орынучы әйләнә төзергә.

Чишү. Мәсьәлә чишелгән булсын һәм O үзәкле әйләнә эзләнелә торган әйләнә булсын. Әйләнәнең үзәге — O ноктасы, бер яктан караганда, бирелгән почмакның BO биссектрисасында, ә икенче яктан — бирелгән K ноктасыннан BC





турысына үткәрелгән KO перпендикулярында ята (73 нче рәсем).

Төзү тәртибе болай:

1) Бирелгән ABC почмагының BO биссектрисасын үткәрәбез.

2) K ноктасыннан ABC почмагының BC ягына KL перпендикулярын үткәрәбез.

3) KL һәм BO ның кисешү ноктасы O ны үзәк итеп алып, OK га тигез радиус белән әйләнә үткәрәбез.

Эзләнелә торган әйләнә төзелде.

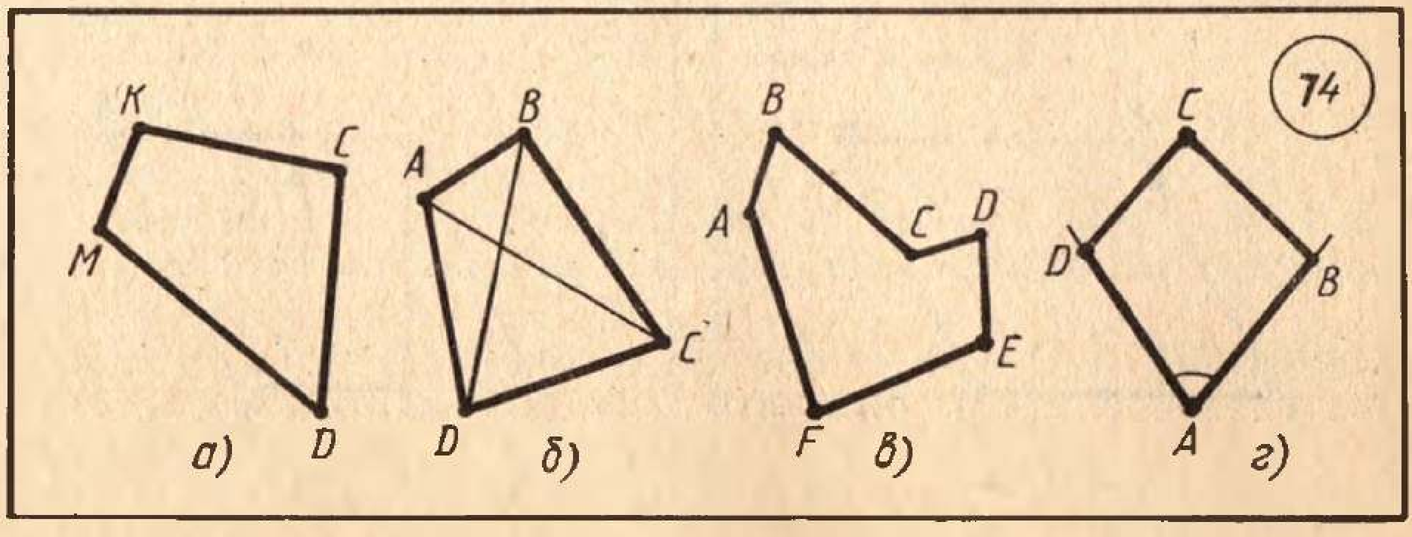
§ 4. Дүртпочмаклар

24. Кабарынкы дүртпочмаклар. Дүрт ноктадан һәм аларны эзлекле тоташтыручы дүрт кисемтәдән торган фигура *дүртпочмак* дип атала. Монда бирелгән нокталарның теләсә кайсы өчесе бер турыда ятмаска һәм аларны тоташтыручы кисемтәләр кисешмәскә тиеш. Бирелгән нокталар — дүртпочмакның *түбәләре*, ә аларны тоташтыручы кисемтәләр дүртпочмакның *яклары* дип атала.

Дүртпочмак үзенең түбәләре белән тамгалана. Мәсәлән, 74,*а* рәсемендә $MKCD$ дүртпочмагы сурәтләнгән.

Дүртпочмакта бер ягының очлары булып торган түбәләре *күрше түбәләр* дип атала. Күрше булмаган түбәләр *каршы ятучы түбәләр* дип атала. Каршы ятучы түбәләрне тоташтыручы кисемтәләр *диагональләр* дип атала. 74, *б* рәсемендәге $ABCD$ дүртпочмагының A һәм B түбәләре — күрше түбәләр, ә B һәм D түбәләре каршы ятучы түбәләр була; AC һәм BD кисемтәләре диагональләре булып тора.

Дүртпочмакның бер түбәдән чыгучы яклары *күрше яклар* дип атала. Уртак очлары булмаган яклар *каршы ятучы яклар* дип атала. 74, *б* рәсемендәге $ABCD$ дүртпочмагында AB һәм DC, BC һәм AD яклары — каршы ятучы яклар, ә AB һәм AD яклары күрше яклар булып торалар.


74

Әгәр дүртпочмак аның теләсә кайсы ягын эченә алган турыга карата бер ярымъяссылыкта урнашса, ул дүртпочмак (теләсә нинди башка күппочмак кебек үк) *кабарынкы* дип атала. Бу вакытта туры үзе ярымъяссылыкныкы дип исәпләнә. 74, *а* һәм 74, *б* рәсемнәрендәге дүртпочмаклар кабарынкы, ә 74, *в* рәсемендәге дүртпочмак кабарынкы түгел.

Алга таба без кабарынкы дүртпочмакларны гына карарбыз. AB һәм AD ярымтурылары белән төзелгән почмак $ABCD$ кабарынкы дүртпочмагының A түбәсе янындагы *почмагы* дип атала. 74, *г* рәсемендә $\angle BAD$ — кабарынкы дүртпочмак почмагы.

25. Параллелограмм. *Параллелограмм* — каршы ятучы яклары параллель булган, ягъни параллель турыларда яткан дүртпочмак ул. 75 нче рәсемдә сурәтләнгән $ABCD$ дүртпочмагы — параллелограмм, аның $AB \parallel DC$ һәм $BC \parallel AD$. Параллелограммның түбәндәге *билгесен исбатларга* мөмкин:

Т. 1. 30. Әгәр дүртпочмакның диагональләре кисешсәләр һәм кисешү ноктасында урталай бүленсәләр, бирелгән дүртпочмак параллелограмм була.

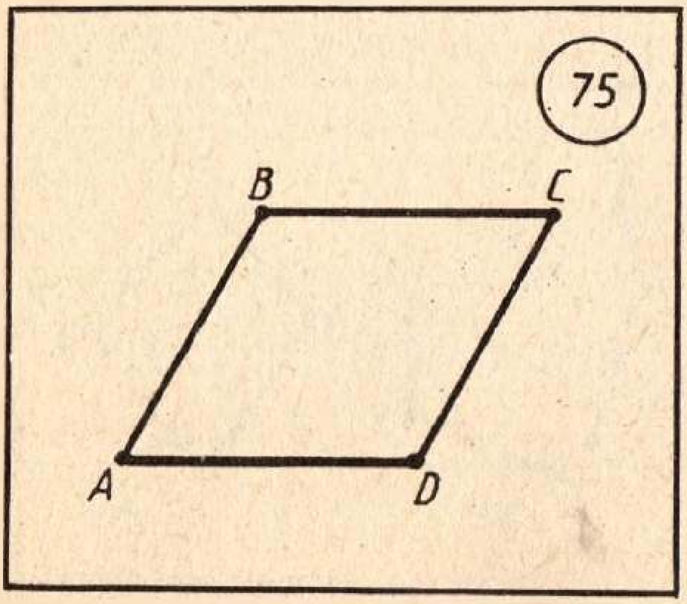
Кире теореманы әйтик.

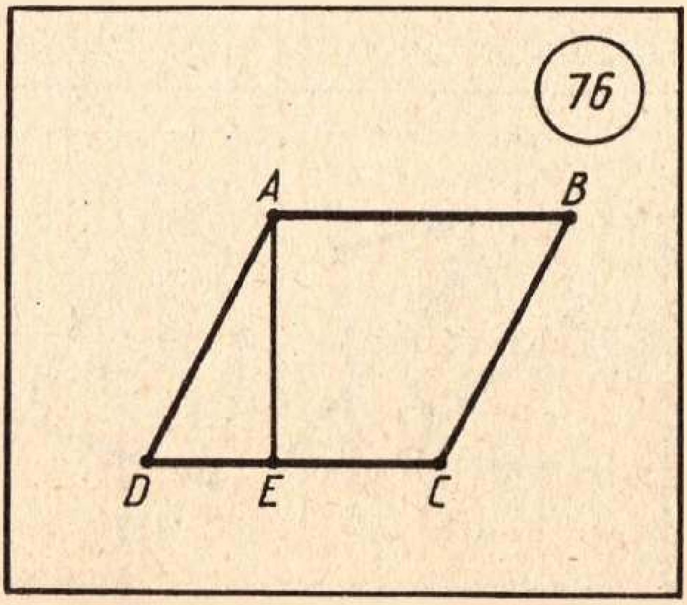
Т. 1. 31. Параллелограммның диагональләре кисешә һәм кисешү ноктасында урталай бүленә.

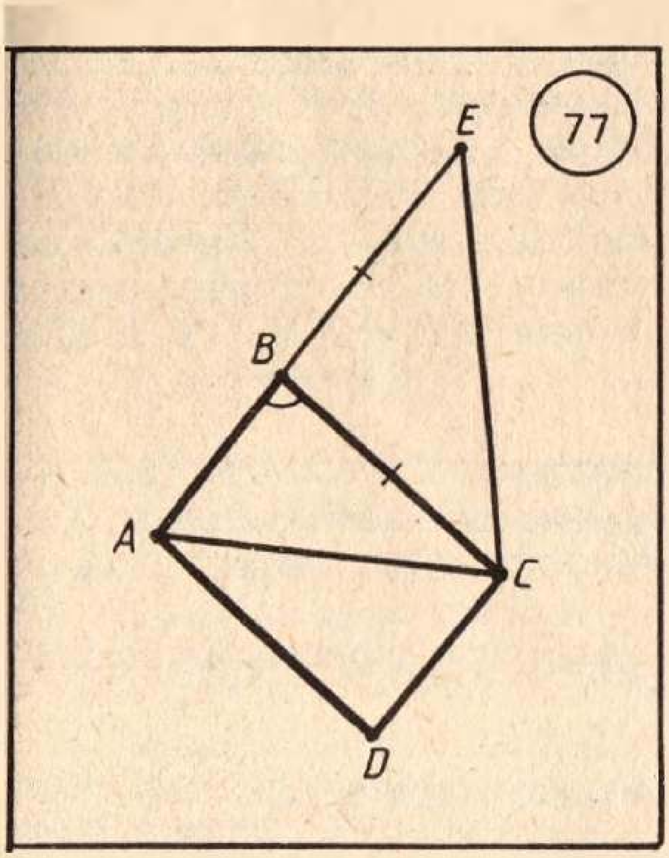
Түбәндәге теорема параллелограммның тагын бер үзлеген әйтеп бирә.

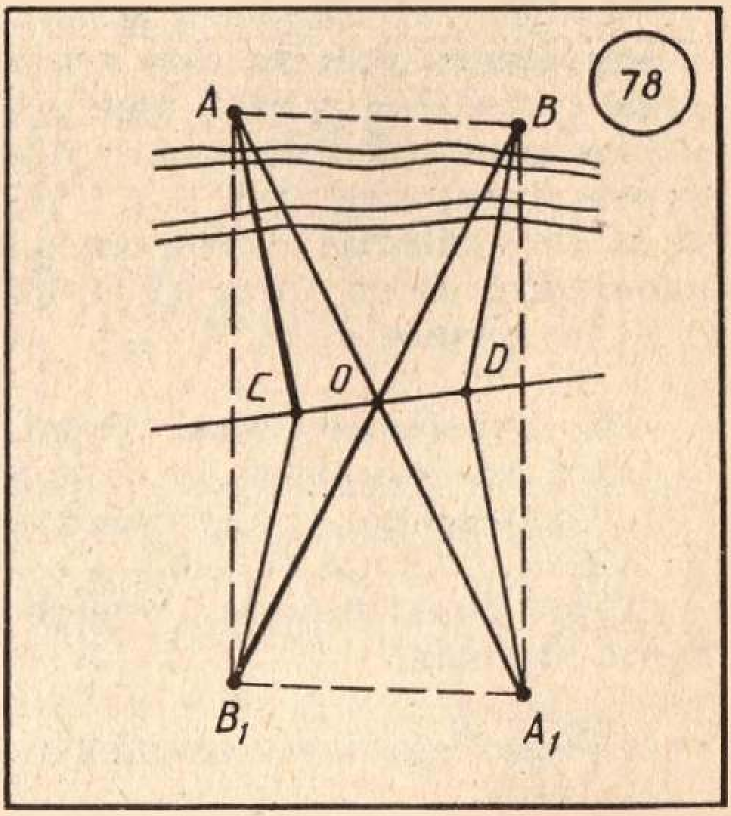
Т. 1. 32. Параллелограммның каршы ятучы яклары тигез, каршы ятучы почмаклары тигез.

$ABCD$ — параллелограмм булсын. A түбәсеннән CD турысына AE перпендикуляры төшерелгән (76 нчы рәсем). AE ки-









семтәсе AB һәм CD якларына карата параллелограммның *биеклеге* дип атала.

1 нче мисал. Параллелограммның периметры 122 см га тигез. Аның бер ягы икенчесеннән 25 см га зуррак. Параллелограммның якларын табарга.

Чишү. 1.32 теоремасы буенча параллелограммның каршы ятучы яклары тигез. Параллелограммның бер ягын x, икенчесен y дип билгелик. Ул вакытта шарт буенча

$$\begin{cases} 2x+2y=122, \\ x-y=25. \end{cases}$$

Бу системаны чишеп, $x=43$, $y=18$ не табабыз. Шулай итеп, параллелограммның яклары 18, 43, 18 һәм 43 см га тигез.

2 нче мисал. Периметры, диагонале һәм аңа каршы ятучы почмагы буенча параллелограмм төзергә.

Чишү. Мәсьәлә чишелгән һәм $ABCD$ параллелограммы төзелгән дип фараз итик (77 нче рәсем). AB ны дәвам итеп һәм аңа $BE=BC$ ны салып, $\triangle ACE$ ны табабыз, биредә $\angle E=\frac{1}{2}\angle ABC$, чөнки $\triangle BCE$ тигезьянлы, ә $\angle B$ — аның тышкы почмагы. Мәсьәләнең чишелеше AC ягы, E почмагы һәм параллелограммның ярымпериметрына тигез булган AE ягы буенча ACE өчпочмагын төзүгә кайтып кала. Аннары ABC өчпочмагын төзибез һәм аны параллелограммга кадәр җиткерәбез.

3 нче мисал. Параллелограмм үзлеген (Т. 1. 30) файдаланып, янына якын килерлек булмаган A һәм B нокталары арасындагы ераклыкны табарга.

Чишү. CD базисын маяклыйбыз (78 нче рәсем). O — CD кисемтәсенең уртасы. Бер ягы һәм янындагы ике почмагы буенча $\triangle A_1OD = \triangle AOC$ һәм $\triangle B_1OC = \triangle BOD$ төзибез. Өчпочмакларның тигезлегеннән: $AO = A_1O$ һәм $BO = B_1O$. ABA_1B_1 дүртпочмагының AA_1 һәм BB_1 диагональләре O ноктасында урталай бүленгәнлектән, килеп чыккан ABA_1B_1 дүртпочмагы параллелограмм була (Т. 1. 30), ягъни $AB = A_1B_1$ (Т. 1. 32). A_1B_1 не үлчисе кала.

26. Турыпочмаклык. Ромб. Квадрат. *Турыпочмаклык* — барлык почмаклары да туры булган параллелограмм ул. 79, *а* рәсемендә $ABCD$ турыпочмаклыгы сурәтләнгән ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$).

Турыпочмаклыкның үзлеге турындагы теореманы исбатларга мөмкин.

Т. 1. 33. Турыпочмаклыкның диагональләре тигез.

Ромб — барлык яклары тигез булган параллелограмм ул. 79, *б* рәсемендә $ABCD$ ромбы сурәтләнгән ($AB = BC = CD = AD$).

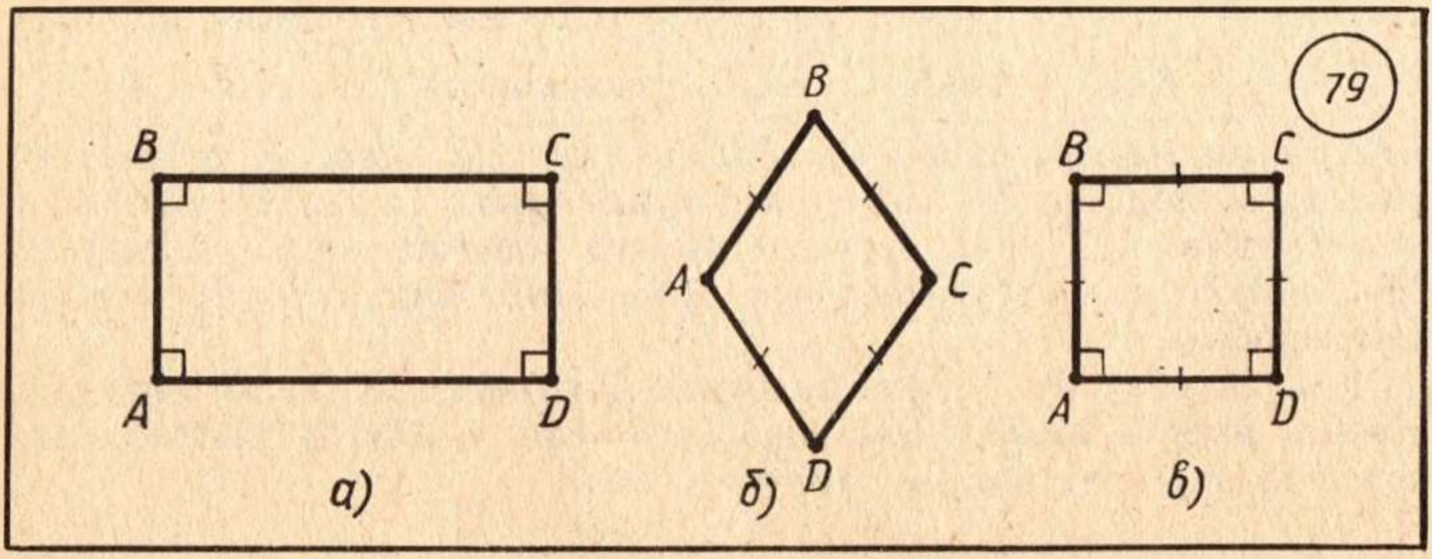
Ромбның үзлекләре турындагы теорема дөрес.

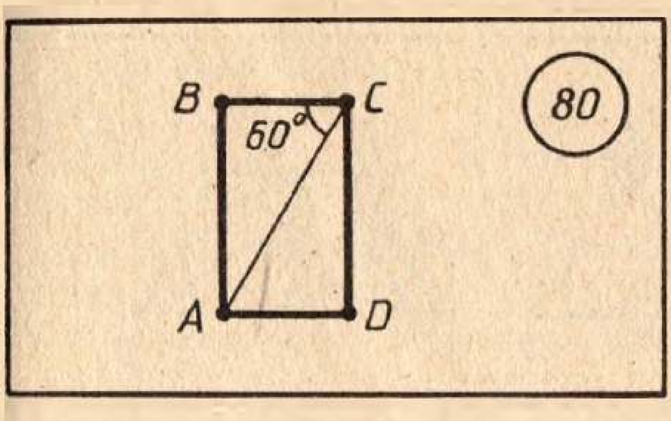
Т. 1. 34. Ромбның диагональләре туры почмак ясап кисешәләр. Ромбның диагональләре почмакларының биссектрисалары була.

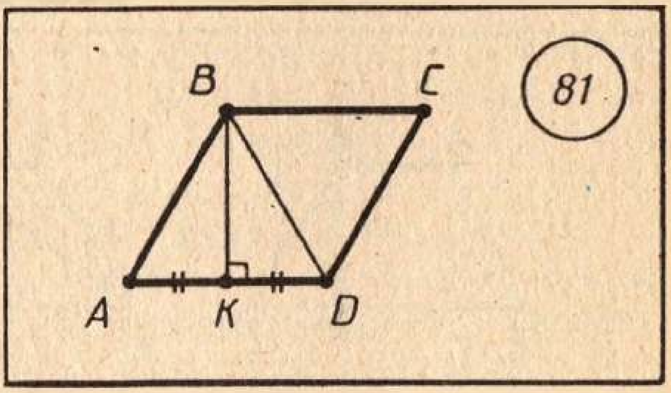
Квадрат — барлык яклары тигез булган турыпочмаклык ул.

79, *в* рәсемендә $ABCD$ квадраты сурәтләнгән. Квадрат ромб та ул, шуңа күрә турыпочмаклыкның һәм ромбның үзлекләренә ия.

1 нче мисал. Турыпочмаклыкның ягы 4 см га тигез һәм диагонале белән 60° лы почмак төзи. Шул диагональне табарга.







Чишү. ABC өчпочмагы турыпочмаклы, анда $BC=4$ см, ә $\angle BAC=30°$ (80 нче рәсем). Турыпочмаклы өчпочмакта 30° лы почмакка каршы яткан катет үзлеге буенча $BC=\frac{1}{2}AC$ (19 нчы пунктны кара). Шулай итеп, $AC=8$ см.

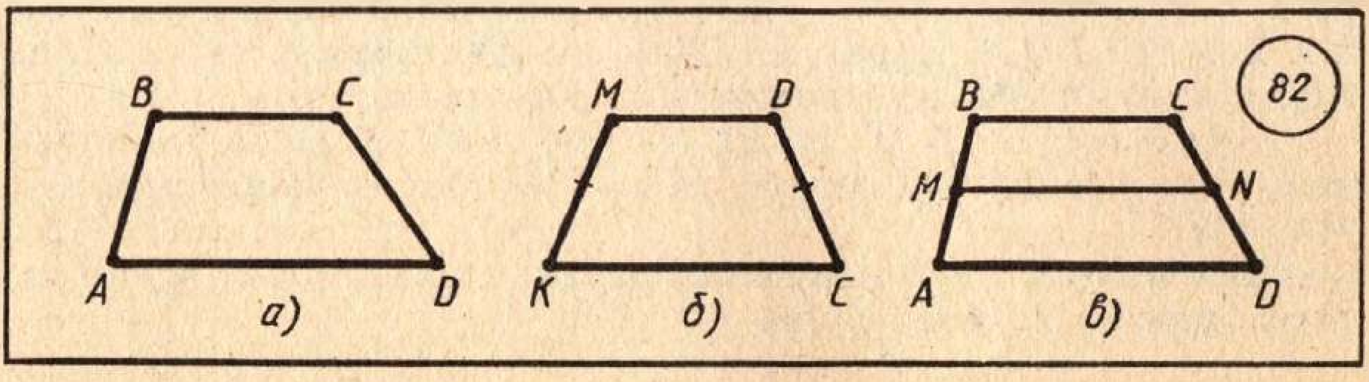
2 нче мисал. Җәенке почмак түбәсеннән төшерелгән перпендикулярның нигезе ромбның ягын урталай бүлсә, ромбның почмакларын табарга.

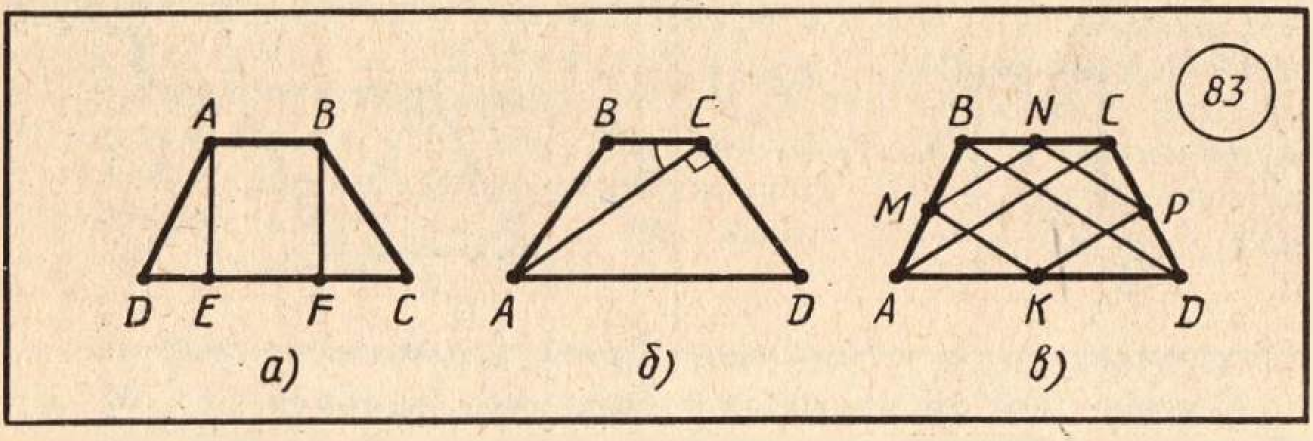
Чишү. ABD өчпочмагын карыйк (81 нче рәсем). Биредә ромбның яклары буларак $AB=AD$; шарт буенча аның биеклеге медиана да була. Шуңа күрә, нигезе AD булганда да $\triangle ABD$ тигезьянлы була. Димәк, $AB=BD$. Шулай итеп, $\triangle ABD$ тигезьяклы була, һәм, димәк, $\angle A=60°$. Шулай итеп, $ABCD$ ромбының почмакларын табарга була: $\angle A=\angle C=60°$, $\angle B=\angle D=120°$ (Т. 1. 32).

27. Трапеция. Каршы ятучы ике ягы гына параллель булган дүртпочмак *трапеция* дип атала. Бу параллель яклар трапециянең *нигезләре* дип атала. Калган ике ягы *ян яклары* дип атала.

82, *а* рәсемендә $ABCD$ трапециясе сурәтләнгән. BC һәм AD яклары — трапециянең нигезләре, AB һәм CD — трапециянең ян яклары. Ян яклары тигез булган трапеция тигезьянлы дип атала. $KMDC$ трапециясендә (82 нче рәсем, *б*) $KM=DC$, шулай булгач, бу трапеция тигезьянлы була.

Ян якларының урталарын тоташтыручы кисемтә трапециянең *урта сызыгы* дип атала. 82, *в* рәсемендә M кисемтәсе — $ABCD$ трапециясенең урта сызыгы.





Трапециянең урта сызыгы үзлеге турындагы теореманы әйтеп бирик.

Т. 1. 35. **Трапециянең урта сызыгы нигезләренә параллель һәм аларның ярымсуммасына тигез.**

83, *а* рәсемендә $ABCD$ трапециясе сурәтләнгән. A һәм B нокталарыннан CD турысына AE һәм BF перпендикуляры төшерелгән. AE һәм BF кисемтәләре AB һәм CD параллель турылары арасындагы ераклыкка тигез. Бу ераклык трапециянең *биеклеге* дип атала.

1 нче мисал. Тигезьянлы трапециядә диагональ аның ян ягына перпендикуляр һәм нигезе белән 15° лы почмак төзи. Трапециянең почмакларын табарга.

Чишү. Тигезьянлы трапециянең нигезе янындагы почмаклары тигез, ягъни $\angle ABC = \angle DCB$, $\angle BAD = \angle CDA$ (83 нче рәсем, *б*). $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 15° + 90° = 105°$, $\angle CDA = 180° - \angle BCD = 180° - 105° = 75°$. Шулай итеп, BC нигезе янындагы почмаклар 105 әр градуска тигез, ә AD нигезе янындагы почмаклар 75 әр градуска тигез.

2 нче мисал. Тигезьянлы трапеция якларының урталары ромб түбәләре булуын исбатларга.

Чишү. M, N, P һәм K нокталары — $ABCD$ тигезьянлы трапециянең AB, BC, CD һәм DA якларының урталары (83 нче рәсем, *в*). MN һәм KP кисемтәләре AC га параллель һәм ABC, ADC өчпочмакларының урта сызыклары буларак (Т. 1. 13) аның яртысына тигез булалар; моңа охшаш рәвештә MK һәм NP BD га параллель һәм аның яртысына тигез була. Шуңа күрә $MNPK$ дүртпочмагы — параллелограмм.

$\triangle ABD = \triangle DCA$ (Т. 1. 15), MK һәм PK — бу өчпочмакларның урта сызыклары, димәк, $MK = PK$. Моңа охшаш рәвештә $MN = NP$.

Шулай итеп, $MNPK$ параллелограммында барлык яклар да тигез, димәк, ул ромб була.

§ 5. Күппочмаклар

28. Сынык сызык. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нокталарыннан һәм аларны тоташтыручы $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ кисемтәләреннән торган фигура $A_1A_2 \ldots A_n$ *сынык сызыгы* дип атала. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нокталары сынык сызыкның *түбәләре* дип, ә A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ кисемтәләре *буыннары* дип атала. Әгәр сынык сызыкның үзкисешү нокталары булмаса, ул *гади сынык сызык* дип атала. 84 нче *а* рәсемендә гади сынык сызык күрсәтелгән. 84 нче *б* рәсемендәге сынык сызыкның үзкисешүе бар.

Сынык сызыкның очлары тәңгәл килсә, ул *йомык сынык сызык* дип атала. 85 нче рәсемдә йомык сынык сызык сурәтләнгән.

Буыннарының озынлыклары суммасы сынык сызыкның *озынлыгы* дип атала.

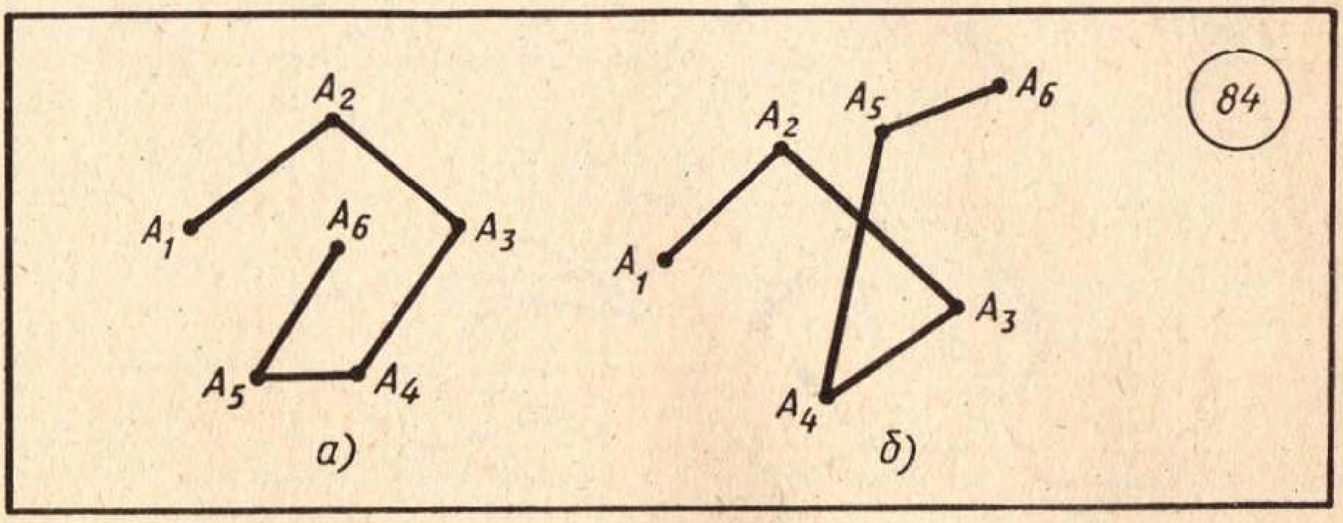
Т. 1. 36. Сынык сызыкның озынлыгы аның очларын тоташтыручы кисемтә озынлыгыннан кечкенә түгел.

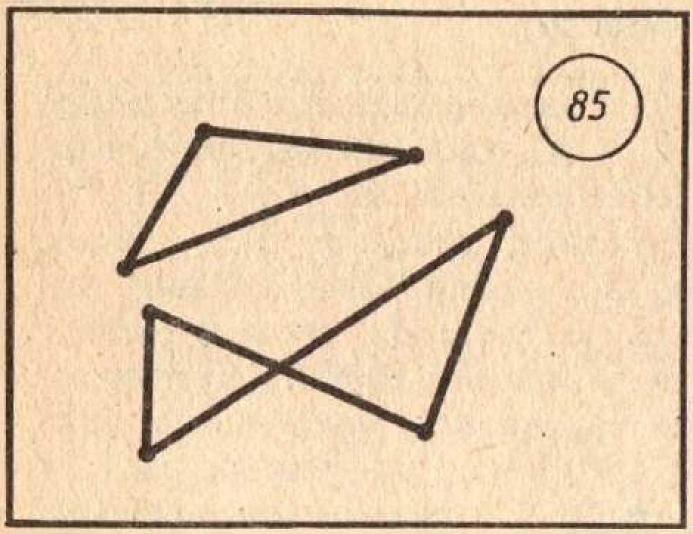
Мисал. $EFMO$ сынык сызыгының буыннары түбәндәгечә: $EF=1$ см, $FM=4$ см, $MO=2$ см. EO кисемтәсе: а) 0,5 см га; б) 8 см га тигез була аламы?

Чишү. 1. 36 теоремасыннан файдаланабыз. Бу теоремадан чыгып $EFMO$ сынык сызыгының озынлыгы аның очларын тоташтыручы EO кисемтәсенең озынлыгыннан кечерәк булырга тиеш түгел (86 нчы рәсем). $EFMO$ сынык сызыгының озынлыгы 7 см га тигез, һәм, димәк, EO кисемтәсе 7 см дан зур булырга тиеш түгел.

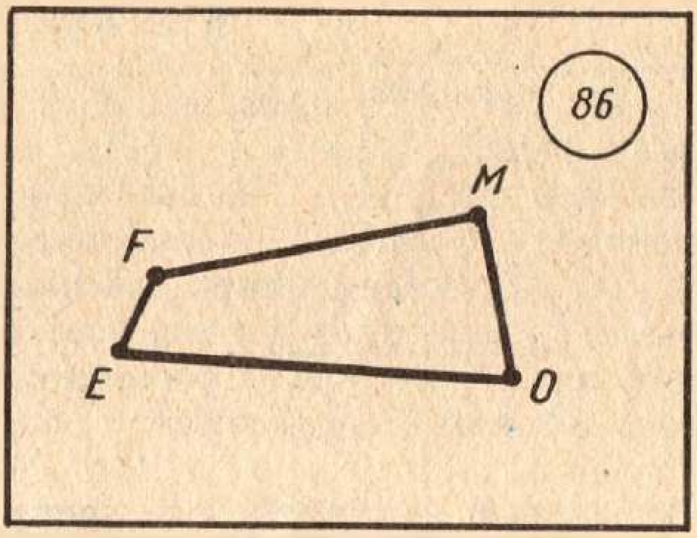
Шулай итеп, EO кисемтәсе 0,5 см га тигез була ала, ә 8 см га тигез була алмый.

29. Кабарынкы күппочмаклар. Гади йомык сынык сызыкның күрше буыннары бер турыда ятмасалар, ул *күппочмак* дип атала.





85



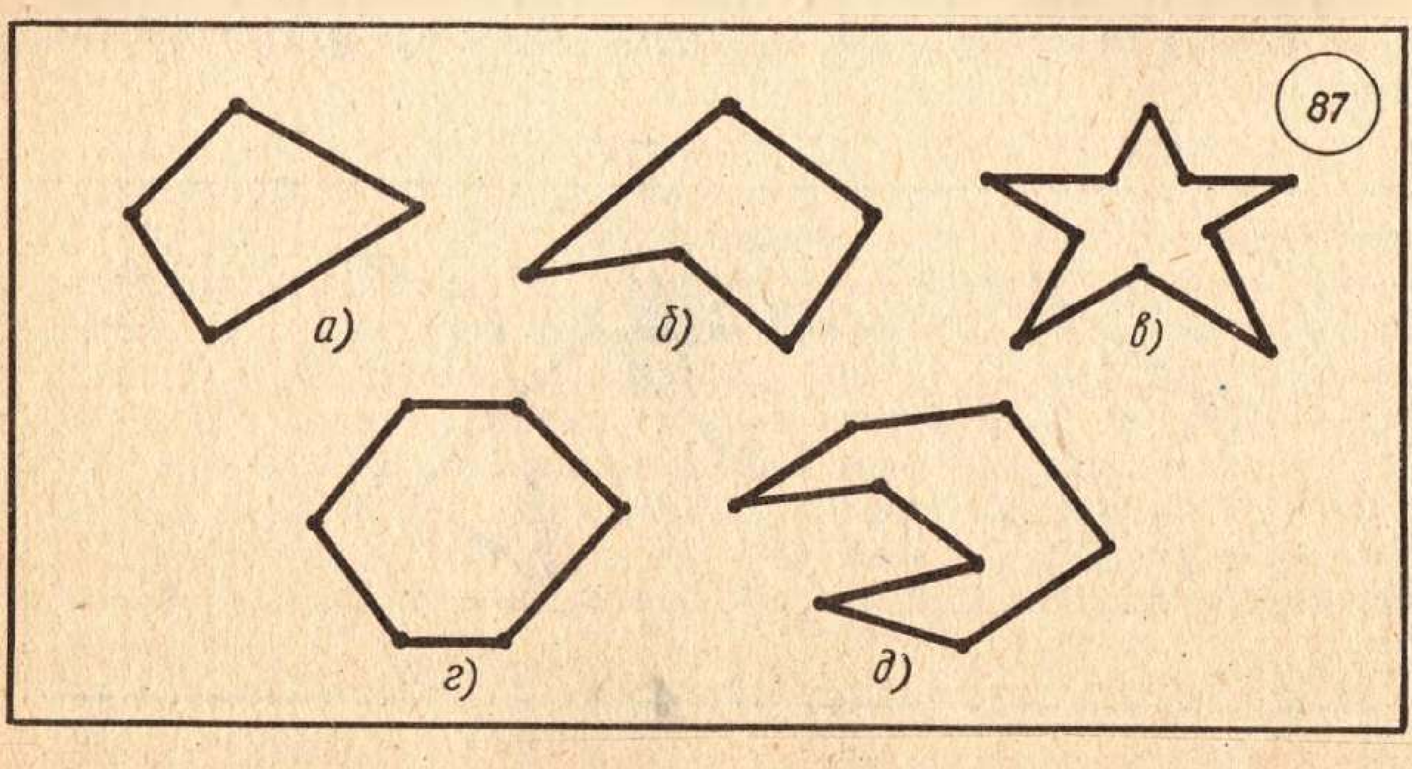
86

87 нче рәсемдә төрле күппочмаклар сурәтләнгән.

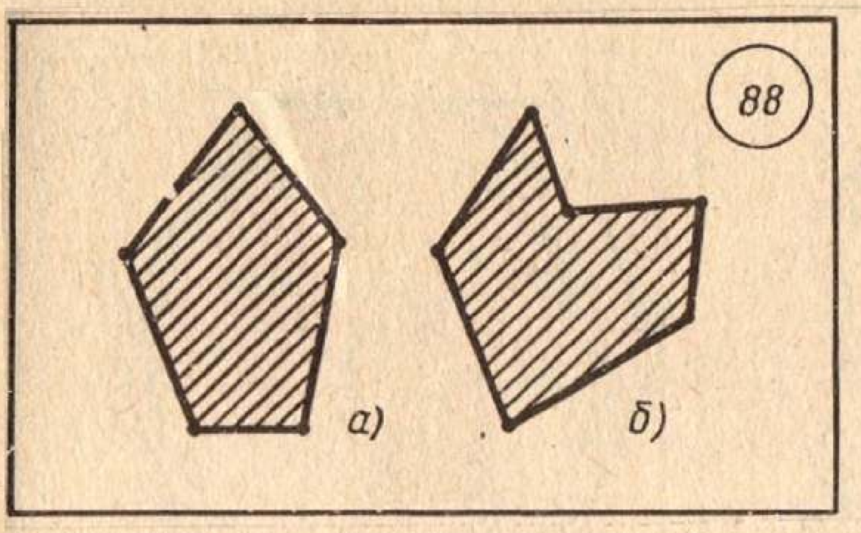
Сынык сызыкның түбәләре — күппочмакның *түбәләре* дип, ә сынык сызыкның буыннары күппочмакның *яклары* дип атала. Күппочмакның күрше булмаган түбәләрен тоташтыручы кисемтәләр аның *диагональләре* дип атала. *n* түбәсе һәм, димәк, *n* ягы булган күппочмак *n-почмак* дип атала.

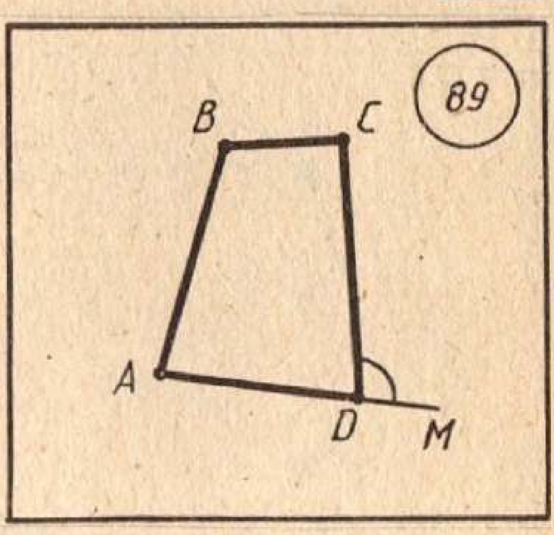
Яссылыкның күппочмак белән чикләнгән чикле өлкәсе *яссы күппочмак* яки *күппочмаклы өлкә* дип атала. 88 нче рәсемдә яссы күппочмаклар яки күппочмаклы өлкәләр сурәтләнгән.

Теләсә кайсы ягын үз эченә алган турыга карата бер ярымъяссылыкта яткан күппочмак *кабарынкы күппочмак* дип атала. Монда туры үзе ярымъяссылыкта ята дип исәпләнә. 88 нче *а* рәсемендә — кабарынкы, 88 нче *б* рәсемендә кабарынкы булмаган күппочмак сурәтләнгән. Кабарынкы күппочмакның бирелгән түбәсе янындагы *почмагы* дип аның шул түбәдә очраша торган яклары белән төзелгән почмак атала.



87





Т. 1. 37. Кабарынкы n-почмакның почмаклары суммасы $180^\circ(n-2)$ ка тигез.

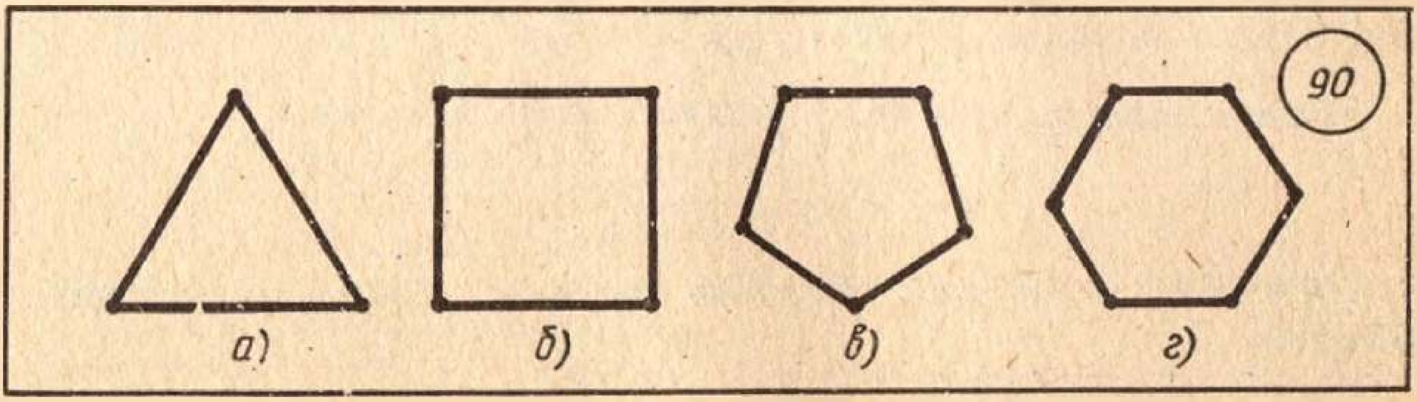
Кабарынкы күппочмакның бирелгән түбәсенең *тышкы почмагы* дип күппочмакның шул түбә янындагы эчке почмакка *чиктәш почмагы* атала. 89 нчы рәсемдә CDA почмагы — $ABCD$ кабарынкы күппочмагының эчке почмагы, ә CDM почмагы — тышкы почмак.

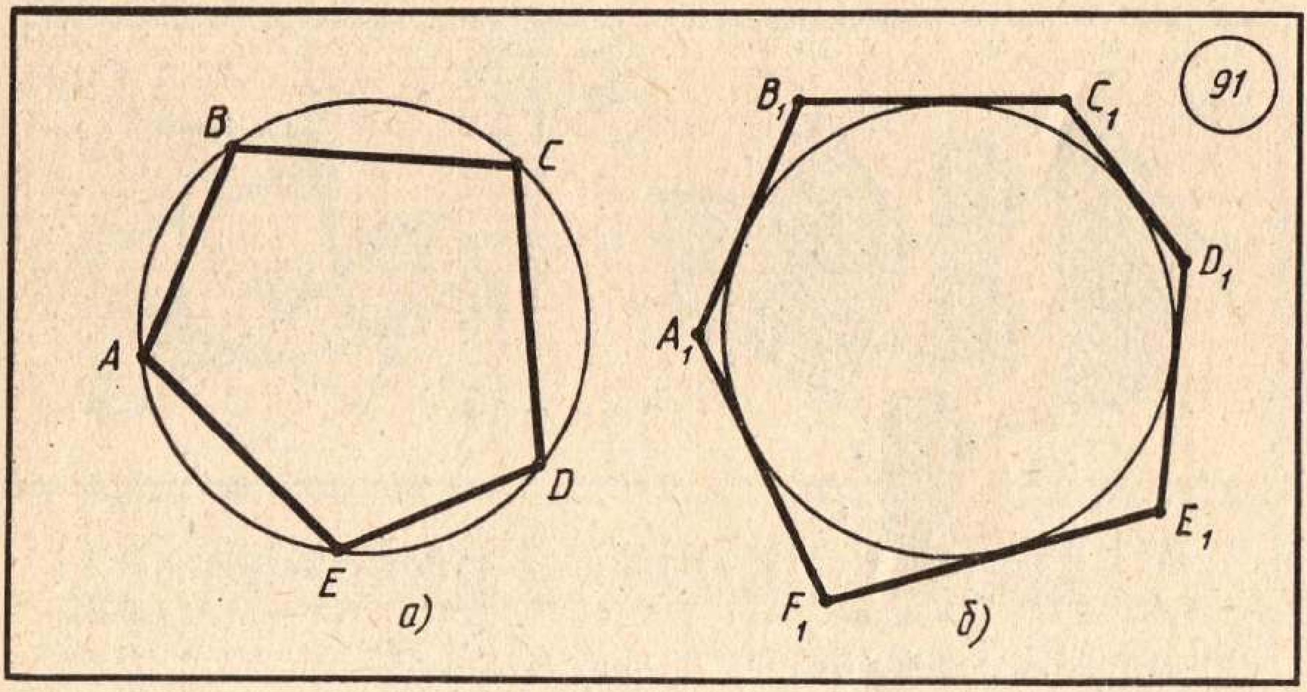
Мисал. Кабарынкы бишпочмакның почмаклары 1, 3, 5, 7, 11 саннарына пропорциональ. Шул почмакларны табарга.

Чишү. Кабарынкы бишпочмакның почмаклары суммасы $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$ ка тигез (Т. 1. 37). Почмакларның кечкенәсен x дип алып, тигезләмә төзибез: $x + 3x + 5x + 7x + 11x = 540$, моннан $x = 20$. Шулай итеп, бишпочмакның почмаклары 20°, 60°, 100°, 140°, 220° ка тигез.

30. Төзек күппочмаклар. Кабарынкы күппочмакның барлык яклары тигез һәм барлык почмаклары тигез булса, ул төзек *күппочмак* дип атала. 90 нчы рәсемдә төзек күппочмаклар сурәтләнгән: өчпочмак, дүртпочмак (квадрат), бишпочмак һәм алтыпочмак.

Күппочмакның барлык түбәләре нинди дә булса бер әйләнәдә ятса, ул *камаулы күппочмак* дип атала. Күппочмакның барлык яклары нинди дә булса бер әйләнәгә орынса, ул *камаучы күппочмак* дип атала.





91 нче рәсемдә $ABCDE$ күппочмагы әйләнәгә камалган, ә $A_1B_1C_1D_1E_1$ күппочмагы әйләнәне камаучы күппочмак була.

Т. 1. 38. Кабарынкы төзек күппочмак әйләнәгә камаулы һәм аны камаучы була.

Ягы a булган төзек n-почмакны камаучы әйләнәнең радиусы түбәндәге формула буенча табыла:

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Ягы a булган төзек n-почмакка камаулы әйләнәнең радиусы түбәндәге формула буенча табыла:

$$r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Төзек тигезьяклы өчпочмак өчен ($n=3$)

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

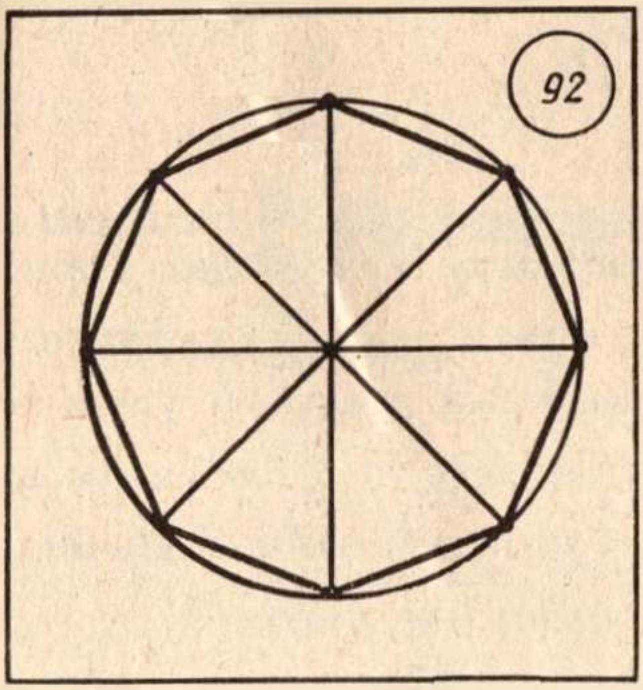
Төзек дүртпочмак (квадрат) өчен ($n=4$)

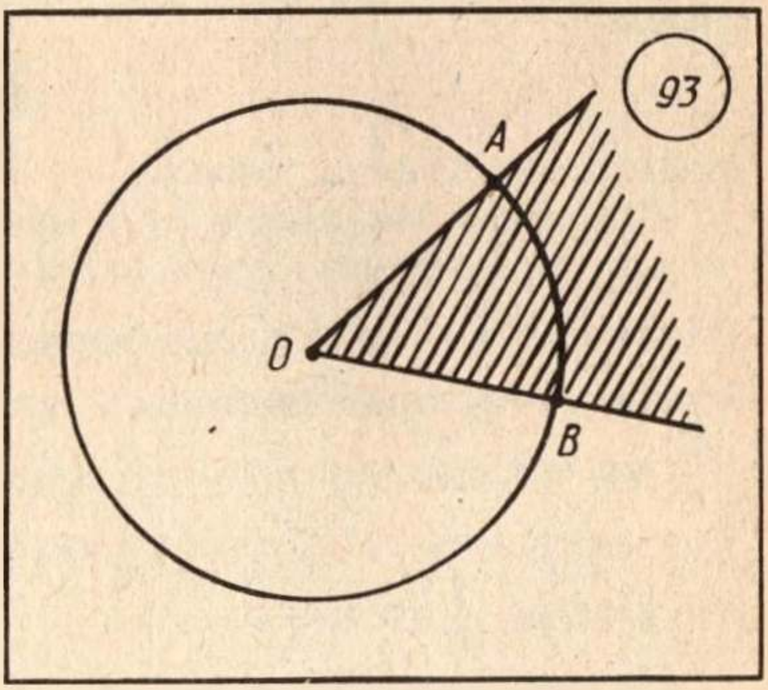
$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ r=\frac{a}{2}.$$

Төзек алтыпочмак өчен ($n=6$)

$$R=a,\ r=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Мисал. Бирелгән әйләнәгә камаулы төзек сигезпочмак төзергә.


92


93

Чишү. Ике перпендикуляр диаметр әйләнәне дүрт тигез кисәккә бүлә. Төзек сигезпочмак төзү өчен, бу кисәкләрнең һәркайсын урталай бүләргә, ягъни туры почмакларның биссектрисаларын үткәрергә, һәм әйләнәнең табылган 8 ноктасын эзлекле рәвештә кисемтәләр белән тоташтырырга кирәк. Әйләнәгә камаулы сигезпочмак табарбыз (92 нче рәсем). Сигезпочмакның яклары тигезлеге һәм почмаклары тигезлеге ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча тигез булган барлык сигез өчпочмакның тигезлегеннән чыга (Т.1.15). Димәк, табылган сигезпочмак төзек сигезпочмак була.

31. Әйләнә озынлыгы. Күргәзмәле фикерләүләрдән шунысы ачык, әйләнә озынлыгы яклары җитәрлек кадәр кечкенә итеп алынган үзенә камаулы булган кабарынкы күппочмакның периметрыннан теләсә никадәр аз аерыла. Әйләнә озынлыгының мондый үзлеге әһәмияткә ия.

Т. 1. 39. Әйләнә озынлыгының үзенең диаметрына чагыштырмасы әйләнәгә бәйле түгел, ягъни теләсә нинди ике әйләнә өчен бер үк.

Әйләнә озынлыгының диаметрга чагыштырмасын грек алфавиты хәрефе π («пи» дип укыла) белән тамгалау кабул ителгән: $\frac{C}{2R} = \pi$, биредә C — әйләнә озынлыгы, R — аның радиусы. π — иррациональ сан, $\pi = 3{,}1416$.

Шулай итеп, *әйләнә озынлыгы.*

$$C = 2\pi R$$

формуласы буенча исәпләнә. 93 нче рәсемдә O үзәкле әйләнәнең AB дугасы сурәтләнгән.

n° лы үзәк почмакка тиңдәшле әйләнә *дугасының озынлыгы*

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot n$$

формуласы буенча табыла.

Почмакка тиңдәшле дуга озынлыгының әйләнә радиусына чагыштырмасы шул почмакның *радианлы үлчәме* дип атала. Әйләнә дугасы озынлыгы формуласыннан $\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180}\cdot n$ икәнлеге ягъни почмакның радианлы үлчәме аның градуслы үлчәмен $\frac{\pi}{180}$ ка тапкырлап табыла. Аерым очракта, 180° лы почмакның радианлы үлчәме π гә тигез, ә туры почмакның радианлы үлчәме $\frac{\pi}{2}$ гә тигез.

Почмакларның радианлы үлчәме берәмлеге итеп *радиан* алына. Бер радианлы почмак — дуга озынлыгы радиуска тигез булган үзәк почмак ул. Бер радиан почмакның градуслы үлчәме $\frac{180}{\pi}\approx 57^\circ$ ка тигез.

1 нче мисал. M һәм N нокталары әйләнәне градуслы үлчәмнәре аермасы 90° ка тигез булган ике дугага бүләләр. Дугаларның һәркайсының градуслы үлчәмнәре күпмегә тигез?

Чишү. Дугаларның градуслы үлчәмнәре суммасы 360° ка, ә аермасы 90° ка тигез. Бу дугаларның градуслы үлчәмнәрен x һәм y дип тамгалап, табабыз:

$$\begin{cases} x+y=360, \\ x-y=90. \end{cases}$$

Әлеге системаны чишеп, $x=225^\circ$, $y=135^\circ$ булуын табабыз.

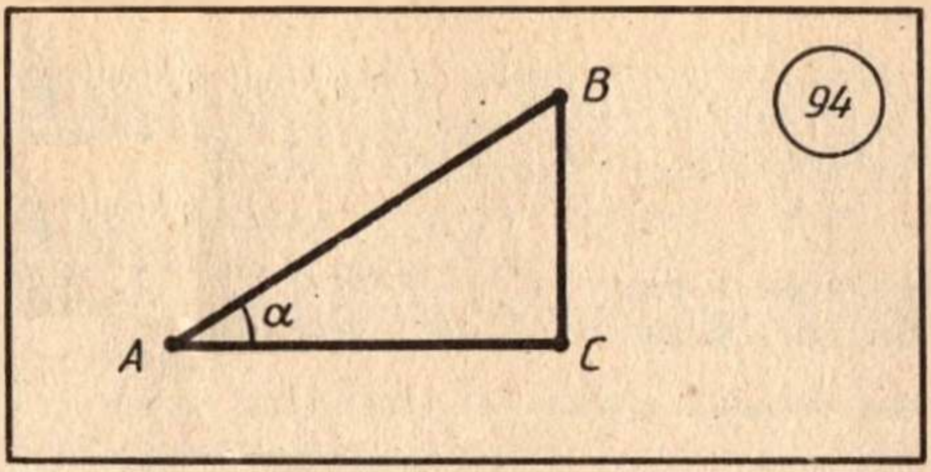
2 нче мисал. Квадратның ягы 4 см га тигез. 1) Аңа камаулы; 2) аны камаучы әйләнәнең озынлыгын исәпләргә.

Чишү. 1) Квадратка камаулы әйләнәнең радиусы 2 см га тигез, ул вакытта әйләнә озынлыгы $C=2\pi R$, ягъни $C=4\pi$ см.

2) Квадратны камаучы әйләнәнең радиусы $\frac{a}{\sqrt{2}}$ гә тигез. Шуңа күрә $R=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, ә әйләнә озынлыгы $C=4\sqrt{2}\,\pi$ см.

§ 6. Өчпочмакларны чишү

32. Косинус, синус һәм тангенс. Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмак янындагы катетның гипотенузага чагыштырмасы *кысынкы почмакның косинусы* дип атала. α почмагының косинусы $\cos\alpha$ дип тамгалана. 94 нче рәсемдә



94

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}$$

Т. 1. 40. **Почмакның косинусы почмакның градуслы үлчәмenә генә бәйле.**

Каршы ятучы BC катетының AB гипотенузасына чагыштырмасы *кысынкы* α *почмагының синусы* ($\sin\alpha$ аша тамгалана) дип атала (94 нче рәсем):

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$

Каршы ятучы BC катетының яндагы AC катетына чагыштырмасы *кысынкы* α *почмагының тангенсы* ($\operatorname{tg}\alpha$ аша тамгалана) дип атала (94 нче рәсем):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Косинус кебек үк, синус һәм тангенс почмак зурлыгына гына бәйле.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ өчен махсус таблицалар төзелгән. Бу таблицалар бирелгән α почмагы өчен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ны яки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ кыйммәтләре буенча тиңдәшле почмакны табарга мөмкинлек бирә. Бу таблицалардан ничек файдалану турындагы аңлатмалар таблицаның үзендә бирелгән (Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы.— М.: Просвещение, 1988 не кара).

Синус, косинус һәм тангенс почмаклары өчен түбәндәге бердәйлекләр әһәмиятле:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{1}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{2}$$

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{3}$$

Бу бердәйлекләрнең әһәмияте шунда ки, әгәр $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ яки $\operatorname{tg}\alpha$ зурлыкларының берсе билгеле булса, аларның калган икесен табарга мөмкин.

Т. 1. 41. Теләсә нинди кысынкы α почмагы өчен $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos\alpha(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ тигезлекләре дөрес.

Кайбер почмакларның синусы, косинусы һәм тангенсының кыйммәтләре түбәндәге таблицада китерелгән

Функция	Аргумент		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Т. 1. 42. Кысынкы α почмагы үскәндә $\sin\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ үсә, ә $\cos\alpha$ кими.

Синус, косинус һәм тангенс кыйммәтләрен кысынкы почмаклар өчен генә түгел, бәлки 0° тан 180° ка кадәрге теләсә нинди почмакны табарга була.

Т. 1. 43. Теләсә нинди α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ почмагы өчен түбәндәге тигезлекләр үтәлә:
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\alpha \neq 90$ почмагы өчен $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

1 нче мисал. $\sin 20^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 70^\circ$ саннарын үсү тәртибендә языгыз.

Чишү. 1. 42 теоремасы буенча $\sin\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ α почмагы үскәндә үсә. Шуңа күрә $\sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \sin 45^\circ < \sin 60^\circ < \sin 70^\circ < \sin 90^\circ$.

2 нче мисал. $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$ аңлатмасын гадиләштерергә.

Чишү. 1 нче юл. $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

2 нче юл. $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha + 1 - 1 = \sin^2\alpha$.

33. Турыпочмаклы өчпочмакның почмаклары һәм яклары арасындагы бәйләнешләр. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ билгеләмәләреннән түбәндәге кагыйдәләр килеп чыга:

1. α почмагына каршы ятучы катет гипотенуза белән $\sin\alpha$ тапкырчыгышына тигез.

2. α почмагы янындагы катет гипотенуза белән $\cos\alpha$ тапкырчыгышына тигез.

3. α почмагына каршы ятучы катет икенче катет белән $\operatorname{tg}\alpha$ тапкырчыгышына тигез.

Бу кагыйдәләр турыпочмаклы өчпочмакның бер ягы һәм кысынкы почмагы билгеле булганда калган ике ягын табарга, ә ике ягы билгеле булганда махсус таблицалар ярдәмендә кысынкы почмакларын табарга мөмкинлек бирә.

4. Турыпочмаклы өчпочмакның катеты гипотенуза белән аның гипотенузага булган проекциясе арасында урта пропорциональ була.

5. Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагы түбәсеннән төшерелгән биеклеге катетларның гипотенузага булган проекцияләре арасында урта пропорциональ була.

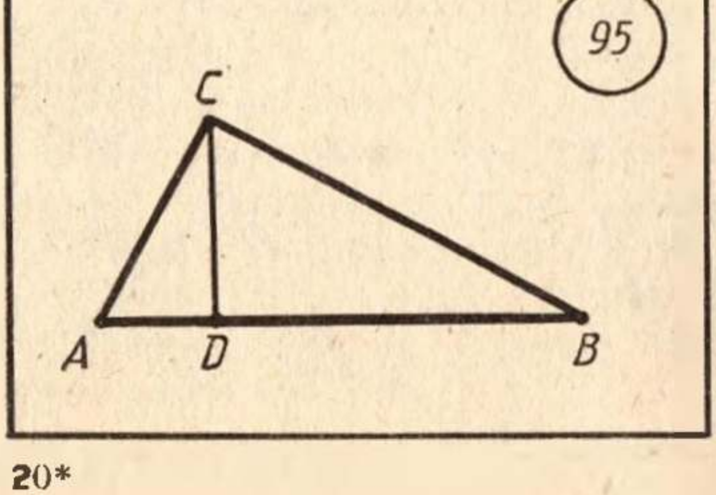
«Урта пропорциональ» дигән атама $x=\sqrt{ab}$ саны $a:x=x:b$ пропорциясенең урта буыны булу белән аңлатыла.

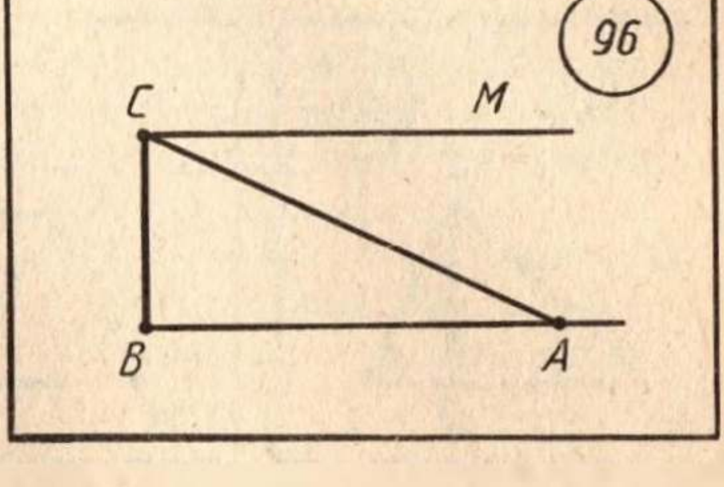
Турыпочмаклы ABC өчпочмагында (95 нче рәсем) $\angle C$ туры почмак, AD һәм $BD - AC$ һәм BC катетларының гипотенузага проекцияләре. Алда әйтелгәннәр буенча түбәндәге тигезлекләр дөрес була:

$$AC=\sqrt{AB\cdot AD},$$
$$BC=\sqrt{AB\cdot BD},$$
$$CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

Мисал. Күзәтүче, 18 м биеклектән, 6°18′ лы түбәнәю почмагында билгесез объект барлыгын күрә. Күзәтү пунктының нигезеннән бу объектка кадәрге ераклыкны табыгыз.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча $BC=18$ м, $\angle MCA = 6°18'$ (96 нчы рәсем). Димәк, $\angle ABC = 83°42'$. ABC өчпочмагында
$$AB = BC\operatorname{tg}83°42' \approx 18\cdot 9{,}0579;$$
$$AB\approx 163 \text{ м}.$$





34. Косинуслар теоремасы. Синуслар теоремасы

Т. 1. 44. Өчпочмакның теләсә кайсы ягының квадраты калган ике ягының квадратлары суммасыннан бу яклар белән алар арасындагы почмак косинусының икеләтелгән тапкырчыгышын алганга тигез була *(косинуслар теоремасы).*

$\triangle ABC$ да (97 нче рәсем) косинуслар теоремасы буенча

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha.$$

Косинуслар теоремасыннан берничә раслама чыга.

1. Өчпочмак ягының квадраты калган ике ягының квадратлары суммасына $\pm$ шул якларның берсе белән икенчесенең проекциясенең икеләтелгән тапкырчыгышына тигез була. Каршы яткан почмак җаенке булганда «$+$» тамгасы, ә кысынкы булганда «$-$» тамгасы алырга кирәк.

97 нче рәсемдә сурәтләнгән очрак өчен

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$$

дип язарга була.

2. Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның якларының квадратлары суммасына тигез.

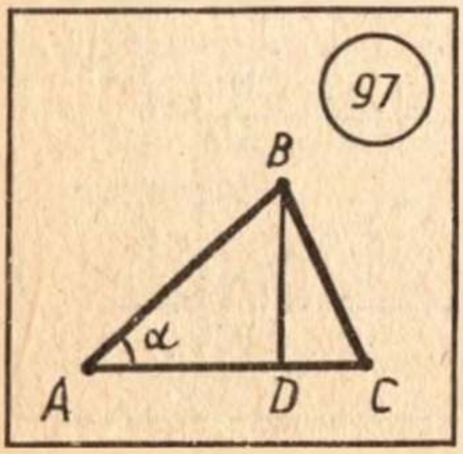
98 нче рәсемдә сурәтләнгән параллелограмм өчен $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ тигезлеген язарга мөмкин.

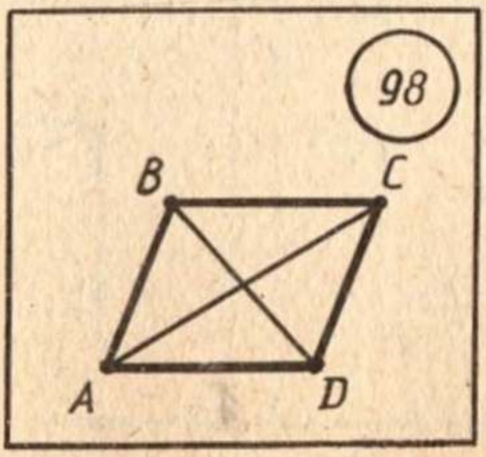
Т. 1. 45. Өчпочмакның яклары каршы яткан почмакларның синусларына пропорциональ *(синуслар теоремасы).*

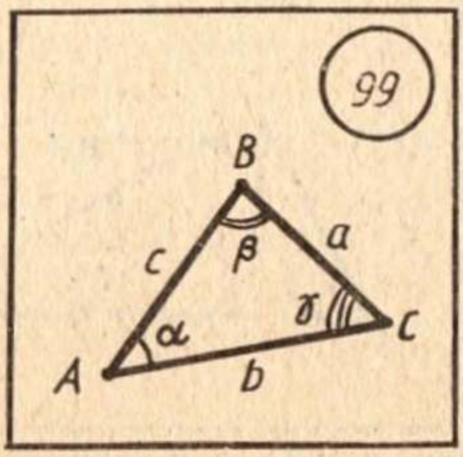
99 нчы рәсемдәге ABC өчпочмагыннан синуслар теоремасы буенча табабыз:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Синуслар теоремасыннан өчпочмакта зуррак почмакка каршы зуррак як, зуррак якка каршы зуррак почмак ятуы килеп чыга.







Әгәр ABC өчпочмагында (99 нчы рәсем) $a < b$ булса, $\alpha < \beta$; әгәр $\beta > \gamma$ булса, ул вакытта $b > c$.

1 нче мисал. Нигезе A янына килерлек булмаган AC предметының биеклеген үлчәү өчен (100 нче рәсем, *а*), AB турысында ниндидер F һәм B нокталарын сайлап алалар һәм $FB = m$ базисын үлчиләр. F һәм B нокталарыннан бу объектның иң биек ноктасы C күренә торган α һәм β почмакларын үлчиләр. $H = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$ икәнен исбатларга, биредә h — почмак үлчәгеч инструментның биеклеге, $\angle A = 90°$.

Чишү. $H = AC + h$. CFB өчпочмагыннан синуслар теоремасы буенча (Т.1.45) $\frac{CF}{\sin \beta} = \frac{m}{\sin(\alpha - \beta)}$, моннан $CF = \frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

AFC өчпочмагыннан $AC = CF \sin \alpha = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ булуын табабыз. Шулай итеп, $H = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$.

2 нче мисал. Елганың бер ягында A һәм B нокталары билгеләнгән. Ераклык $AB = a = 3784$ м. Әгәр $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $\angle ABC = \delta$, $\angle ABD = \gamma$ бирелгән булса, елганың икенче ягында урнашкан C һәм D нокталары арасындагы ераклыкны исәпләргә (100 нче рәсем, *б*).

Чишү. $\triangle ACD$ дан косинуслар теоремасы буенча (Т. 1 44)

$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos \angle DAC$, $\angle DAC = \alpha - \beta$.

$\triangle ABD$ дан синуслар теоремасы буенча (Т.1.45)

$$\frac{AD}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)}, \text{ моннан } AD = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

$\triangle ABC$ дан синуслар теоремасы буенча

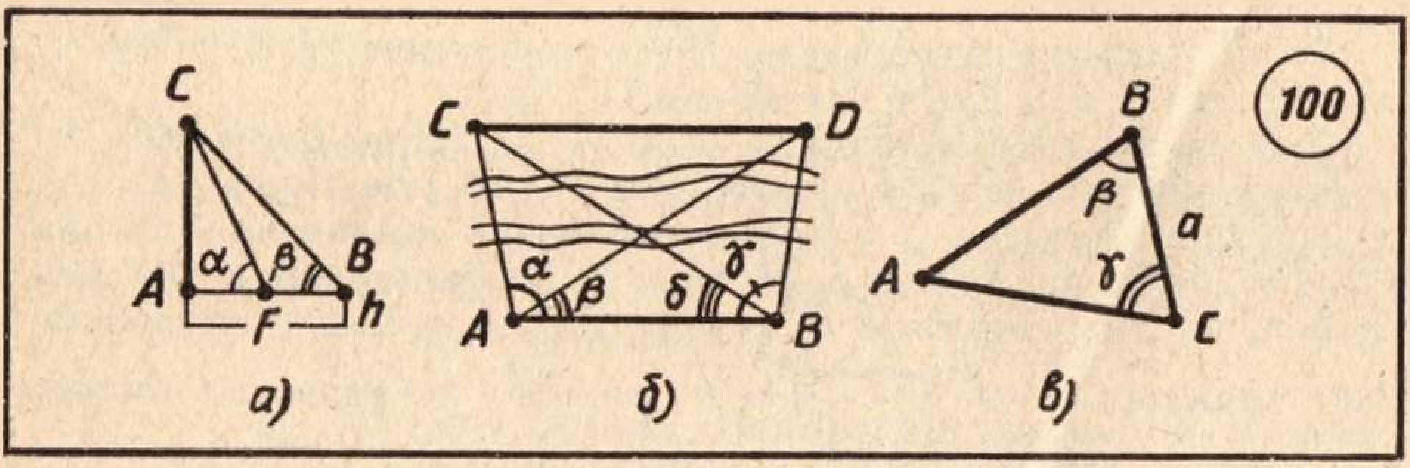
$$\frac{AC}{\sin \delta} = \frac{a}{\sin(\alpha + \delta)}, \text{ моннан } AC = \frac{a \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)}.$$

$$CD = a\sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2(\beta + \gamma)} + \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2(\alpha + \delta)} - 2\frac{\sin \gamma \sin \delta \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \delta)\sin(\beta + \gamma)}}.$$

35. Өчпочмакларны чишү. Өчпочмакларны чишү өчпочмакның билгесез якларын һәм почмакларын аның кайбер билгеле яклары һәм почмаклары аша табудан гыйбарәт. Өчпочмакның якларын a, b, c дип, ә аларга каршы ятучы почмакларны тиңдәшле рәвештә α, β, γ дип тамгаларбыз.

Өчпочмакларны чишүгә төп мәсьәләләрне санап чыгыйк.

1 нче мәсьәлә. Өчпочмакның ягы a һәм ике почмагы бирелгән, мәсәлән, β һәм γ. Өченче почмагын һәм калган ике ягын табарга.



100

а) б) в)

100 нче *в* рәсемендәге ABC өчпочмагында бирелгән: $CB = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. b, c, α ны табарга кирәк.

Чишү. α ны 1.21 теоремасыннан, b һәм c ны 1.45 теоремасыннан табабыз. $\beta + \gamma < 180^\circ$ булса, мәсьәләнең чишелеше була. Чишелешнең бердәнберлеге 1.16 теоремасыннан чыга.

2 нче мәсьәлә. Ике ягы, мәсәлән a һәм b, алар арасындагы γ почмагы бирелгән. Калган ике почмагын һәм өченче ягын табарга.

101 нче *а* рәсемендәге ABC өчпочмагында бирелгән: $BC = a$, $AC = b$ һәм $\angle C = \gamma$. c, α һәм β ны табарга.

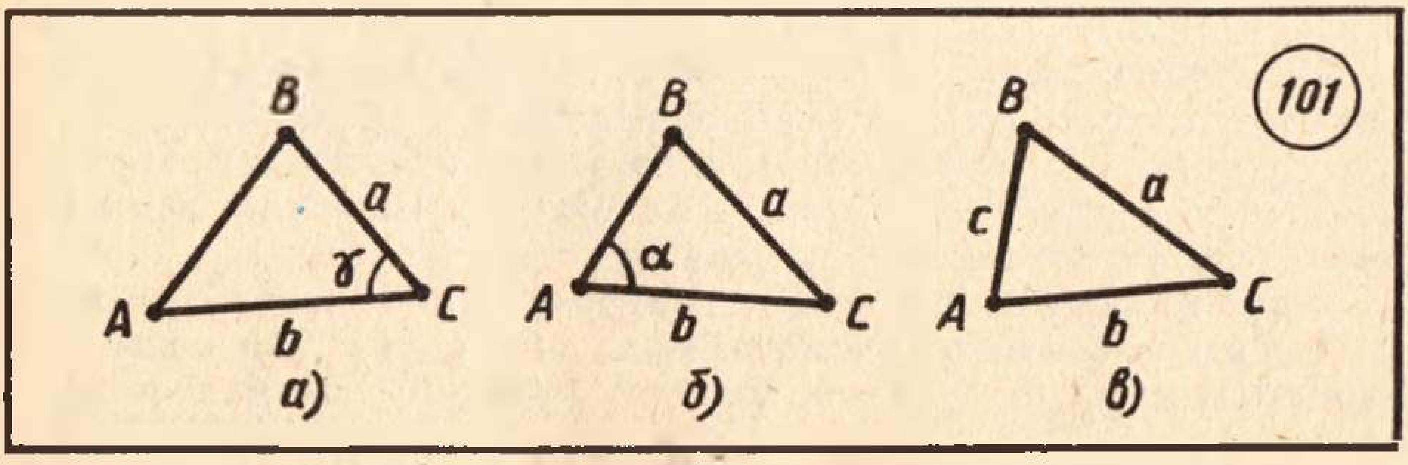
Чишү. c ягын 1.44 теоремасы буенча, α һәм β ны 1.44 яки 1.45 теоремасы буенча табабыз. Мәсьәләнең һәрвакытта да чишелеше бар. Чишелешнең бердәнберлеге 1.15 теоремасыннан чыга.

3 нче мәсьәлә. Ике ягы, мәсәлән a һәм b, һәм аларның берсенә каршы яткан почмагы, мәсәлән α бирелгән. Калган ике почмагын һәм өченче ягын табарга.

101 нче *б* рәсемендәге ABC өчпочмагында бирелгән: $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. c, β, γ ны табарга кирәк.

Чишү. β почмагын — 1.45 теоремасы, γ ны — 1.21 теоремасы, c ны 1.45 теоремасы буенча табабыз. Мәсьәләнең чишелеше булмаска мөмкин, бер чишелеше булырга мөмкин, ике чишелеше булырга мөмкин.

4 нче мәсьәлә. Өчпочмакның өч ягы бирелгән. Почмакларын табарга.



101

а) б) в)

101 нче *б* рәсемендәге ABC өчпочмагында $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. α, β, γ ны табарга кирәк.

Чишү. Башта 1.44 теоремасы буенча α, β яки γ почмакларының берсен табабыз. Аннан соң 2 нче мәсьәләдәге кебек эшләрбез. Әгәр зуррак ягы калган ике ягының суммасыннан кечерәк булса, мәсьәләнең бер чишелеше була (п. 15). Чишелешнең бердәнберлеге 1.17 теоремасыннан чыга.

§ 7. Яссы фигураларның мәйданнары

36. Гади фигураларның мәйдан төшенчәсе. Яссылыкта гади фигураларның мәйдан төшенчәсе кертелә.

Фигураны чикле сандагы өчпочмакларга бүлгәләргә мөмкин булса, ул *гади фигура* дип атала. Өчпочмакны без өчпочмак рәвешендәге өлкә дип, ягъни яссылыкның өчпочмак белән чикләнгән чикле өлкәсе дип аңлыйбыз.

102 нче рәсемдә $ABCDE$ кабарынкы күппочмагы сурәтләнгән, ул гади фигура була, чөнки аны EAB, EBC, ECD өчпочмакларына бүлгәләргә мөмкин.

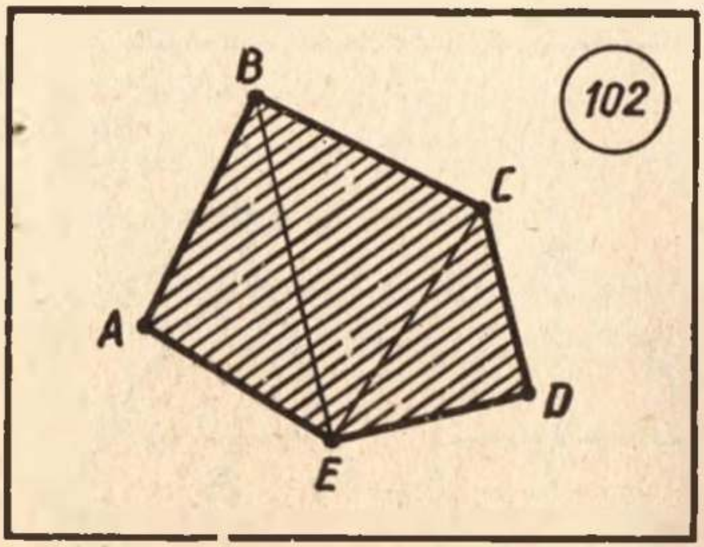
Гади фигураның мәйданы — уңай зурлык ул: санча кыйммәте түбәндәге үзлекләргә ия була.

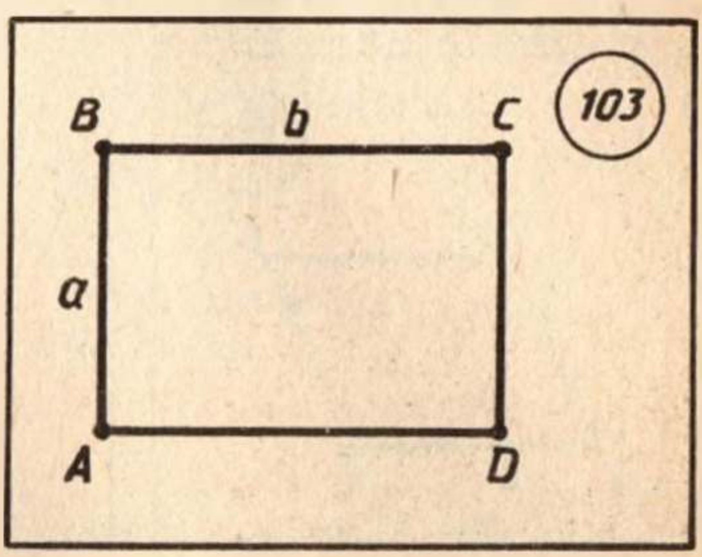
1. Тигез фигураларның мәйданнары тигез була.
2. Әгәр фигура гади фигуралардан торган кисәкләргә бүлгәләнсә, бу фигураның мәйданы шул кисәкләрнең мәйданнары суммасына тигез була.
3. Ягы үлчәү берәмлегенә тигез булган квадратның мәйданы берәмлеккә тигез.

37. Күппочмакларның мәйданнары. Турыпочмаклыкның мәйданы

$$S=ab$$

формуласы буенча исәпләнә, биредә a һәм b — турыпочмаклыкның яклары. 103 нче рәсемдә $ABCD$ турыпочмаклыгы сурәтләнгән, анда $AB=a$, $BC=b$. Аның мәйданы





$$S = AB \cdot BC$$

формуласы буенча табыла.

Квадрат — барлык яклары тигез булган турыпочмаклык ул (п. 26 ны кара), димәк, ягы a булган *квадратның мәйданы* a^2 ка тигез, ягъни

$$S = a^2,$$

биредә a — аның ягы. Квадратның мәйданын шулай ук

$$S = \frac{d^2}{2}$$

формуласы буенча да исәпләп була, биредә d — квадратның диагонале.

Параллелограммның мәйданы аның бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышына тигез, ягъни

$$S = ah$$

формуласы буенча исәпләнә, биредә a — ягы, h — шул якка үткәрелгән биеклек. 104 нче рәсемдә $ABCD$ параллелограммы сурәтләнгән, анда BE — аның биеклеге. Параллелограммның мәйданы AB ның BE га тапкырчыгышына тигез:

$$S = AB \cdot BE.$$

Параллелограммның мәйданын

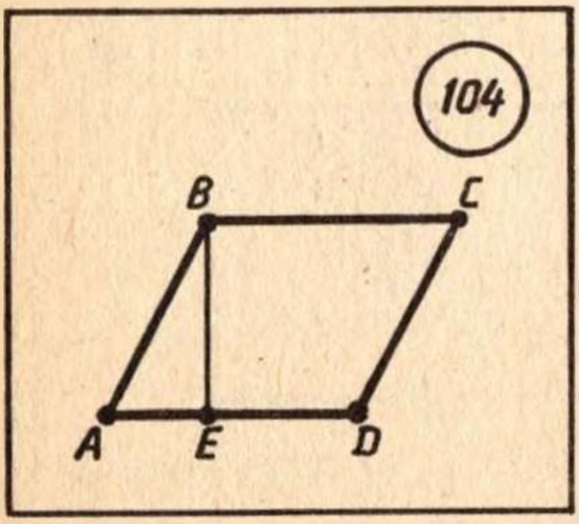
$$S = ab \sin \alpha$$

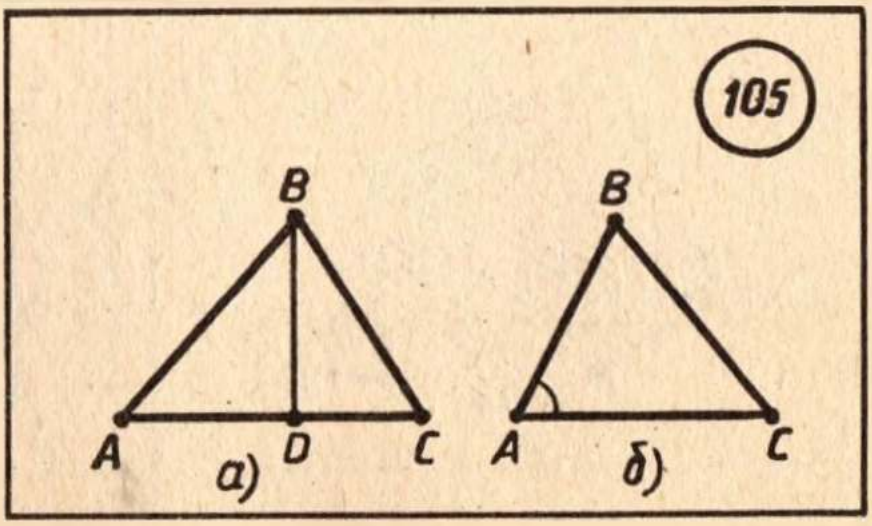
формуласы буенча исәпләргә була, биредә a һәм b — яклары, α — параллелограммның почмагы.

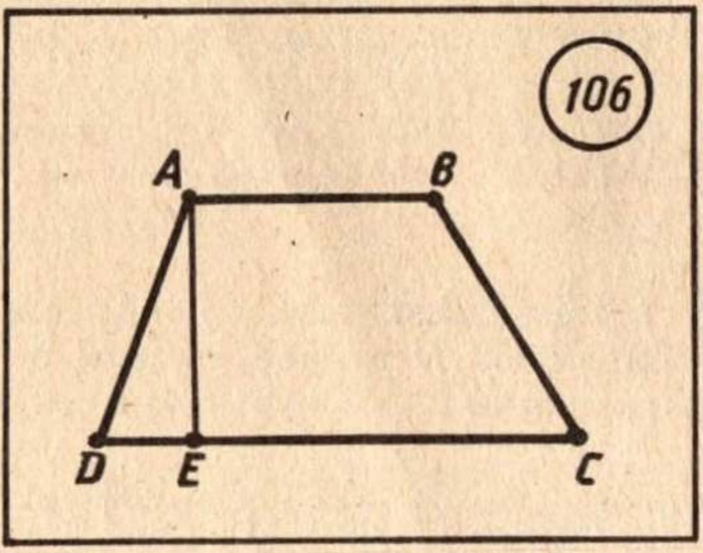
Ромб — параллелограммның аерым очрагы ул, шулай булгач, аның мәйданы параллелограммның мәйданы кебек үк табыла. Моннан тыш, *ромб мәйданының* башка формулалары да бар:

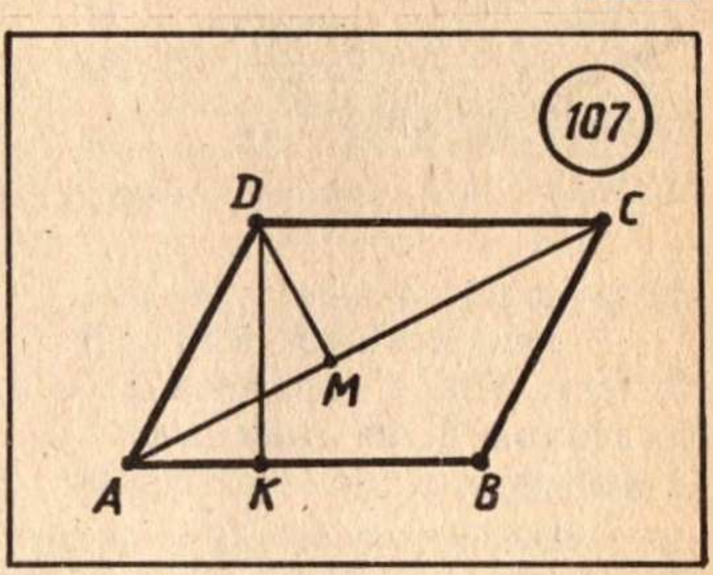
$$S = a^2 \sin \alpha,$$

биредә a — ромбның ягы, α — ромбның почмагы;









$$S=\frac{1}{2}d_1d_2,$$

биредә d_1 һәм d_2 — ромбның диагональләре.

Өчпочмакның мәйданы бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышының яртысына тигез, ягъни

$$S=\frac{1}{2}ah$$

формуласы буенча исәпләнә. 105 нче *а* рәсемендә ABC өчпочмагы сурәтләнгән, анда BD — биеклек, ягъни аның мәйданы

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$$

формуласы буенча табыла.

Өчпочмак мәйданын табу өчен башка формулалар да бар:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

биредә a һәм b $\triangle ABC$ның яклары, ә γ — бу яклар арасындагы почмак. Бу формуланы башкача болай язарга була:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A \text{ (105 нче рәсем, } б\text{).}$$

Түбәндәге формула безнең эраның 1 гасырында Александрия шәһәрендә яшәгән борынгы грек галиме Геронныкы:

$$S=\sqrt{p(a-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Герон формуласы),}$$

биредә a, b, c — өчпочмакның яклары, p — аның ярымпериметры, ягъни $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Трапециянең мәйданы нигезләренең ярымсуммасы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h,$$

биредә a һәм b — трапециянең нигезләре, h — биеклеге.

106 нчы рәсемдә $ABCD$ трапециясе сурәтләнгән, анда AB һәм CD — аның нигезләре, ә AE — биеклеге. Бу трапециянең мәйданы.

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot AE$$

формуласы буенча табыла.

1 нче мисал. Ягы $AB=12$ см һәм диагонале $AC=16$ см булган $ABCD$ параллелограммы бирелгән. D түбәсе AC диагоналеннән 5 см ераклыкта. D ноктасыннан AB турысына кадәрге ераклыкны исәпләргә.

Чишү. $S_{ABCD}=2S_{\triangle ADC}=AC\cdot DM=64$ см^2 (107 нче рәсем), $S_{ABCD}=AB\cdot DK$ булганга күрә, $DK=\frac{64}{12}$, ягъни $DK\approx 5{,}33$ см.

2 нче мисал. Ягы a булган $ABCD$ квадратының үзәге O аша AB ягын кисүче, ләкин A һәм B нокталары аша үтми торган l турысы үткәрелгән. Әгәр b — квадрат эчендәге l турысының кисемтә озынлыгы булса, квадратның B һәм C түбәләреннән l турысына кадәрге ераклыклар суммасын a һәм b аша белдерергә.

Чишү. Эзләнелә торган сумманы c аша тамгалыйбыз, ул вакытта фигураның үзәк симметриясе нигезендә $c=2(h_1+h_2)$ (108 нче рәсем).

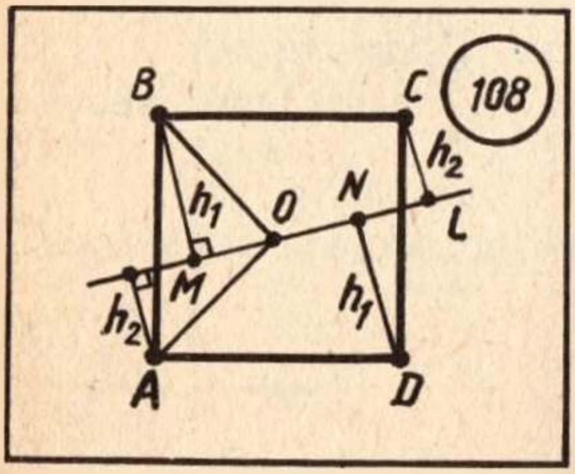
$$S_{\triangle AOB}=0{,}25a^2,\ S_{\triangle AOB}=0{,}25b(h_1+h_2),$$

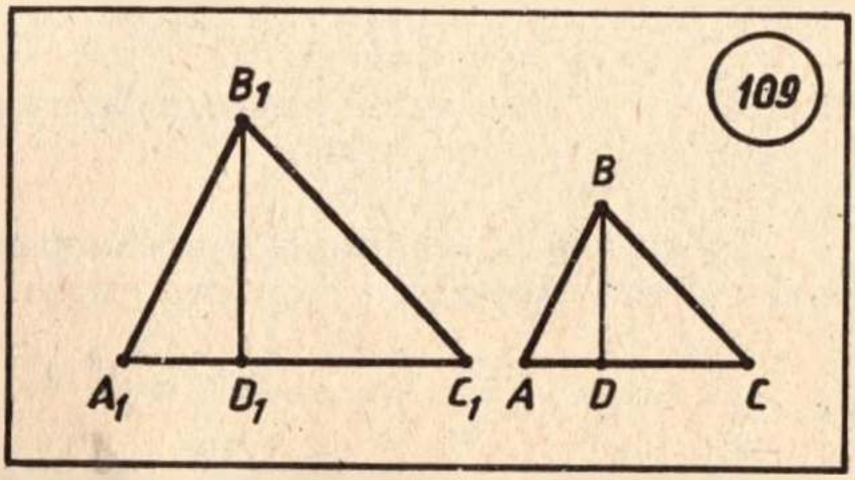
моннан $0{,}25a^2=0{,}25b(h_1+h_2)$ һәм $c=\frac{2a^2}{b}$.

38. Охшаш фигураларның мәйданнары

Т. 1. 46. Охшаш фигураларның мәйданнары чагыштырмасы бу фигураларның тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең квадратлары чагыштырмасына тигез.

Ике охшаш ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары бирелсен ди (109 нчы рәсем). Әгәр охшашлык коэффициенты $k>1$ булса,





$A_1B_1C_1$ өчпочмагының сызыкча үлчәмнәре ABC өчпочмагының тиңдәшле үлчәмнәреннән k тапкыр зуррак булыр. Атап әйткәндә $\triangle A_1B_1C_1$ нең ягы һәм биеклеге $\triangle ABC$ ның тиңдәшле ягы һәм биеклегеннән k тапкыр зуррак, ягъни $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$, $B_1D_1 = kBD$.

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2}kACkBD = \frac{1}{2}k^2AC \cdot BD = k^2S_{\triangle ABC}.$$

39. Түгәрәк мәйданы. Түгәрәкне камаучы төзек күппочмакның (110 нчы рәсем), һәм түгәрәккә камаулы төзек күппочмакның (111 нче рәсем) мәйданы формулалары радиусы R булган түгәрәк мәйданы формуласын чыгарырга мөмкинлек бирә.

Түгәрәк мәйданы

$$S = \pi R^2$$

формуласы буенча исәпләнә, биредә R — түгәрәкнең радиусы.

Түгәрәкнең тиңдәшле үзәк почмак эчендә яткан өлеше *түгәрәк секторы* дип атала (112 нче рәсем).

Түгәрәк секторының мәйданы

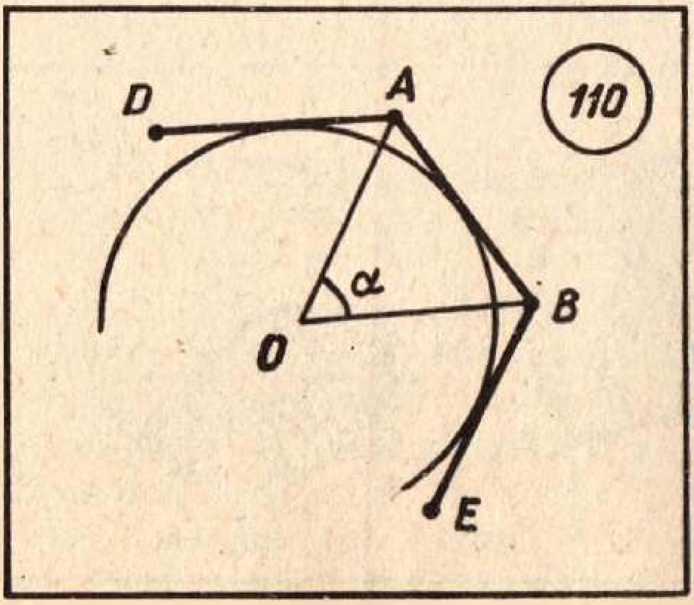
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

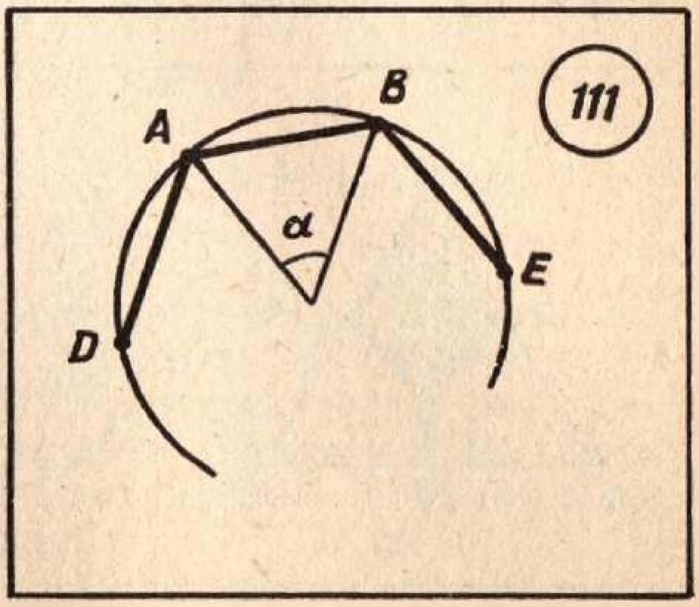
формуласы буенча исәпләнә, биредә R — түгәрәкнең радиусы, α — тиңдәшле үзәк почмакның градуслы үлчәме.

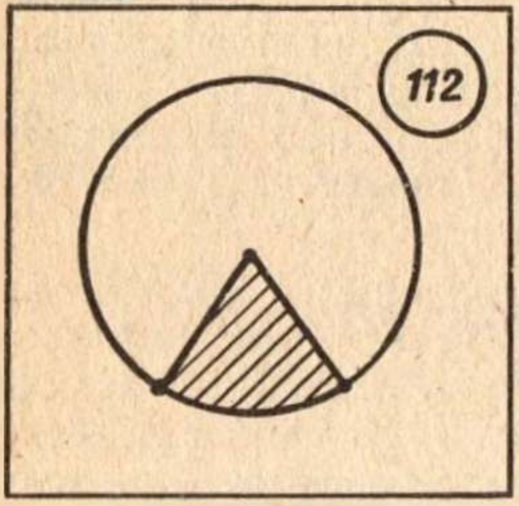
Түгәрәк белән ярымъяссылыкның уртак кисәге *түгәрәк сегменты* дип атала, бу ярымъяссылыкның чиге әлеге түгәрәкнең хордасын эченә ала (113 нче рәсем).

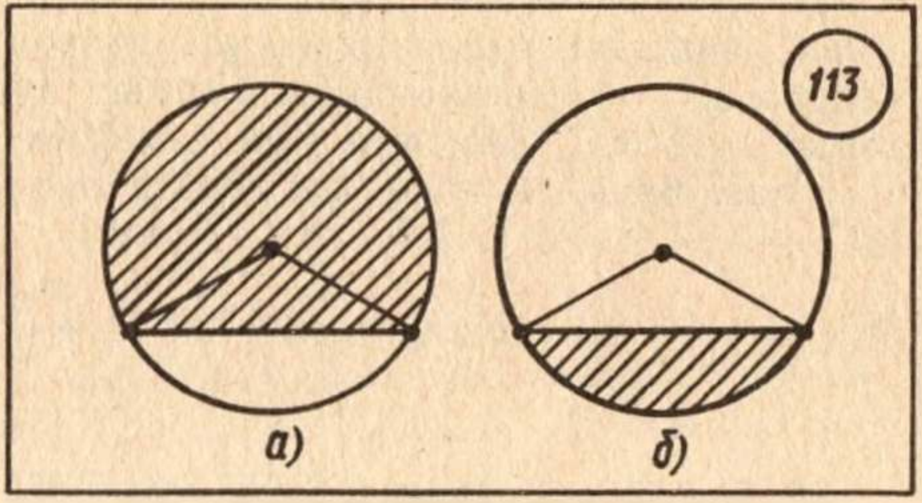
Ярымтүгәрәккә тигез булмаган *түгәрәк сегментының мәйданы*

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\triangle}$$


110


111


112


113

формуласы буенча исәпләнә, биредә R — түгәрәкнең радиусы. α — бу түгәрәк сегментының дугасын үз эченә алган үзәк почмакның градуслы үлчәме, ә $S_{\triangle}$ — түбәләре түгәрәк үзәгендә һәм тиңдәшле секторны чикләүче радиус очларында булган өчпочмакның мәйданы. $\alpha > 180^\circ$ булса, «+» тамгасын (113 нче рәсем, *а*), ә $\alpha < 180^\circ$ булса, «—» тамгасын алырга кирәк (113 нче рәсем, *б*).

1 нче мисал. 114 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураларның кирәкле үлчәмнәрен алырга һәм мәйданнарын исәпләргә.

Чишү. а) ABC өчпочмагы төзек (114 нче рәсем, *а*), K һәм L нокталары — аның ягының урталары, AKM һәм CML — секторлар, аларның һәркайсының дугасы 60° лы була. Шуңа күрә

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}17a^2,$$

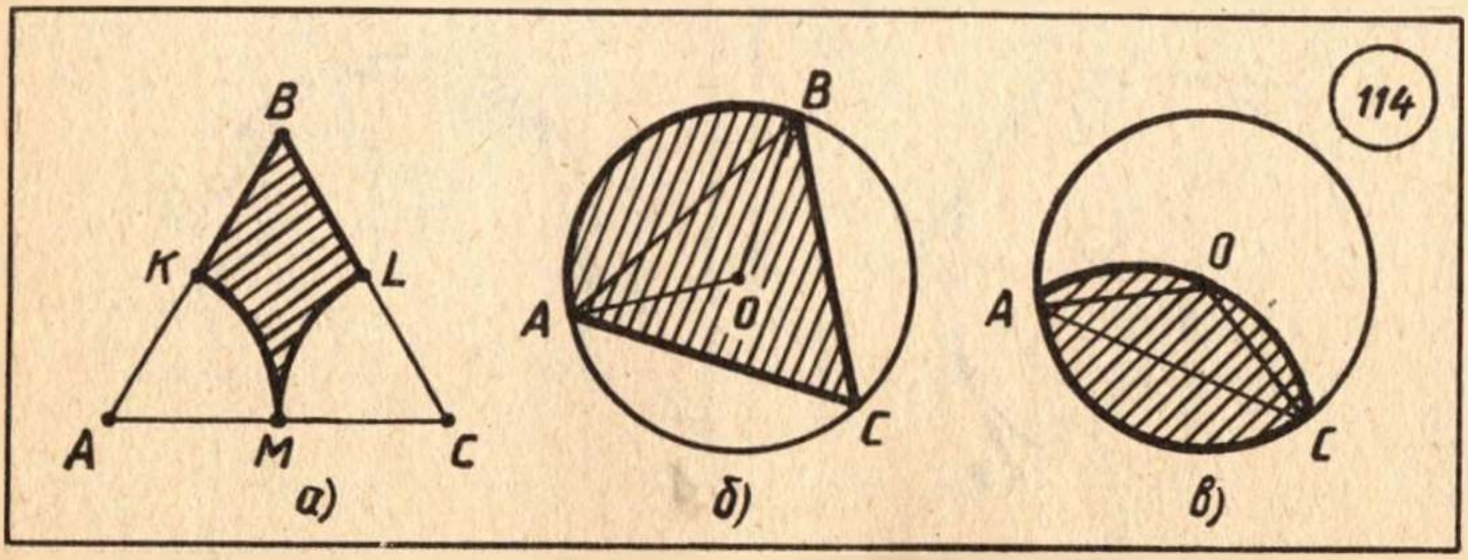
биредә $a - \triangle ABC$ның ягы.

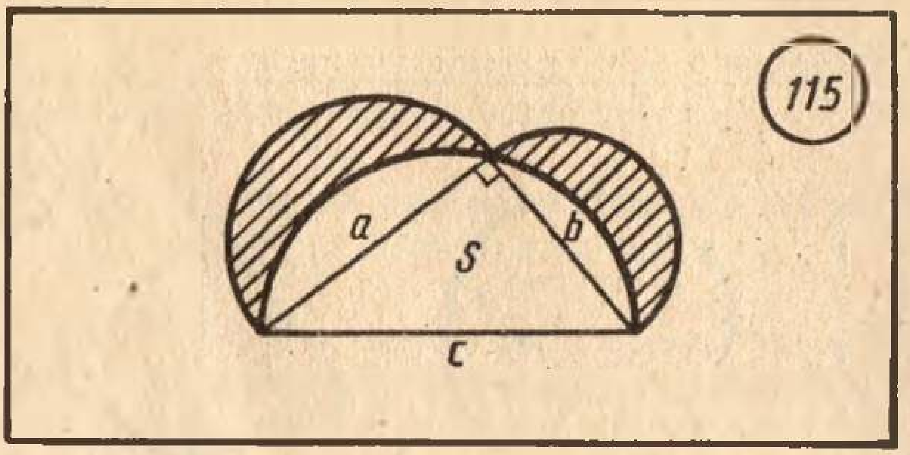
Мәсәлән $a \approx 16$ мм булганда, $S \approx 44$ мм^2.

б) AOB ны 120° почмаклы сектор, O — әйләнәнең үзәге дип исәпләп (114 нче рәсем, *б*), табабыз:

$$S = \frac{\pi R^2}{3} + R^2 \sin 120^\circ = \frac{R^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1{,}9R^2,$$

биредә R — әйләнәнең радиусы.


114



Мәсәлән, $D\approx 16$ мм булганда, $S\approx 122$ мм^2.

в) AOC дугасы әйләнәнең үзәге O аша үтә, ә аның радиусы әйләнәнең радиусына тигез һәм $\angle AOC=120^\circ$ дип санап, табабыз:

$$S=2\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{1}{2}R^2\sin 120^\circ\right)\approx 1{,}2R^2,$$

биредә R — әйләнәнең радиусы.

Мәсәлән, $D\approx 16$ мм булганда, $S\approx 77$ мм^2.

2 нче мисал. Штрихланган ай кебек ике кисәкнең мәйданнары суммасы (115 нче рәсем) турыпочмаклы ABC өчпочмагының мәйданына тигез икәнен исбатларга.

Чишү. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының катетларын a һәм b аша, гипотенузаны C аша (115 нче рәсем), ә штрихланган фигураларның мәйданнары суммасын S аша тамгалыйк.

Пифагор теоремасы буенча $a^2+b^2=c^2$, ягъни $a^2+b^2-c^2=0$.

$$S=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}-\left(\frac{\pi c^2}{8}-S_{\triangle ABC}\right)=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)+S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABC},$$

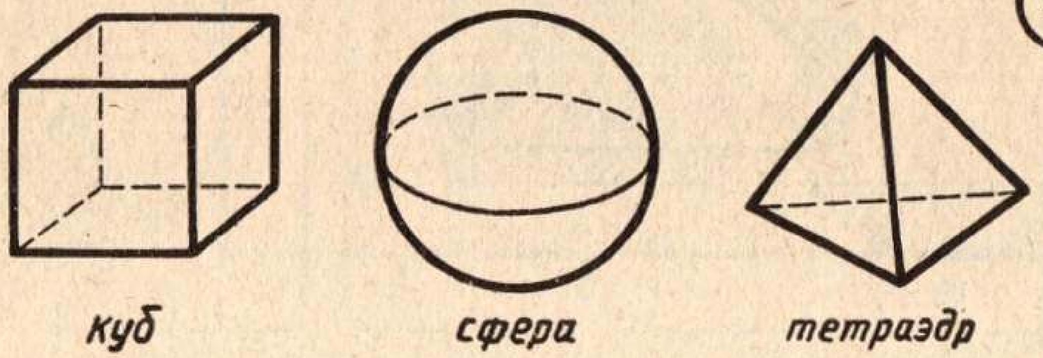
$$S=S_{\triangle ABC}$$

II БҮЛЕК. ПРОСТРАНСТВОДА ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАР

§ 8. Стереометрия аксиомалары һәм алардан кайбер нәтиҗәләр

40. Стереометриянең төп төшенчәләре. *Пространствода нокта, туры* һәм *яссылык төп геометрик фигуралар булып торалар.* 116 нчы рәсемдә пространствода төрле фигуралар сурәтләнгән. Пространствода берничә геометрик фигураның берләшүе шулай ук геометрик фигура була, 117 нче рәсемдәге фигура ике тетраэдрдан тора.

116



Яссылыклар грек алфавитының юл хәрефләре белән тамгалана:

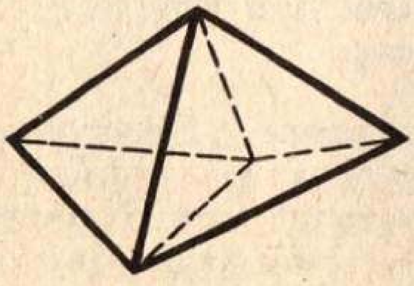
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots .$$

118 нче рәсемдә α яссылыгы, a һәм b турылары, A, B һәм C нокталары сурәтләнгән. A ноктасы һәм a турысы турында алар α яссылыгында яталар яки α яссылыгыныкы диләр. B һәм C нокталары һәм b турысы турында алар *α яссылыгында ятмыйлар* яки *α яссылыгыныкы түгел* дип әйтәләр.

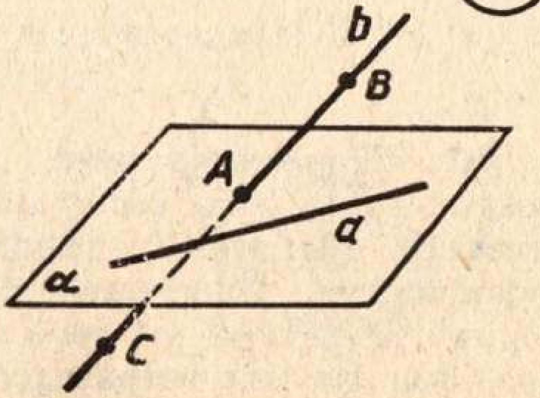
Төп геометрик фигура буларак яссылык төшенчәсен кертү аксиомалар системасын киңәйтүне таләп итә. *Пространствода яссылыкларның төп үзлекләрен белдергән* аксиомаларны санап китик. Бу аксиомалар ярдәмлектә C хәрефе белән тамгаланалар.

C_1. Яссылык нинди генә булмасын, анда шул яссылыкныкы булган нокталар да, аныкы булмаган нокталар да бар.

117



118



118 нче рәсемдә A ноктасы α яссылыгыныкы, ә B һәм C нокталары ул яссылыкныкы түгел.

C_2. Әгәр төрле ике яссылыкның уртак ноктасы булса, алар туры буенча кисешәләр.

119 нчы рәсемдә төрле ике яссылык α һәм β ның уртак A ноктасы бар, һәм димәк, C_2 аксиомасы буенча ул яссылыкларның һәр икесендә яткан туры бар. Шуның белән бергә нинди дә булса нокта ике яссылыкта да ятса, ул нокта a турысында да ята. α һәм β яссылыклары бу очракта a турысы буенча *кисешүче* яссылыклар дип атала.

C_3. Әгәр төрле ике турының уртак ноктасы булса, алар аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

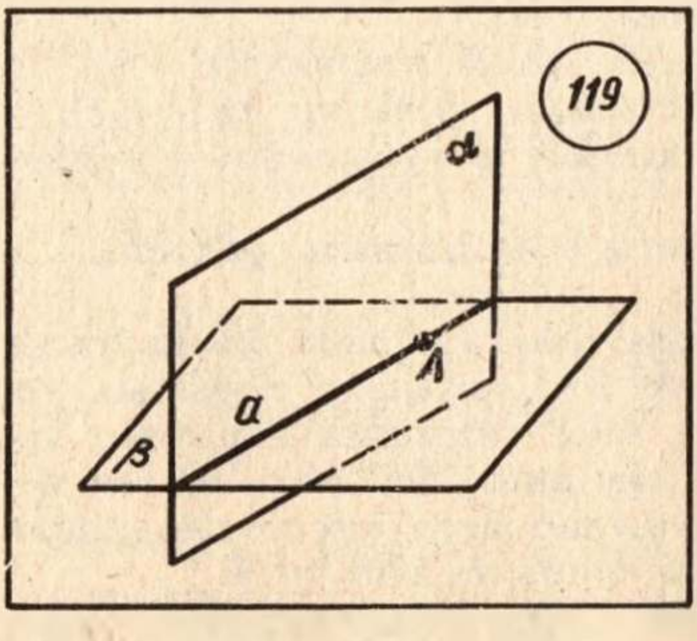
120 нче рәсемдә уртак O ноктасы булган төрле a һәм b турылары бирелгән, димәк C аксиомасы буенча a һәм b турыларын эченә алган α яссылыгы бар. Шуның белән бергә шушы C_3 аксиомасы буенча α яссылыгы бердәнбер була.

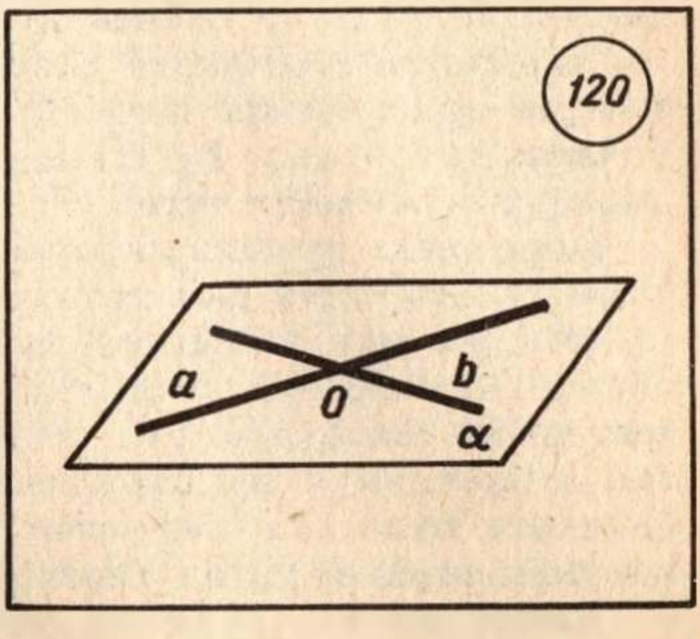
Әлеге өч аксиома 1 бүлектә карап үткән планиметрия аксиомаларын тулыландыра. Алар барысы бергә геометриянең аксиомалар системасын тәшкил итәләр.

Бу аксиомаларны кулланып, стереометриянең кайбер беренче теоремаларын исбатларга була.

Т.2.1. Туры һәм бу турыда ятмаган нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

Т.2.2. Әгәр турының ике ноктасы яссылыкта ятса, туры тулысынча шул яссылыкта ята.





Т.2.3. Бер турыда ятмаган өч нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

1 нче мисал. α яссылыгы бирелгән. α яссылыгында ятмаган һәм аны кисеп үтүче туры барлыгын исбат итәргә.

Чишү. α яссылыгында A ноктасы алабыз, моны C_1 аксиомасыннан чыгып эшләргә була. Шул ук аксиома буенча α яссылыгында ятмаган B ноктасы бар. A һәм B нокталары аша туры үткәрергә мөмкин (аксиома $A - I_2$). AB турысы α яссылыгында ятмый һәм аны кисеп үтә (A ноктасында).

2 нче мисал. α яссылыгы бирелгән. α яссылыгын кисүче башка β яссылыгы барлыгын исбатларга.

Чишү. α яссылыгында яткан A һәм B нокталары һәм анда ятмаган C ноктасы (аксиома C_1) алабыз. A, B һәм C нокталары бер турыда ятмыйлар. Алар аша 2.3 теоремасы буенча β яссылыгы үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә. α һәм β яссылыкларының уртак ноктасы бар, димәк, аксиома C_2 буенча α һәм β яссылыклары кисешәләр.

Искәрмә. Әгәр C ноктасын AB турысында ята дип алсак, 2.2 теоремасы буенча ул α яссылыгында да ятар, бу C ноктасын сайлап алуга каршы килә.

§ 9. Туры һәм яссылыкларның параллельлеге

41. Чалышма турылар. Параллель турылар билгеләмәсе һәм аларның пространстводагы үзлекләре яссылыктагы кебек үк (11 нче пунктны кара).

Шуның белән бергә пространствода турылар торышының тагын бер очрагы — *чалышма турылар* булуы мөмкин. Кисешмәгән һәм бер яссылыкта ятмаган турылар *чалышма турылар* дип атала.

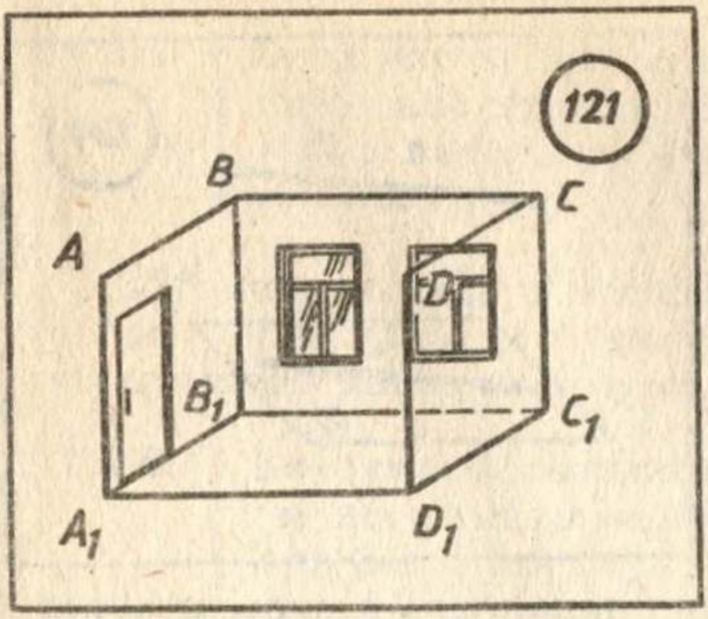
121 нче рәсемдә торак бүлмәнең макеты сурәтләнгән. Сез AB һәм B_1C_1, BC һәм D_1C_1 кисемтәләре яткан турыларның чалышма турылар икәнен күрәсез.

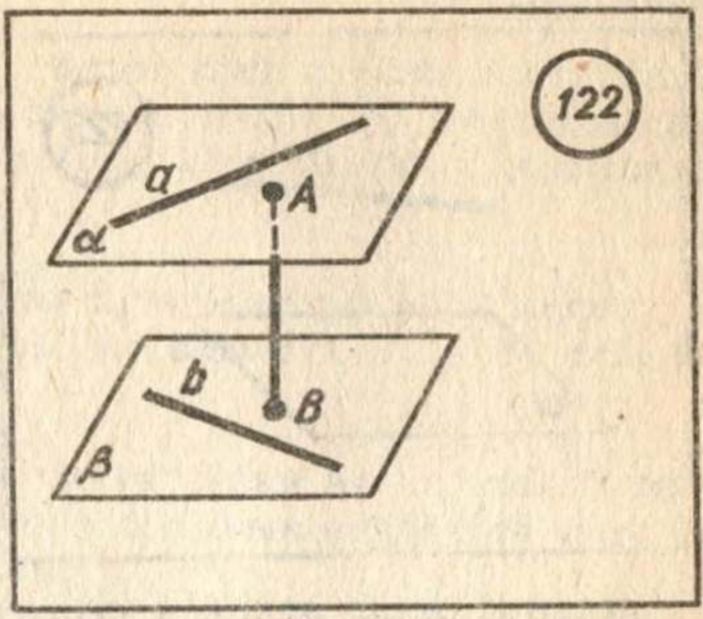
Чалышма турыларга параллель итеп үткәрелгән ике кисешүче арасындагы почмак *чалышма турылар арасындагы почмак* дип атала. Бу почмак кисешүче турыларның кайсыларын алуга бәйле түгел.

Параллель турылар арасындагы ераклыкның градуслы үлчәме нульгә тигез дип исәпләнә.

Очлары ике чалышма турыда һәм аларның һәркайсына перпендикуляр булган кисемтә бу *ике чалышма турының уртак перпендикуляры* дип атала. Ике чалышма турының уртак перпендикуляры барлыгын һәм аның бер генә икәнен исбатларга була. Ул бирелгән турылар аша үтүче параллель яссылыкларның уртак перпендикуляры булып тора.

Чалышма турыларның уртак перпендикулярының озын-


121


122

лыгы *чалышма турылар арасындагы ераклык* дип атала. Ул чалышма турылар аша үтүче параллель яссылыклар арасындагы ераклыкка тигез.

Шулай итеп, a һәм b чалышма турылары арасындагы ераклыкны табу өчен (122 нче рәсем), бу турыларның һәркайсы аша α һәм β яссылыкларына параллель турылар үткәрергә кирәк. Бу яссылыклар арасындагы ераклык a һәм b чалышма турылары арасындагы ераклык була да инде. 122 нче рәсемдә, мәсәлән AB арасы шундый ераклык була.

Мисал. a һәм b турылары параллель, ә c һәм d турылары чалышма турылар. a һәм b турыларының һәркайсы c һәм d турыларының икесен дә кисеп үтә аламы?

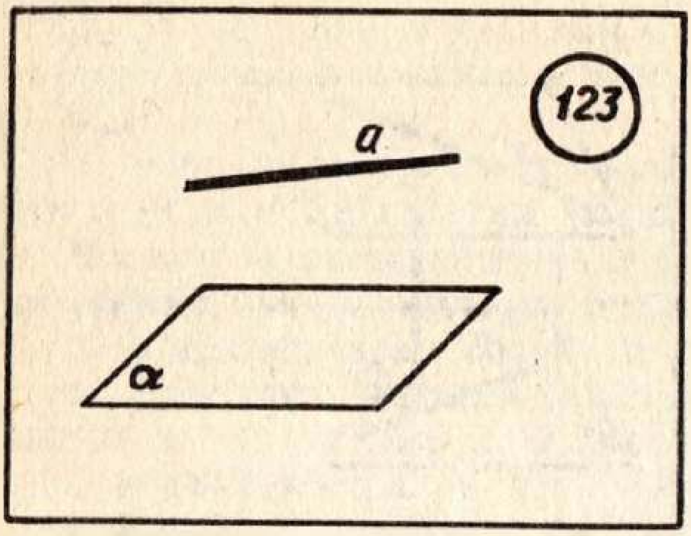
Чишү. a һәм b турылары бер яссылыкта ята, һәм шуңа күрә аларның һәркайсын кисүче теләсә нинди туры шул ук яссылыкта ята. Димәк, a һәм b турыларының һәркайсы c һәм d турыларының икесен дә кисеп үтә, c һәм d турылары a һәм b турылары белән бер яссылыкта ятарлар иде, ә моның булуы мөмкин түгел, чөнки c һәм d турылары чалышма турылар.

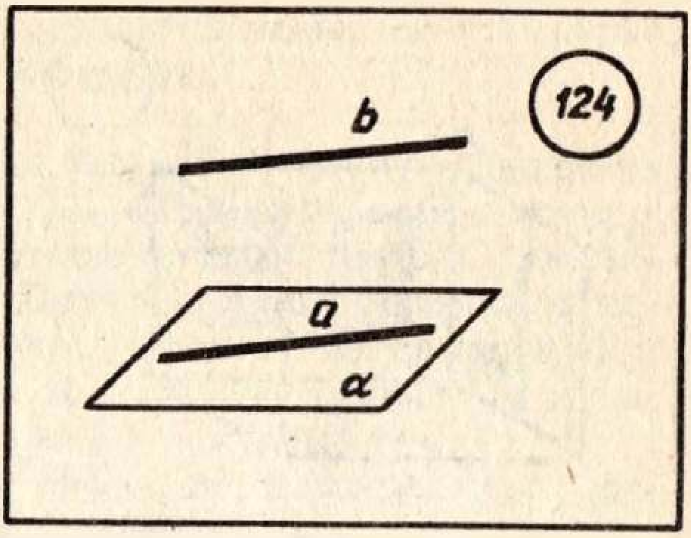
42. Туры белән яссылыкның параллельлеге. Туры белән яссылык кисешмәсәләр, ягъни уртак нокталары булмаса, алар *параллель* дип атала. Әгәр a турысы α яссылыгына параллель булса, $a \parallel \alpha$ дип язалар.

123 нче рәсемдә α яссылыгына параллель булган a турысы сурәтләнгән.

Т.2.4. Яссылыкта ятмаган туры шул яссылыктагы нинди дә булса турыга параллель булса, ул бу яссылыкка параллель була *(туры белән яссылыкның параллельлек билгесе)*.

Бу теорема конкрет очракта туры һәм яссылыкның параллель икәнлеген исбатларга мөмкинлек бирә. 124 нче рәсемдә


123


124

α яссылыгында яткан a турысына параллель b турысы сурәтләнгән, ягъни Т.2.4 буенча b турысы α яссылыгына параллель, ягъни $b \parallel \alpha$.

Мисал. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының туры почмак түбәсе C аша, гипотенузага параллель итеп, аннан 10 см ераклыкта яссылык үткәрелгән. Катетларның бу яссылыкка проекцияләре 30 һәм 50 см га тигез. Гипотенузаның шул ук яссылыкка булган проекциясен табарга.

Чишү. Турыпочмаклы BB_1C һәм AA_1C өчпочмакларыннан (125 нче рәсем) табабыз:

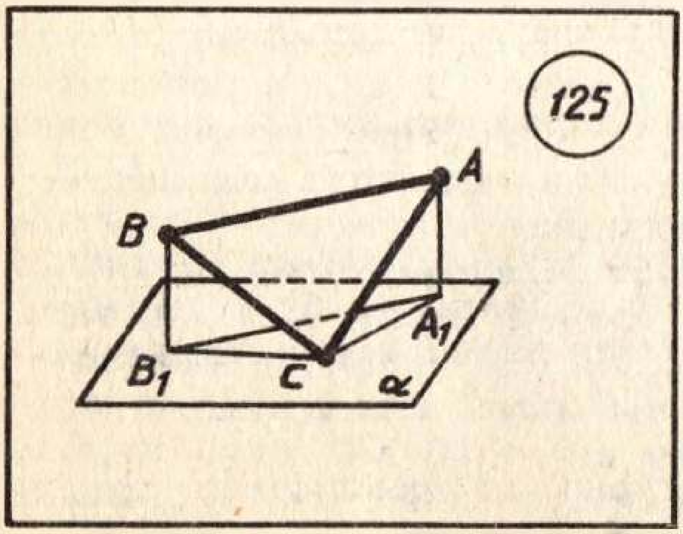
$$BC=\sqrt{10^2+30^2}=\sqrt{1000};\quad AC=\sqrt{10^2+50^2}=\sqrt{2600}.$$

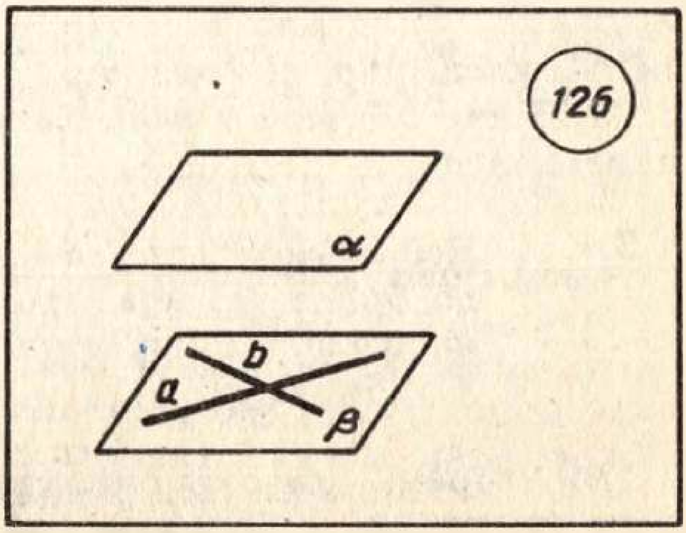
ABC өчпочмагыннан табабыз:

$$AB=\sqrt{1000+2600}=60.$$

AB гипотенузасының α яссылыгына проекциясе A_1B_1 гә тигез. AB гипотенузасы α яссылыгына параллель булганлыктан, $AB=A_1B_1$. Шулай итеп, $A_1B_1=60$ см.

43. Параллель яссылыклар. Ике яссылык кисешмәсәләр, алар *параллель* дип атала.


125


126

Т.2.5. **Әгәр ике яссылыкның берсе икенче яссылыкта кисешүче ике турыга параллель булса, бу ике яссылык үзара параллель була** ***(ике яссылыкның параллельлек билгесе).***

126 нчы рәсемдә α яссылыгы β яссылыгындагы кисешүче a һәм b турыларына параллель, ул вакытта Т.2.5 буенча бу яссылыклар параллель була.

Т.2.6. **Бирелгән яссылыктан читтә яткан нокта аша бирелгән яссылыкка параллель яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.**

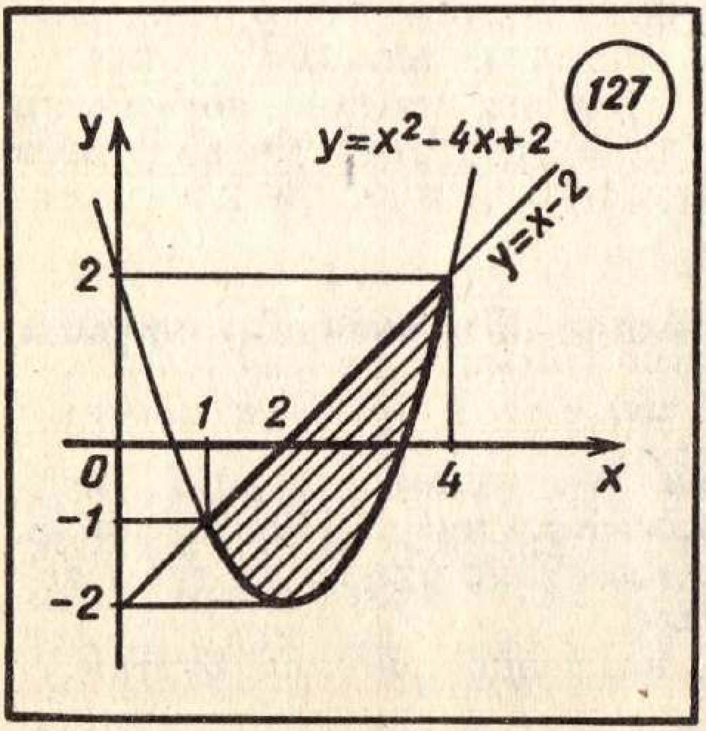
Т.2.7. **Әгәр ике параллель яссылык өченче яссылык белән кисешсә, аларның кисешү турылары параллель була.**

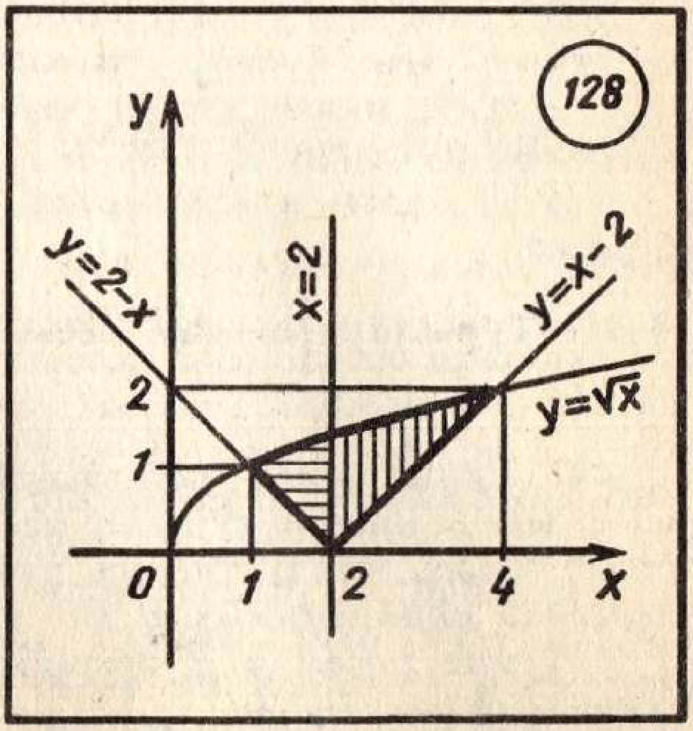
127 нче рәсемдә параллель α һәм β яссылыклары сурәтләнгән, ә γ яссылыгы аларны a һәм b турылары буенча кисә. Ул вакытта 2.7 теоремасы буенча a һәм b турылары параллель дип расларга була.

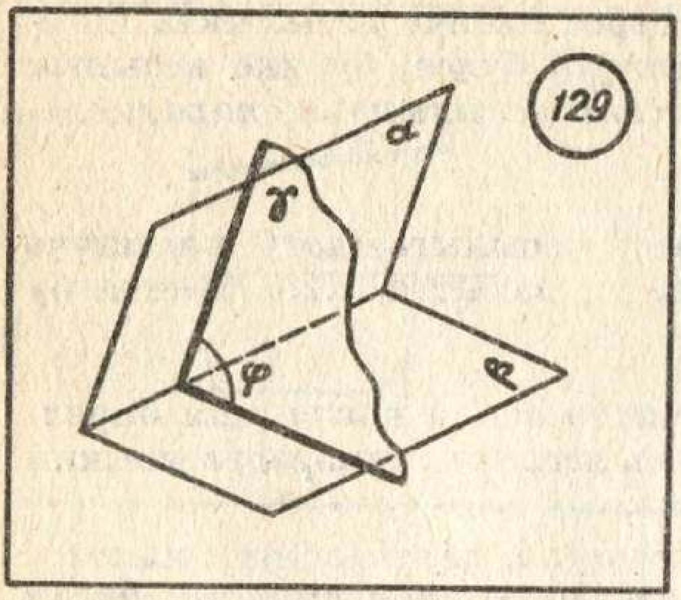
Т.2.8. **Параллель турыларның параллель яссылыклар арасында урнашкан кисемтәләре тигез була.**

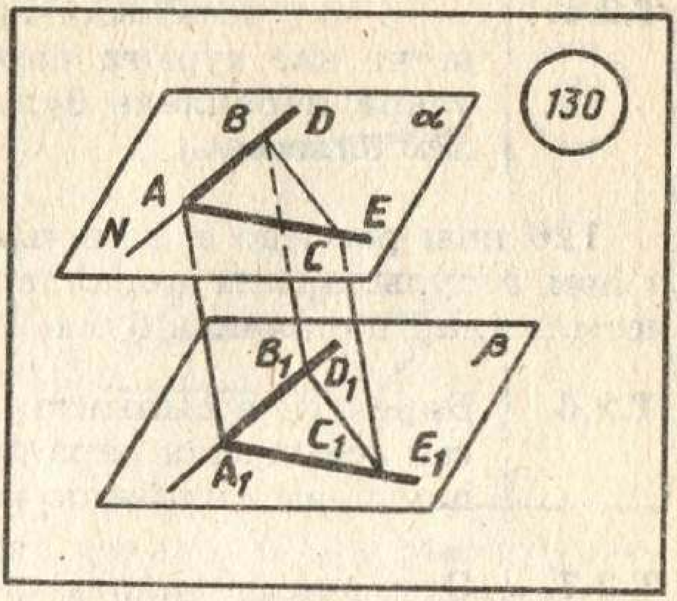
Т.2.8 буенча 128 нче рәсемдә сурәтләнгән AB һәм CD кисемтәләре тигез, чөнки $\alpha \parallel \beta$ һәм $a \parallel b$.

Бирелгән яссылыклар кисешсеннәр ди. Аларның кисешү турысына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрик. Ул бирелгән яссылыкларны ике туры буенча кисеп үтә. Бу турылар арасындагы почмак бирелгән *яссылыклар арасындагы поч-*









мак дип атала (129 нчы рәсем). Шул рәвешле билгеләнгән почмак кисүче яссылыкны ничек итеп алуга бәйле түгел.

Параллель яссылыклар арасындагы почмакның градуслы үлчәме нульгә тигез дип исәпләнә.

1 нче мисал. Яклары тиңдәшле рәвештә параллель булган почмакларның үзара тигез яки суммада ике туры почмак тәзүләрен исбатлагыз.

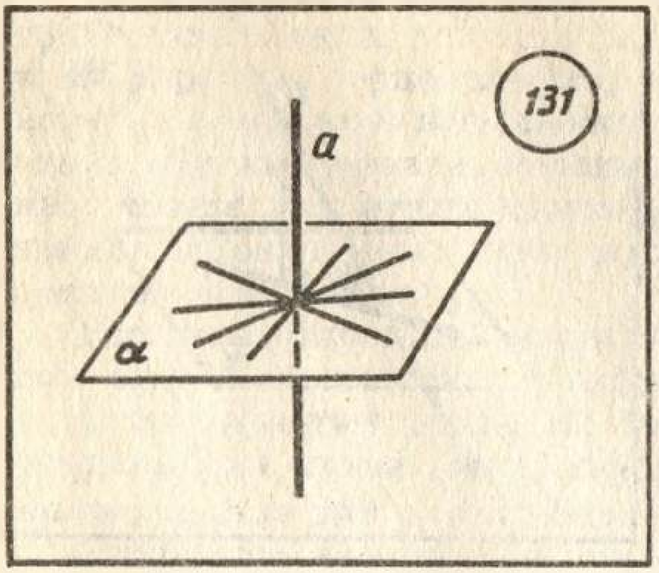
Чишү. DAE һәм $D_1A_1E_1$ почмакларының якларында $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ салабыз. A_1 һәм A, B_1 һәм B, C_1 һәм C нокталарын AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләре белән тоташтырабыз (130 нчы рәсем). ABB_1A_1 дүртпочмагы — параллелограмм, чөнки аның AB һәм A_1B_1 яклары тигез һәм параллель. ACC_1A_1 дүртпочмагы турында да шуны ук әйтергә була. Әйтелгәннәрдән BB_1 AA_1 гә тигез һәм параллель, ә AA_1 CC_1 гә тигез һәм параллель була, моннан BB_1 һәм CC_1 тигез һәм параллель, димәк, BCC_1B_1 — параллелограмм, шуңа күрә $BC = B_1C_1$.

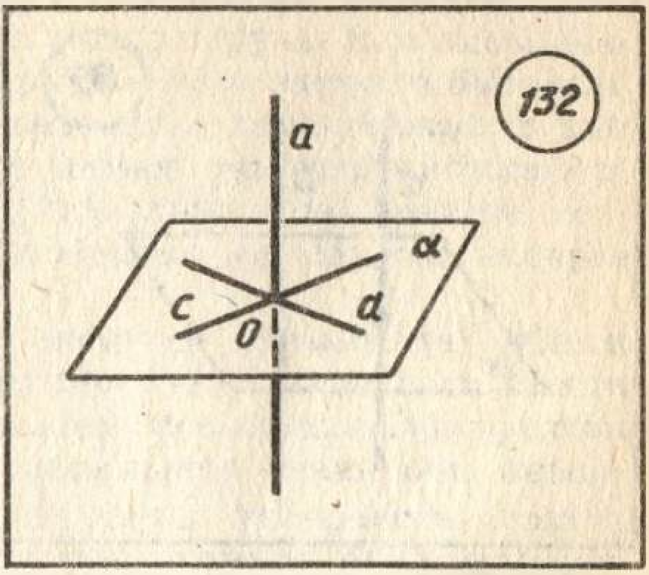
ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларын карыйк. Алар тиңдәшле өч тигез ягы буенча тигезләр (Т.1.17). Моннан $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ икәне килеп чыга. Аннары, чиктәш почмаклар суммасы буларак $\angle NAC + \angle BAC = 2d$. $\angle BAC$ ын аңа тигез $\angle B_1A_1C_1$ белән алыштырып, $\angle NAC + \angle B_1A_1C_1 = 2d$ ны табарбыз.

§ 10. Турыларның һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы

44. Туры белән яссылыкның перпендикулярлыгы. Әгәр яссылыкны кисүче туры бу яссылыктагы кисешү ноктасы аша үтүче теләсә нинди турыга перпендикуляр булса, ул туры яссылыкка *перпендикуляр* дип атала.

131 нче рәсемдә α яссылыгына перпендикуляр булган a турысы сурәтләнгән.





Т.2.9. Әгәр яссылыкны кисүче туры бу яссылыктагы кисешү ноктасы аша үтүче ике турыга перпендикуляр булса, ул туры яссылыкка перпендикуляр була.

Бу теореманы *туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесе* яки *ике перпендикуляр турындагы теорема* дип атыйлар.

132 нче рәсемдә c һәм d турыларына перпендикуляр, α яссылыгы белән a турысының кисешү ноктасы аша үтүче һәм α яссылыгында яткан a турысы сурәтләнгән. Т.2.9 буенча $a \perp \alpha$ дип расларга була.

Түбәндәге ике теоремада турыларның һәм яссылыкларның параллельлеге белән перпендикулярлыгының үзара бәйләнеше турында әйтелә.

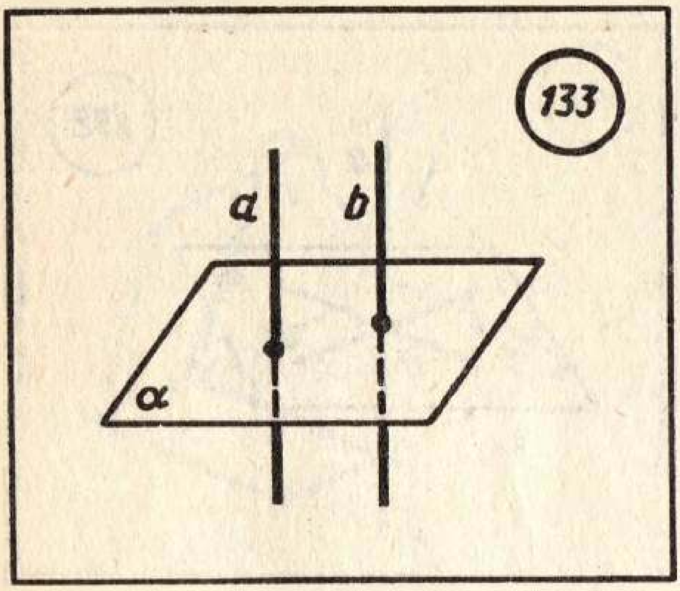
Т.2.10. Әгәр яссылык параллель ике турының берсенә перпендикуляр булса, икенчесенә дә перпендикуляр була.

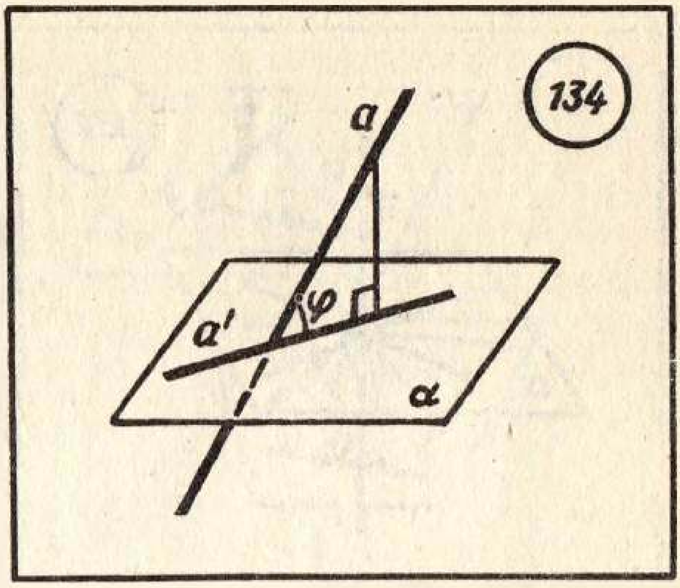
Т.2.11. Бер үк яссылыкка перпендикуляр булган ике туры параллель була.

133 нче рәсемдә 2.10 һәм 2.11 теоремаларында әйтеп үтелгән a, b турылары һәм α яссылыгы сурәтләнгән.

Туры һәм бу турының яссылыкка проекциясе арасындагы почмак *туры белән яссылык арасындагы почмак* дип атала.

134 нче рәсемдә α яссылыгы һәм аны кисеп үтүче *a турысы* сурәтләнгән. a' турысы a турысының *α яссылыгына проекциясе* ул. Ул вакытта φ почмагы *a турысы һәм α почмагы арасындагы почмак* була. Туры белән яссылык параллель булганда, алар арасындагы почмак нульгә тигез дип, ә алар перпендикуляр булганда 90° ка тигез дип исәпләнә. a турысы, аның α яссылыгына a' проекциясе һәм a турысының α яссы-


133

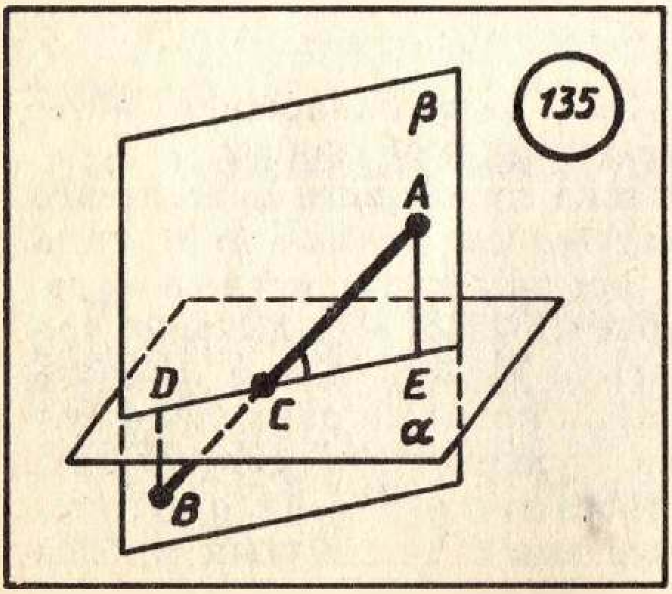

134

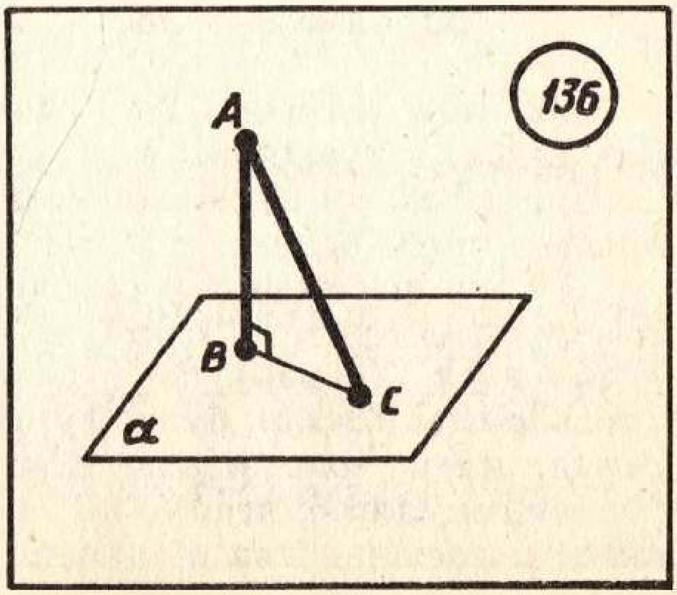
лыгы белән кисешү ноктасыннан шул яссылыкка торгызылган перпендикуляр бер яссылыкта яталар, шуңа күрә туры белән яссылык арасындагы почмак шул ук туры һәм яссылыкка үткәрелгән перпендикуляр арасындагы почмакны 90° ка кадәр тулыландыра.

Мисал. 10 см озынлыгындагы кисемтә яссылыкны кисеп үтә, шуның белән бергә аның очлары яссылыктан 3 һәм 2 см ераклыкта урнашканнар. Бирелгән кисемтә белән яссылык арасындагы почмакны табарга.

Чишү. A ноктасыннан (135 нче рәсем) α яссылыгына AE перпендикулярын төшерәбез. Кисешүче CA һәм CE турылары аша α яссылыгын ED турысы буенча кисүче β яссылыгын үткәрәбез. β яссылыгында DE турысына перпендикуляр төшерәбез. $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ ны табабыз (үзлектән исбатлагыз). Шарт буенча $AB = 10$ см, шуңа күрә $BC = 10 - AC$ һәм $\frac{3}{AC} = \frac{2}{10-AC}$, $30 - 3AC = 2AC$, $AC = 6$.

Шулай итеп, $\triangle ACE$ да катет $AE = 3$ см, ягъни гипотенузаның ($AC = 6$ см) яртысына тигез, димәк, ул 30° лы почмакка каршы ята, моннан $\angle ACE = 30°$.


135


136

45. Яссылыкка перпендикуляр һәм авышма. Бирелгән ноктаны яссылыкның ноктасы белән тоташтыручы һәм яссылыкка төшерелгән перпендикуляр турыда ятучы кисемтә *бирелгән ноктадан бирелгән яссылыкка төшерелгән перпендикуляр* дип атала. Бу кисемтәнең яссылыкта яткан очы *перпендикулярның нигезе* дип атала. Ноктадан яссылыкка төшерелгән перпендикулярның озынлыгы шул *ноктадан яссылыкка кадәрге ераклык* дип атала.

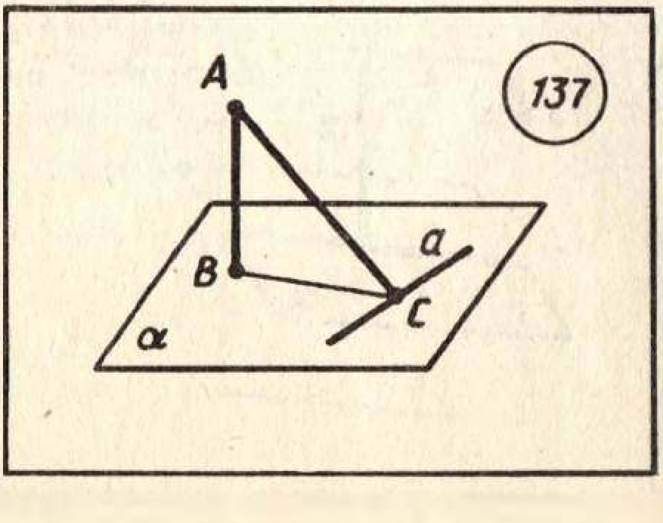
Бер очы бирелгән ноктада, икенчесе яссылыкта булган һәм әлеге яссылыкка перпендикуляр булмаган теләсә нинди кисемтә бирелгән ноктадан бирелгән яссылыкка үткәрелгән *авышма* дип атала. Кисемтәнең яссылыкта яткан очы *авышманың нигезе* дип атала. Бер үк ноктадан үткәрелгән перпендикуляр һәм авышманың нигезләрен тоташтыручы кисемтә *авышманың проекциясе* дип атала.

136 нчы рәсемдә A ноктасыннан α яссылыгына AB перпендикуляры һәм AC авышмасы үткәрелгән. B ноктасы — перпендикулярның нигезе, C ноктасы — авышманың нигезе, BC AC авышмасының α яссылыгына проекциясе.

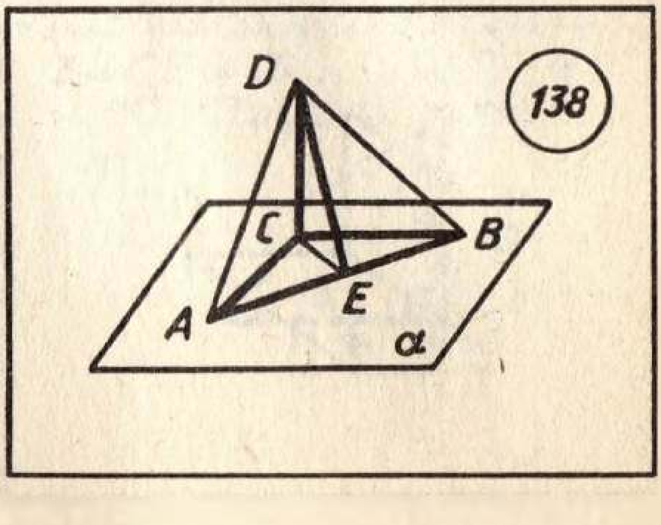
Турының нокталарыннан аңа параллель булган яссылыкка кадәр ераклыклар тигез булганга күрә, турының теләсә кайсы ноктасыннан шул яссылыкка кадәрге ераклык *турыдан параллель яссылыкка кадәрге ераклык* дип атала.

Т.2.12. Яссылыкта авышманың нигезе аша, аның проекциясенә перпендикуляр итеп үткәрелгән туры авышманың үзенә дә перпендикуляр була. Һәм киресенчә, әгәр яссылыктагы туры авышмага перпендикуляр икән, ул авышманың проекциясенә дә перпендикуляр була (өч перпендикуляр турындагы теорема).

137 нче рәсемдә α яссылыгына AB перпендикуляры һәм AC авышмасы үткәрелгән. α яссылыгында яткан a турысы AC авышмасының α яссылыгына проекциясе — BC га перпендикуляр. Т.2.12 буенча a турысы AC авышмасына перпен-



137



138

дикуляр. Әгәр a турысының AC авышмасына перпендикуляр икәне билгеле булса, Т.2.12 буенча ул туры аның проекциясе BC га да перпендикуляр булыр иде.

Мисал. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының катетлары 15 һәм 20 м га тигез. Туры почмаклы C түбәсеннән бу өчпочмак яссылыгына 35 м га тигез булган CD перпендикуляры үткәрелгән (138 нче рәсем). D ноктасыннан AB гипотенузасына кадәрге ераклыкны табарга.

Чишү. $AB \perp DE$ үткәрәбез. Шарт буенча DC — яссылыкка перпендикуляр, ягъни DE — авышма, CE — аның проекциясе, шуңа күрә өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $DE \perp AB$ шартыннан $CE \perp AB$ чыга.

$\triangle ABC$ дан табабыз: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{625}$, ягъни $AB=25$ м. ABC өчпочмагының CE биеклеген эзләү өчен

$S_{\triangle ABC}=\frac{AC\cdot CE}{2}=150$ м^2 ны табабыз.

Икенче яктан, $S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot CE}{2}$, моннан

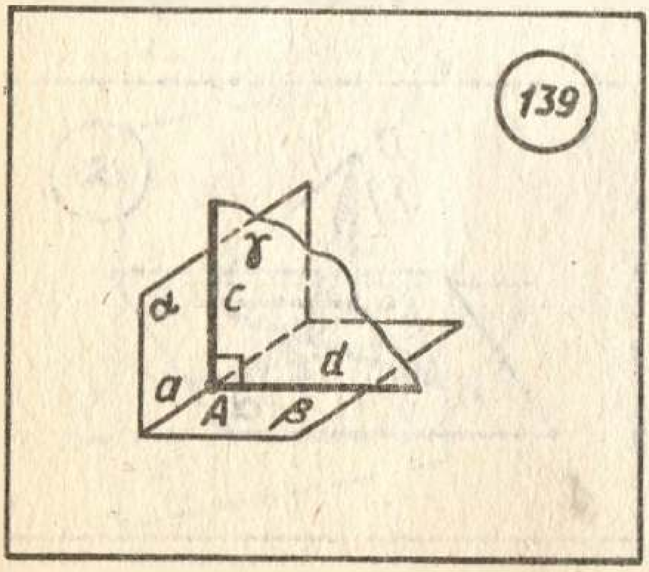
$CE=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$, ягъни $CE=12$ м.

$\triangle DCE$дан Пифагор теоремасы буенча

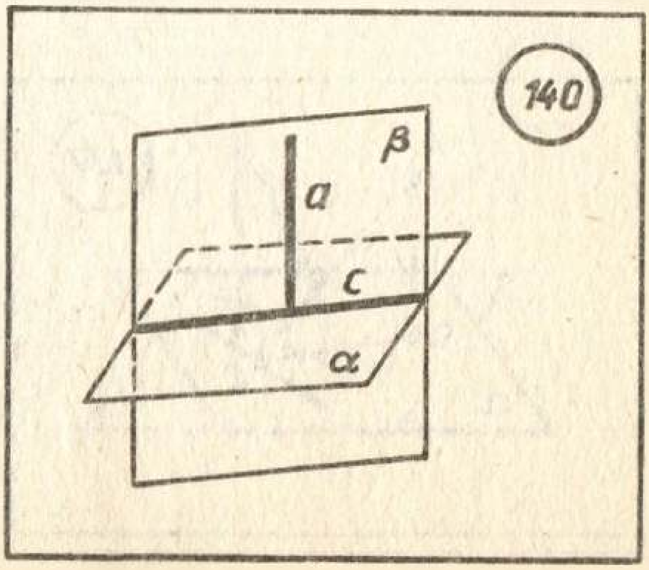
$$DE=\sqrt{DC^2+CE^2},\text{ ягъни } DE=37\text{ м.}$$

46. Яссылыкларның перпендикулярлыгы. Әгәр кисешүче ике яссылыкның кисешү сызыгына перпендикуляр булган телəсә нинди яссылык аларны перпендикуляр турылар буенча киссә, бу ике яссылык *перпендикуляр* дип атала.

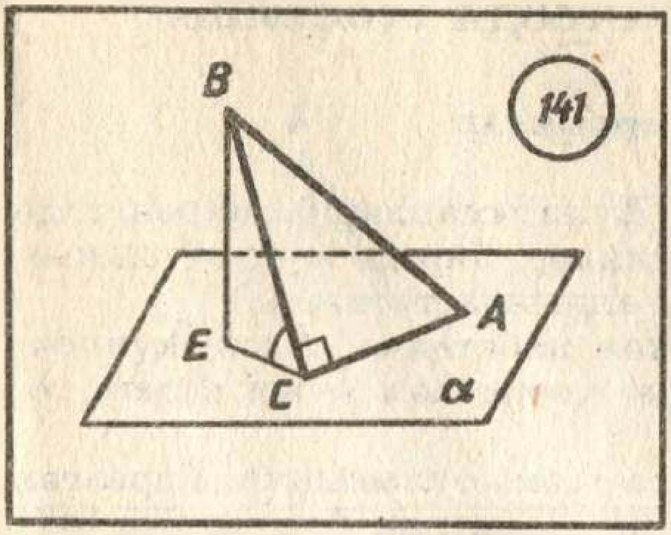
139 нчы рәсемдә a турысы буенча кисешүче α һәм β яссылыклары сурәтләнгән. γ яссылыгы a турысына перпендикуляр һәм α, β яссылыкларын кисеп үтә. Бу вакытта γ яссылыгы α яссылыгын c турысы буенча, ә β яссылыгын d турысы буенча кисә, өстәвенә $c \perp d$, ягъни билгеләмә буенча $\alpha \perp \beta$.



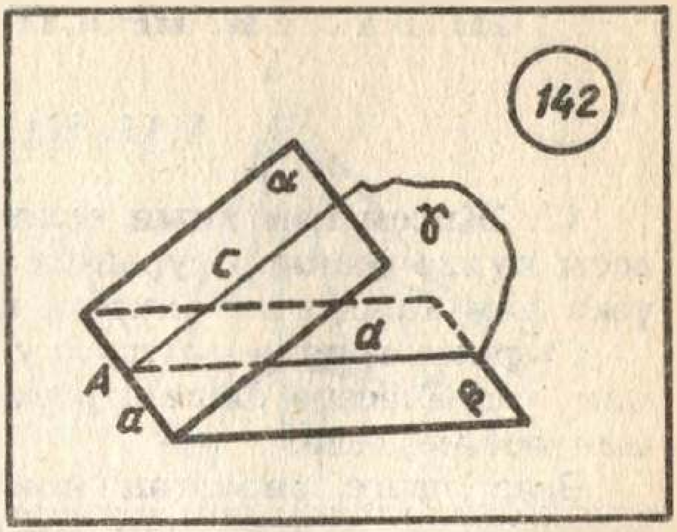
139



140



141



142

Т.2.13. Әгәр яссылык икенче яссылыкка перпендикуляр туры аша үтсә, ул яссылыклар перпендикуляр була *(яссылыкларның перпендикулярлык билгесе).*

140 нчы рәсемдә β яссылыгы $\alpha \perp a$ турысы аша үтә, ягъни Г.2.13 буенча β һәм α яссылыклары перпендикуляр була.

Т.2.14. Әгәр перпендикуляр булган ике яссылыкның берсендә яткан туры аларның кисешү сызыгына перпендикуляр булса, ул туры икенче яссылыкка да перпендикуляр була.

Мисал. Туры почмагы ACB, катеты AC булган һәм α яссылыгында яткан ABC өчпочмагы бу яссылык белән 45° ка тигез булган икекырлы почмак төзи. Әгәр $AC=20$ см һәм $AB:BC=3:1$ булса, B түбәсеннән α яссылыгына кадәрге ераклыкны табарга (141 нче рәсем).

Чишү. Шарт буенча $AB:BC=3:1$, $AC=20$ см, шуңа күрә, $BC=x$, $AB=3x$ дип тамгалап, Пифагор теоремасы буенча $\triangle ABC$дан $(3x)^2=20^2+x^2$ ны табабыз, моннан $x^2=50$, ягъни $BC^2=50$.

B ноктасыннан $\alpha \perp BE$ үткәрәбез (141 нче рәсем), E һәм C ны тоташтырабыз. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $AC \perp CE$, чөнки $AC \perp BC$. Шулай булгач, $\angle BCE$ — шарт буенча 45° ка тигез булган икекырлы почмакның сызыкча почмагы (п. 48), $\triangle CBE$ да $\angle BCE=45°$, $\angle BEC=90°$, шуңа күрә $BE=CE$, ягъни $2BE^2=BC^2$ (Пифагор теоремасы буенча), моннан $2BE^2=50$, $BE=5$ см.

§ 11. Күпкырлыклар

47. Җисем һәм аның өслеге. Күппочмакларны өйрәнгәндә яссы күппочмаклар турында сөйлиләр, биредә күппочмакның үзен һәм аның эчке өлкәсен күз алдында тоталар.

Стереометриядә дә шул ук хәл кабатлана. Яссы күппочмак төшенчәсенә охшаш рәвештә җисем һәм аның өслеге төшенчәсе кертелә.

Әгәр үзәге бирелгән ноктада һәм тулысынча бирелгән фигураныкы булган шар бар икән, геометрик фигураның әлеге ноктасы эчке нокта дип атала. Әгәр фигураның барлык нокталары эчке нокталар булса һәм теләсә нинди ике ноктасын тулысынча фигураныкы булган сынык сызык белән тоташтырырга мөмкин булса, бу фигура *өлкә* дип атала.

Әгәр үзәге бер ноктада булган теләсә нинди шар ул фигураныкы булган һәм аныкы булмаган нокталарны эченә алса, пространствоның ул ноктасы бирелгән фигураның чик ноктасы дип атала. Өлкәнең чик нокталары өлкәнең *чиген* төзиләр.

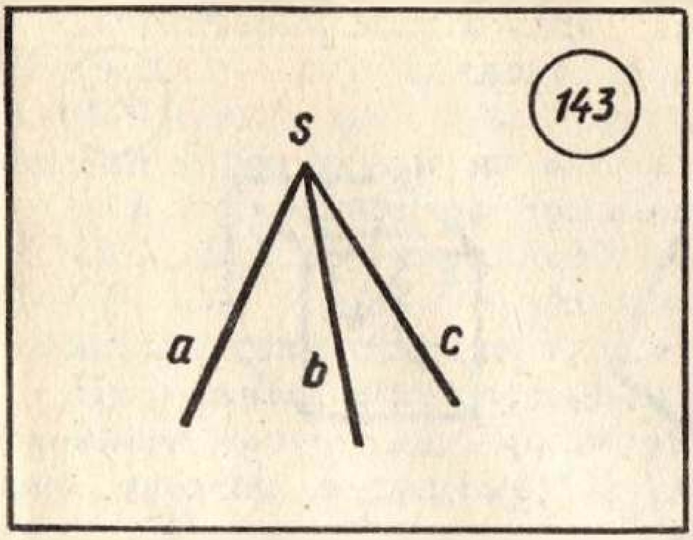
Чикле өлкә үзенең чиге белән *җисем* дип атала. Җисемнең чиге җисемнең *өслеге* дип атала. Әгәр җисемне чикле сандагы өчпочмаклы пирамидаларга бүлгәләргә мөмкин булса, ул *гади* җисем дип атала.

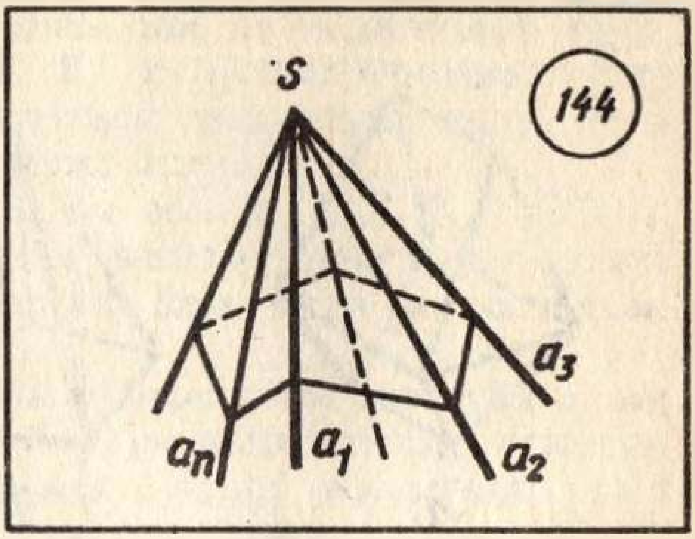
Иң гади очракта, ниндидер турыга (әйләнү күчәренә) перпендикуляр булган яссылыклар белән үзәкләре бу турыда яткан түгәрәкләр буенча кисешүче җисем *әйләнү җисеме* дип атала. Цилиндр, конус, шар әйләнү җисемнәренә мисаллар булып торалар.

48. Күпкырлы почмаклар. Күпкырлыклар. Уртак туры белән чикләнгән ике ярымъяссылыктан торган фигура икекырлы почмак дип атала. Ярымъяссылыклар ике кырлы почмакның *кырлары* дип, ә аларны чикләүче туры — *кабыргасы* дип атала.

142 нче рәсемдә кабыргасы a һәм кырлары α һәм β булган икекырлы почмак сурәтләнгән.

Икекырлы почмакның кабыргасына перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылык аның кырларын ике ярымтуры буенча кисеп үтә. Бу ярымтурылар белән төзелгән почмак икекырлы почмакның *сызыкча почмагы* дип атала. Икекырлы почмакка тиңдәшле сызыкча почмакның үлчәме икекырлы почмакның үлчәме итеп алына. Әгәр икекырлы почмакның a кабыргасындагы A ноктасы аша бу кабыргага перпендикуляр итеп γ яссылыгын үткәрсәк, бу вакытта ул α һәм β яссылыкларын c һәм d ярымтурылары буенча кисәр (142 нче рәсем); $\angle(cd)$ —





бирелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы. Бу сызыкча почмакның градуслы үлчәме икекырлы почмакның градуслы үлчәме була. Икекырлы почмакның үлчәме сызыкча почмакны кайда алуга бәйле түгел.

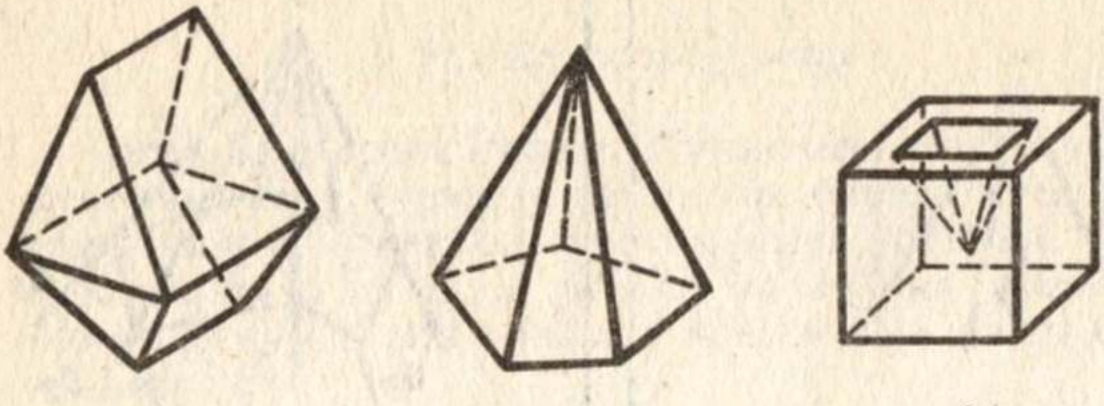
Өч яссы почмактан: (ab), (bc) һәм (ac) дан төзелгән фигура өчкырлы (abc) *почмагы* дип атала (143 нче рәсем). Бу яссы почмаклар өчкырлы почмакның *кырлары* дип, ә аларның яклары — *кабыргалары* дип атала. Яссы почмакларның уртак түбәсе өчкырлы почмакның *түбәсе* дип атала. Өчкырлы почмакның кырлары һәм аның дәвамнары белән төзелгән икекырлы почмаклар өчкырлы почмакның *икекырлы почмаклары* дип атала.

(a_1a_2), (a_2a_3), ..., (a_na_1) яссы почмакларыннан төзелгән фигура буларак, $(a_1a_2a_3...a_n)$ күпкырлы почмагына төшенчә, аналогия буенча бирелә (144 нче рәсем). Өчкырлы почмак өчен кыр, кабырга, икекырлы почмак төшенчәләре ничек билгеләнгән булса, күпкырлы почмак өчен дә шулай ук билгеләнә.

Чикле сандагы яссылыклар белән чикләнгән җисем *күпкырлык* дип атала (145 нче рәсем). Бу — аның өслеге тулысынча чикле сандагы яссылыкларда урнашкан дигән сүз.

Әгәр күпкырлык үзен чикләүче һәм яссылыкның бер ягында гына ятса, ул *кабарынкы күпкырлык* дип атала (145 нче рәсем, *а*, *б*). Кабарынкы күпкырлыкның өслеге белән аны чикләүче яссылыкның уртак кисәге *күпкырлыкның кыры* дип атала. Кабарынкы күпкырлыкның кырлары кабарынкы күппочмаклардан тора. Кырның яклары — *күпкырлыкның кабыргалары* дип, ә түбәләре *күпкырлыкның түбәләре* дип атала.

49. Призма. Параллелепипед. Куб. Параллель күчерү белән тәңгәл китерелә торган ике яссы күппочмактан һәм бу күппочмакларның тиңдәш түбәләрен тоташтыручы кисемтәләрдән торган күпкырлык *призма* дип атала. Күппочмаклар — *призманың нигезләре* дип, ә тиңдәшле түбәләрне то-



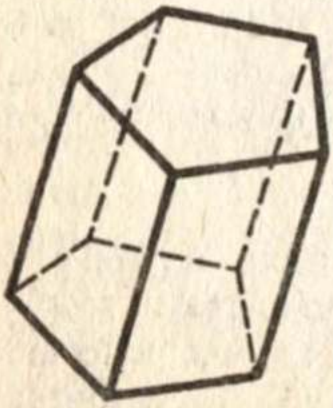
а)   б)   в)

145

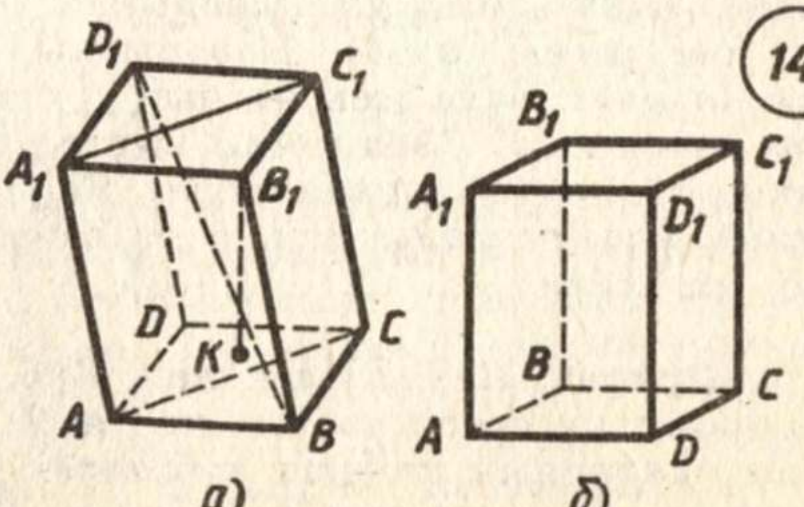
таштыручы кисемтәләр *призманың ян кабыргалары* дип атала (146 нчы рәсем).

Параллель күчерү хәрәкәт булганга күрә, *призманың нигезләре тигез.* Параллель күчерүдә яссылык параллель яссылыкка (яки үзенә) күчкәнлектән, призманың нигезләре параллель яссылыкларда ята. Параллель күчерүдә нокталар параллель (яки тиңдәш килүче) турылар буенча бер үк ераклыкка күчә, шуңа күрә призманың *ян кабыргалары параллель һәм тигез.*

147 нче *а* рәсемдә дүртпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасы сурәтләнгән. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ яссы күппочмаклары тиешле параллель күчерү белән тәңгәл китереләләр һәм алар призманың нигезләре булалар, ә AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 кисемтәләре призманың ян кабыргалары булып тора. Призманың нигезләре $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ тигезләр (параллель күчерү хәрәкәт ул һәм фигураны үзенә тигез фигурага күчерә, п. 79). Ян кабыргалары AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 параллель һәм тигезләр.



146



а)   б)

147

Призманың өслеге нигезләреннән һәм ян өслегеннән тора. *Ян өслеге — параллелограммнар.* Бу параллелограммнарның һәркайсының ике ягы — нигезләренең тиңдәшле яклары, ә калган икесе күрше ян кабыргалары була.

147 нче *а* рәсемдә призманың ян өслеге ABB_1A_1, BCC_1B_1, ADD_1A_1, DCC_1D_1 параллелограммнарыннан тора. Тулы өслеге $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ нигезләреннән һәм алда күрсәтелгән параллелограммнардан тора.

Призманың нигез яссылыклары арасындагы ераклык аның *биеклеге* дип атала. Призманың бер үк кыр өстендә ятмаган ике түбәсен тоташтыручы кисемтә, аның *диагонале* дип атала. Призманың бер үк кыр өстендә ятмаган ике ян кабыргасы аша үтүче яссылык белән киселе *диагональ киселе* дип атала.

147 нче *а* рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасы сурәтләнгән, B_1K — аның биеклеге, D_1B — диагональләрнең берсе. ACC_1A_1 киселе бу призмада диагональ кисемнәренең берсе була.

Призманың ян кабыргалары нигезләренә перпендикуляр булса, ул *туры призма* дип атала. Ян кабыргалары нигезләренә перпендикуляр булмаса, ул *авыш призма* дип атала. Туры призманың нигезләре төзек күппочмаклардан торса, ул *төзек призма* дип атала.

147 нче *а* рәсемдә — авыш призма, ә 147 нче *б* рәсемендә туры призма сурәтләнгән, биредә AA_1 кабыргасы призманың нигезләренә перпендикуляр. 148 нче рәсемдә төзек призмалар сурәтләнгән, аларның нигезләрендә тиңдәшле рәвештә төзек өчпочмак, квадрат, төзек алтыпочмак ята.

Призманың нигезе параллелограмм булса, ул параллелепипед дип атала. Параллелепипедның кырлары — параллелограммнар. 147 нче *а* рәсемдә — авыш параллелепипед, 147 нче *б* рәсемдә туры параллелепипед сурәтләнгән.

Параллелепипедның уртак түбәләре булмаган кырлары *каршы ятучы кырлары* дип атала. 147 нче *а* рәсемдә ABB_1A_1 һәм CDD_1C_1 кырлары каршы ятучы кырлар.

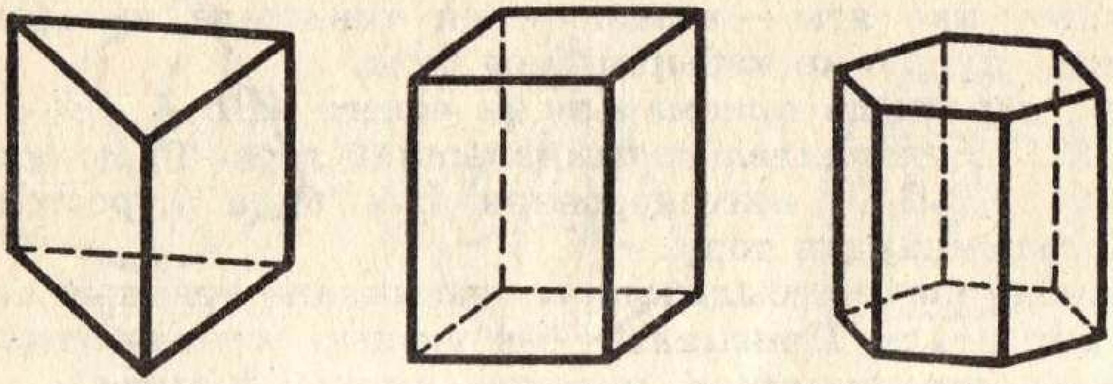
Параллелепипедның кайбер *үзлекләрен* исбатларга мөмкин.

Т.3.1. Параллелепипедның каршы ятучы кырлары параллель һәм тигез.

Т.3.2. Параллелепипедның диагональләре бер ноктада кисешәләр һәм кисешү ноктасында урталай бүленәләр.

Параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аның *симметрия үзәге* була.

Нигезендә турыпочмаклык булган туры параллелепипед *турыпочмаклы параллелепипед* дип атала. Турыпочмаклы параллелепипедның барлык кырлары — турыпочмаклыклар.



148

Барлык кабыргалары тигез булган турыпочмаклы параллелепипед куб дип атала.

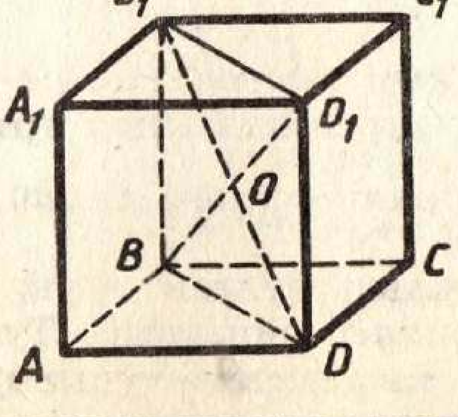
Турыпочмаклы параллелепипедның параллель булмаган кабыргаларының озынлыклары аның *сызыкча үлчәмнәре* яки *үлчәнешләре* дип атала. Турыпочмаклы параллелепипедның өч сызыкча үлчәме бар.

Турыпочмаклы параллелепипед өчен түбәндәге теорема дөрес:

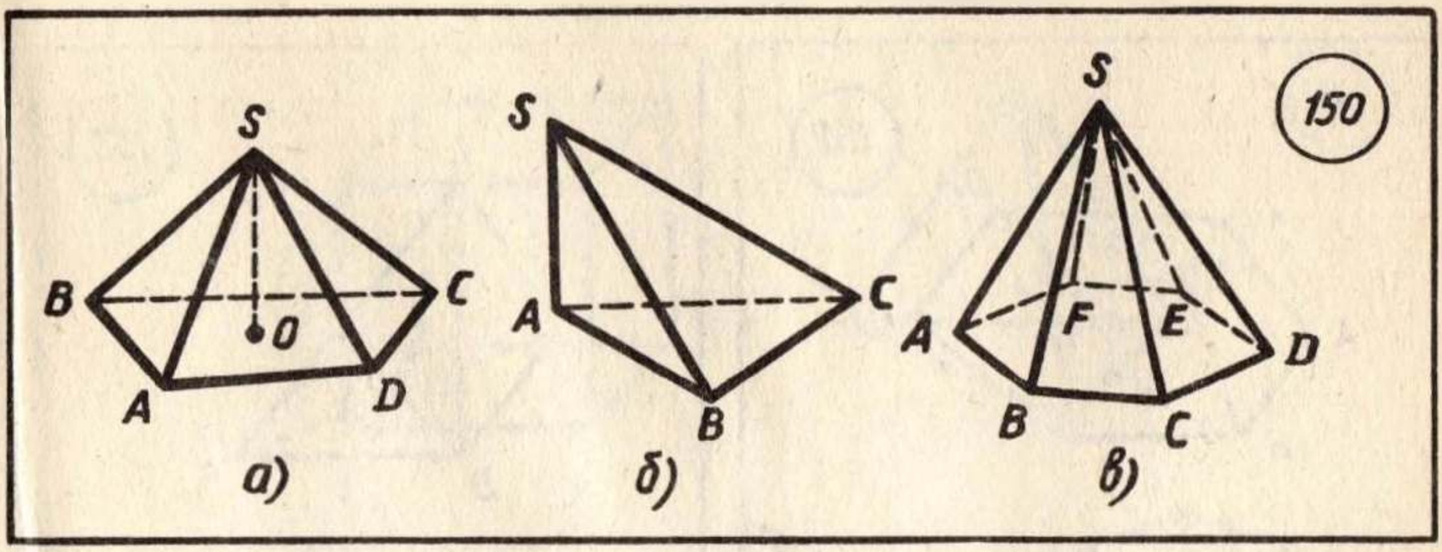
Т.3.3. **Турыпочмаклы параллелепипедның теләсә кайсы диагоналенең квадраты аның өч сызыкча үлчәменең квадратлары суммасына тигез.**

Мәсәлән, кабыргасы a булган $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында (149 нчы рәсем) диагональләре тигез: $B_1D = BD_1 = AC_1 = A_1C = a\sqrt{3}$.

50. Пирамида. Яссы күппочмактан — *пирамиданың нигезеннән,* нигез яссылыгында ятмаган ноктадан — *пирамиданың түбәсеннән* һәм түбәне нигез нокталары белән тоташтыручы барлык кисемтәләрдән торган күпкырлык *пирамида* дип атала (150 нче рәсем). Пирамиданың түбәсен нигез түбәләре белән тоташтыручы кисемтәләр *ян кабыргалары* дип атала.



149


150

а) б) в)

150 нче *а* рәсемдә $SABCD$ пирамидасы сурәтләнгән. $ABCD$ дүртпочмагы — пирамиданың нигезе, S ноктасы — пирамиданың түбәсе SA, SB, SC һәм SD — пирамиданың кабыргалары.

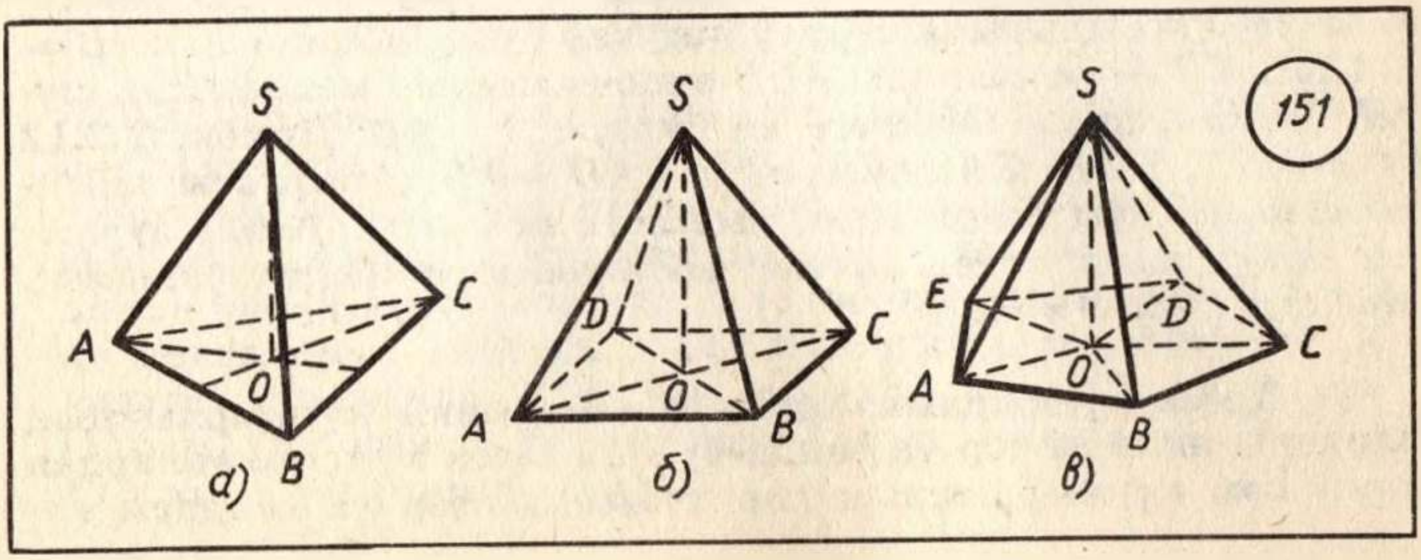
Пирамиданың түбәсеннән нигез яссылыгына төшерелгән перпендикуляр пирамиданың *биеклеге* дип атала. 150 нче *а* рәсемдә SO — пирамиданың биеклеге.

Пирамиданың нигезендә n-почмак ятса, ул n-почмаклы пирамида дип атала. Өчпочмаклы пирамиданы *тетраэдр* дип тә атыйлар.

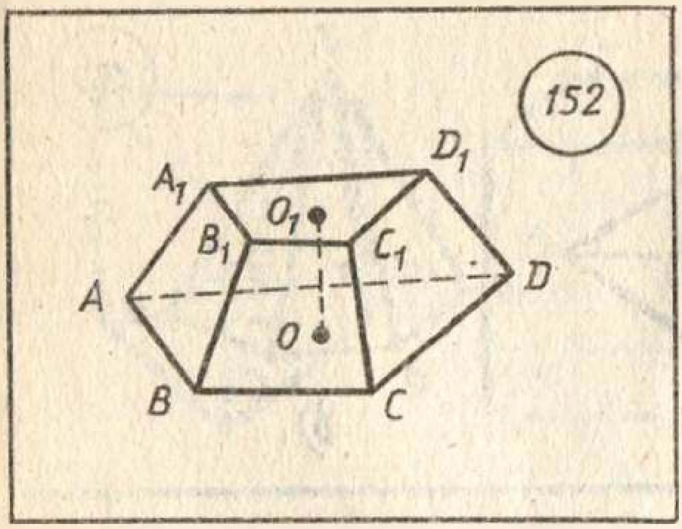
151 нче *а* рәсемдә өчпочмаклы пирамида, яки тетраэдр, 151 нче *б* рәсемдә дүртпочмаклы пирамида, 151 нче *в* рәсемендә алтыпочмаклы пирамида сурәтләнгән.

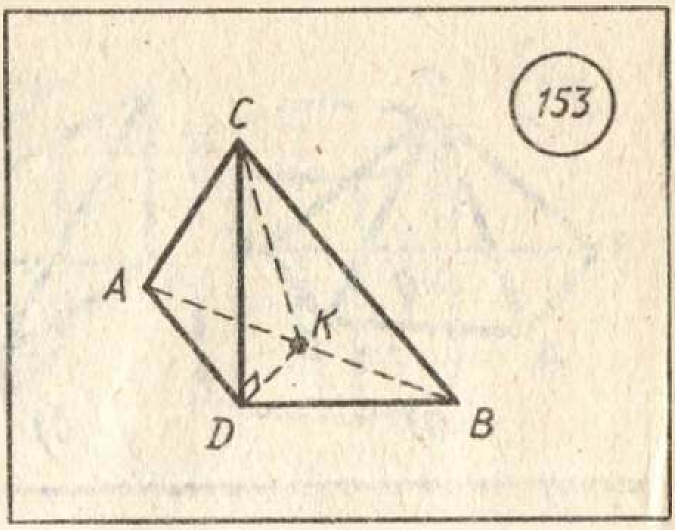
Т.3.4. **Пирамиданың нигезенә параллель һәм аны кисеп үтүче яссылык аңардан охшаш пирамида кисә.**

Пирамиданың нигезе төзек күппочмак булып, биеклегенең нигезе шул күппочмакның үзәге белән тәңгәл килсә, ул *төзек пирамида* дип атала. 151 нче рәсемдә төзек пирамидалар сурәтләнгән. Төзек пирамиданың ян кабыргалары тигез; шулай булгач, ян кырлары — үзара тигез булган тигезьянлы өчпоч-


151

а) б) в)


152


153

маклар. Төзек пирамида ян кырының түбәдән үткәрелгән биеклеге *апофема* дип атала.

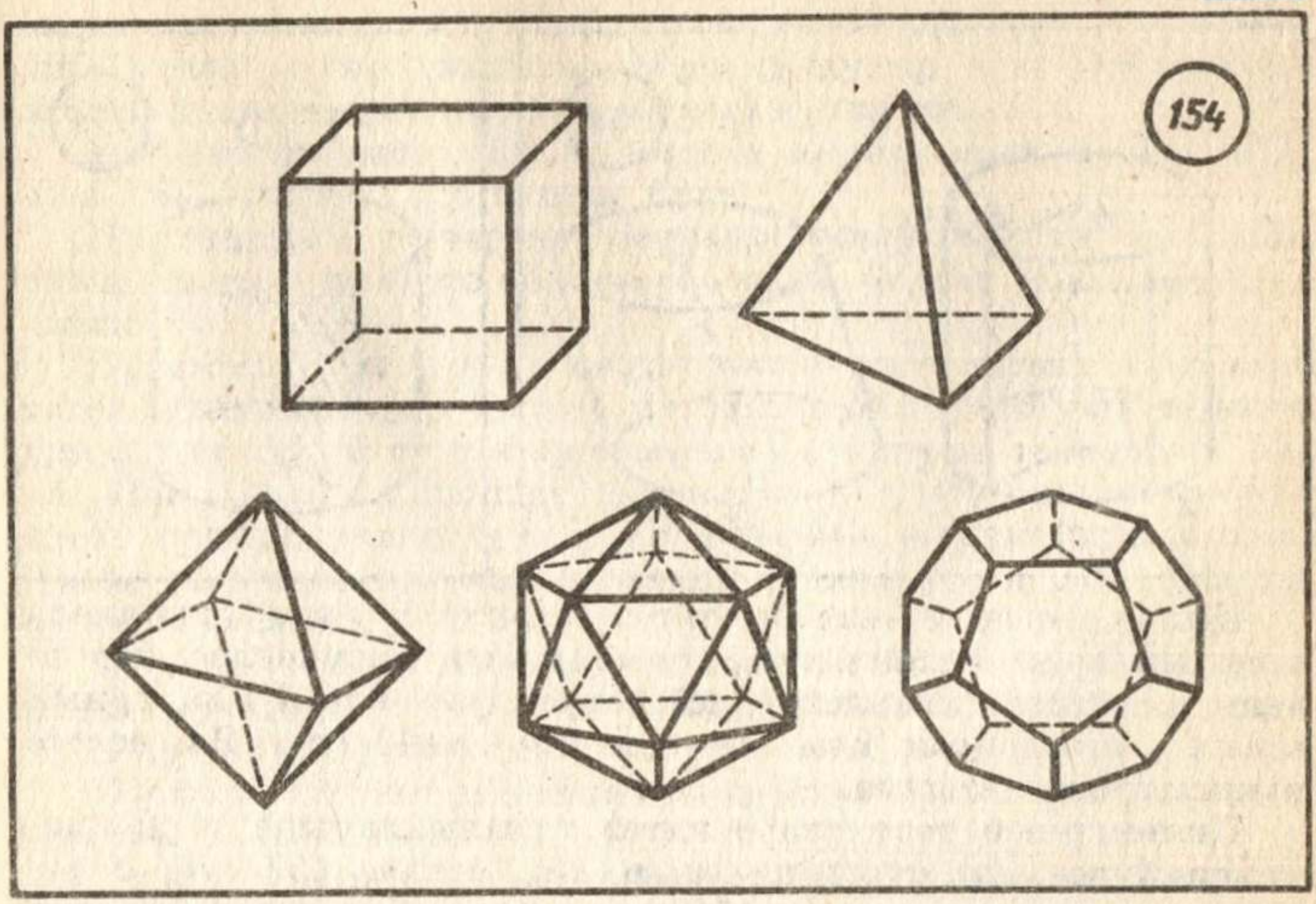
Т.3.4 буенча пирамиданың нигез яссылыгы α га параллель рәвештә пирамиданы кисүче β яссылыгы аңардан охшаш пирамида кисә. Бу пирамиданың икенче кисәге шулай ук күпкырлык була һәм ул *кисек пирамида* дип атала. Кисек пирамиданың параллель α һәм β яссылыкларында яткан кырлары *пирамиданың нигезләре* дип атала; калган кырлары *ян кырлары* дип атала. Кисек пирамиданың нигезләре — охшаш (ул гына да түгел, гомотетик) күппочмаклар, ян кырлары — трапецияләр. 152 нче рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кисек пирамидасы сурәтләнгән.

Кисек пирамида төзек пирамидадан киселгән булса, ул шулай ук *төзек* дип атала. Төзек кисек пирамиданың ян кырлары — үзара тигез булган тигезьянлы трапецияләр; аларның биеклекләре *апофемалар* дип атала.

Мисал. $ABCD$ тетраэдрында CD кабыргасы AD га перпендикуляр. $CD \perp BD$, $CD = 1$ кабыргасы янындагы икекырлы почмак 120° ка тигез, ә $AD = BD = \sqrt{2}$. AB кабыргасы янындагы икекырлы почмакның зурлыгын табарга.

Чишү. K — AB кабыргасының уртасы булсын (153 нче рәсем). CD кисемтәсе ABD яссылыгындагы кисешүче BD һәм AD турыларына перпендикуляр, димәк, Т.2.9 буенча CD кабыргасы ABD яссылыгына перпендикуляр була, моннан $\angle ADB = 120^\circ$. KD — тигезьянлы ADB өчпочмагының медианасы, шулай булгач, аның биеклеге дә була, $KD \perp AB$. Димәк, Т.2.12 буенча $KC \perp AB$. Ул вакытта $\angle CKD$ — AB кабыргасы янындагы икекырлы почмакның сызыкча почмагы. Аның зурлыгын табу кыен түгел (моны мөстәкыйль рәвештә эшләгез). Җавап: $\angle CKD = 45^\circ$.

51. Төзек күпкырлыклар. Әгәр кабарынкы күпкырлыкның кырлары яклары бер үк санда булган төзек күппочмаклардан торса һәм күпкырлыкның һәр түбәсендә бер үк сандагы ка-



быргалары очрашса, ул кабарынкы күпкырлык *төзек* күпкырлык дип атала.

Биш төрле кабарынкы төзек күпкырлык бар (154 нче рәсем): *төзек тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.* Төзек тетраэдр һәм куб турында алда әйтелде (п. 49, 50). Төзек тетраэдрның һәм кубның һәр түбәсендә өчәр кабырга очраша.

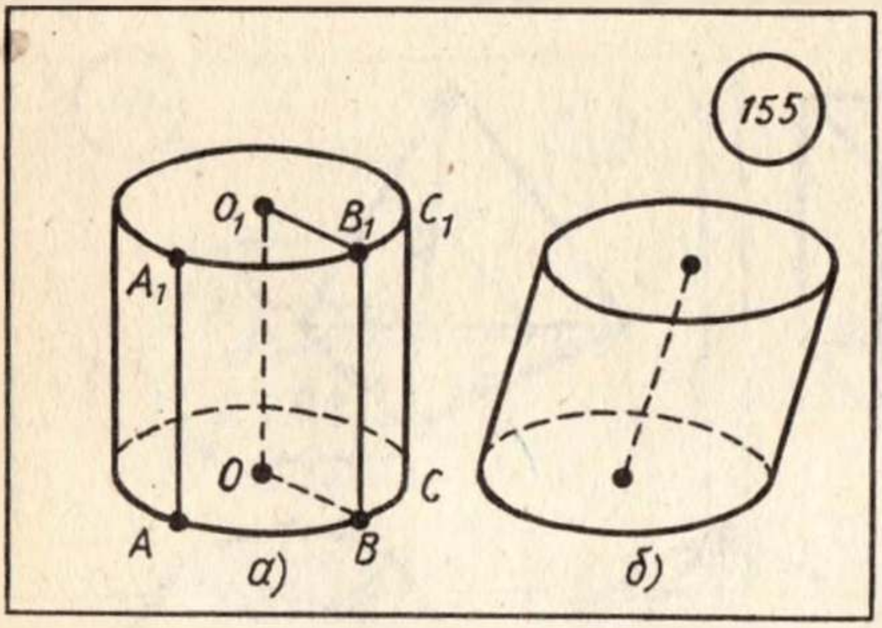
Октаэдрның кырлары — төзек өчпочмаклар. Аның һәр түбәсендә дүртәр кабырга очраша.

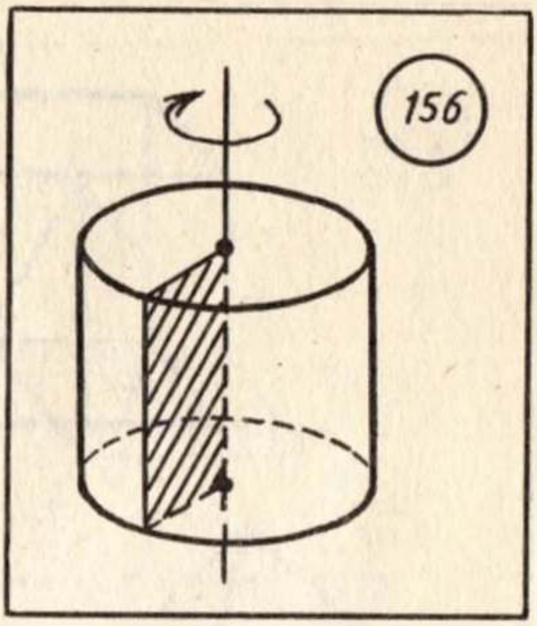
Додекаэдрның кырлары — төзек бишпочмаклар. Аның һәр түбәсендә өчәр кабырга очраша.

Икосаэдрның кырлары — төзек өчпочмаклар, ләкин тетраэдрдан һәм октаэдрдан аермалы буларак, һәр түбәсендә бишәр кабыргасы очраша.

§ 12. Әйләнү җисемнәре

52. Цилиндр. Параллель күчергәндә тәңгәл килә торган ике түгәрәктән һәм бу түгәрәкләрнең тиңдәшле нокталарын тоташтыручы барлык кисемтәләрдән торган җисем *цилиндр* (төгәлрәк әйткәндә, түгәрәк цилиндр) дип атала. Түгәрәкләр *цилиндрның нигезләре* дип, ә түгәрәк әйләнәләренең тиңдәшле нокталарын тоташтыручы кисемтәләр *цилиндрның төзүчеләре* дип атала. 155 нче рәсемдә цилиндр сурәтләнгән. O һәм O_1 үзәкле түгәрәкләр — аның нигезләре, AA_1, BB_1, CC_1 аның төзүчеләре була.



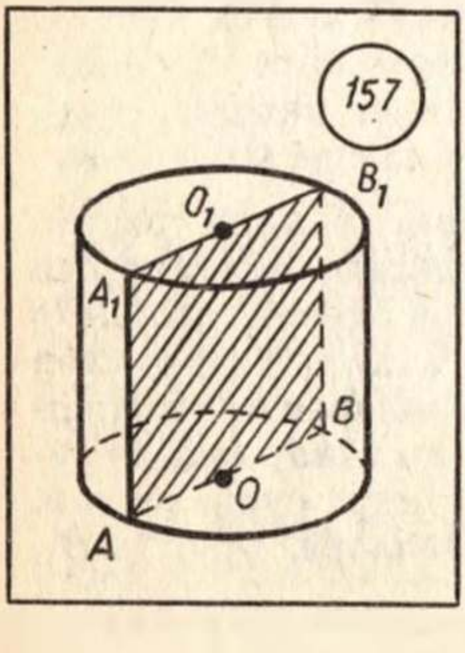


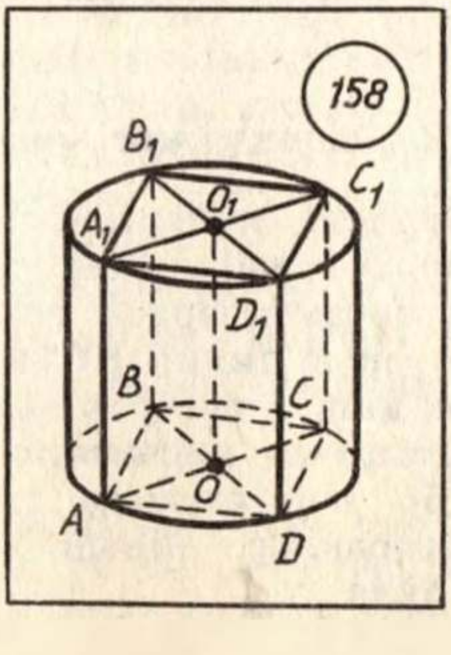
Цилиндрның нигезләре тигез икәнлеген һәм параллель яссылыкларда ятканлыгын, цилиндрның төзүчеләре параллель һәм тигез икәнлеген исбатларга мөмкин. Цилиндрның өслеге нигезләрдән һәм *ян өслектән* гыйбарәт. Ян өслеге төзүчеләрдән төзелгән.

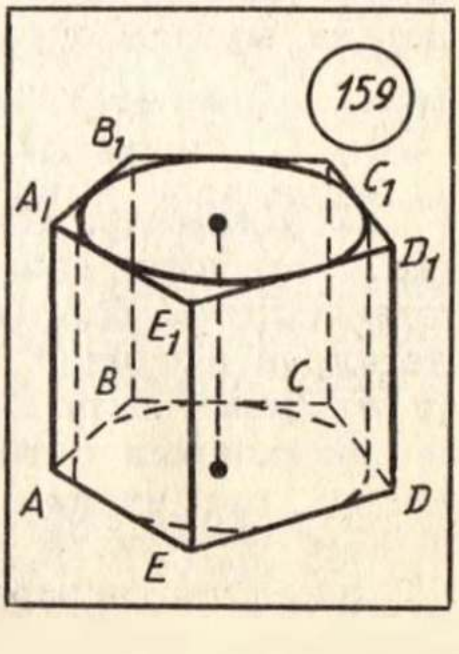
Цилиндрның төзүчеләре нигез яссылыкларына перпендикуляр булса, ул туры цилиндр дип атала. 155 нче *б* рәсемдә — авыш цилиндр, ә 155 нче *а* рәсемендә туры цилиндр сурәтләнгән.

Киләчәктә без бары тик туры цилиндрны гына карарбыз һәм кыскалык өчен цилиндр дип кенә әйтербез. Аны, турыпочмаклыкның бер ягын күчәр итеп алып, шул як тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан дип карарга мөмкин (156 нчы рәсем).

Цилиндрның нигез радиусы аның *радиусы* дип атала. Нигез яссылыклары арасындагы ераклык цилиндрның *биеклеге* дип атала. Нигезләренең үзәкләре аша үтүче туры *цилиндрның күчәре* дип атала. Ул төзүчеләргә параллель. Цилиндрның күчәре аша үтүче яссылык белән кисеме *күчәр*







киселе дип атала. Цилиндрның төзүчесе аша шул ук төзүче аша үткән күчәр киселенә перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылык цилиндрга *орынма яссылык* дип атала.

157 нче рәсемдә ABB_1A_1 киселе цилиндрның күчәре OO_1 аша үтә, ягъни күчәр киселе була.

Цилиндрның күчәренә перпендикуляр булган яссылык аның ян өслеген нигез әйләнәсенә тигез булган әйләнә буенча кисеп үтә.

Призманың нигезләре цилиндрның нигезләренә камалган тигез күппочмаклар булса, ул цилиндрга камаулы призма дип атала. Аның ян кабыргалары цилиндрның төзүчеләре була. Призманың нигезләре цилиндрның нигезләрен камаучы тигез күппочмаклар булса, ул *камаучы призма* дип атала. Аның кырларының яссылыклары цилиндрның ян өслегенә орынып торалар.

158 нче рәсемдә цилиндрга камаулы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасы сурәтләнгән. 159 нчы рәсемдә $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ призмасы цилиндрны камаган.

Мисал. Цилиндрга камаулы дүртпочмаклы төзек призма төзергә.

Чишү. 1) Цилиндрның нигезенә $ABCD$ камаулы квадраты сызабыз (158 нче рәсем).

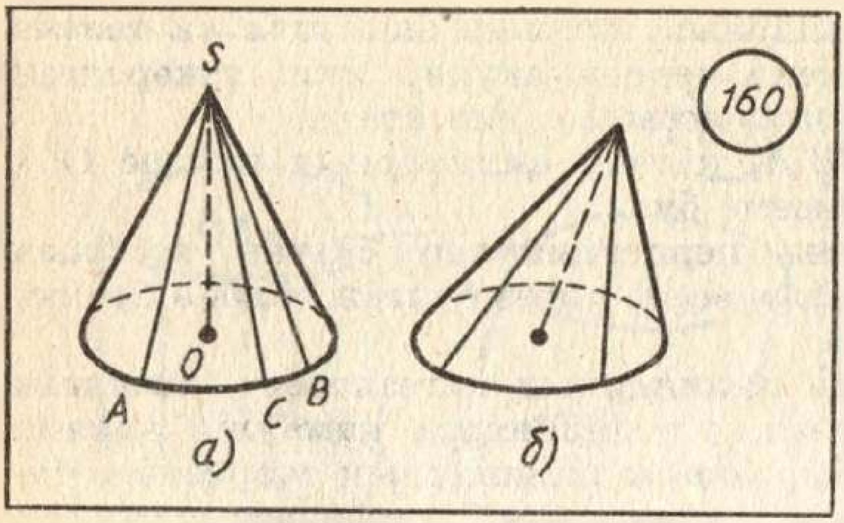
2) AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 төзүчеләрен үткәрәбез.

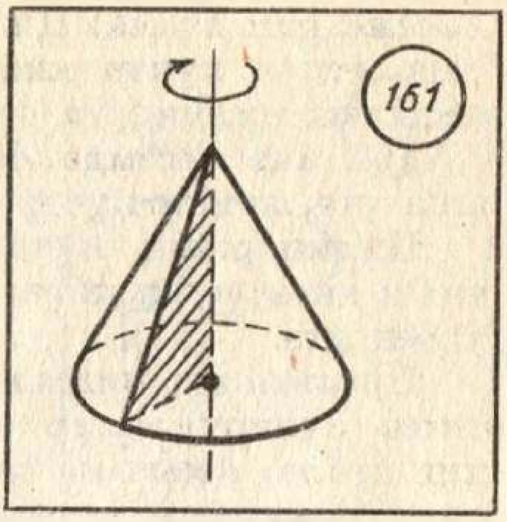
3) Бу төзүчеләрнең күрше парлары аша өске нигезне A_1B_1 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 хордалары буенча кисеп үтә торган яссылыклар үткәрәбез.

4) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — эзләнелә торган призма (төзек һәм камаулы призма үзлеге буенча).

53. Конус. Түгәрәктән — *конус нигезеннән,* бу түгәрәк яссылыгында ятмаган ноктадан — *конусның түбәсеннән* һәм конусның түбәсен нигез нокталары белән тоташтыручы кисемтәләрдән торган җисем *конус* (төгәлрәк әйткәндә, түгәрәк конус) дип атала. Конусның түбәсен нигез әйләнәсе белән тоташтыручы кисемтәләр *конусның төзүчеләре* дип атала. Конусның өслеге аның *нигезеннән* һәм *ян өслегеннән* тора. 160 нчы *а* рәсемендә әйләнмәле конус сурәтләнгән. S — конусның түбәсе, үзәге O ноктасында булган түгәрәк — конусның нигезе, SA, SB һәм SC — конусның төзүчеләре.

Конусның түбәсен нигезенең үзәге белән тоташтыручы туры нигез яссылыгына перпендикуляр булса, ул *туры конус* дип атала. 160 нчы *б* рәсемдә — авыш конус, ә 160 нчы *а* рәсемендә туры конус сурәтләнгән. Киләчәктә без тик туры конусны гына карарбыз һәм аны кыскалык өчен конус дип кенә йөртербез. Туры конусны, турыпочмаклы өчпочмакны, бер катетын күчәр итеп алып, шул катет тирәсендә әйләнде-


160


161

рүдән килеп чыккан җисем дип карарга мөмкин (161 нче рәсем).

Конусның түбәсеннән нигез яссылыгына төшерелгән перпендикуляр аның *биеклеге* дип атала. Туры конус биеклегенең нигезе нигезенең үзәге белән тәңгәл килә. Конусның биеклеген эченә алган туры аның *күчәре* дип атала.

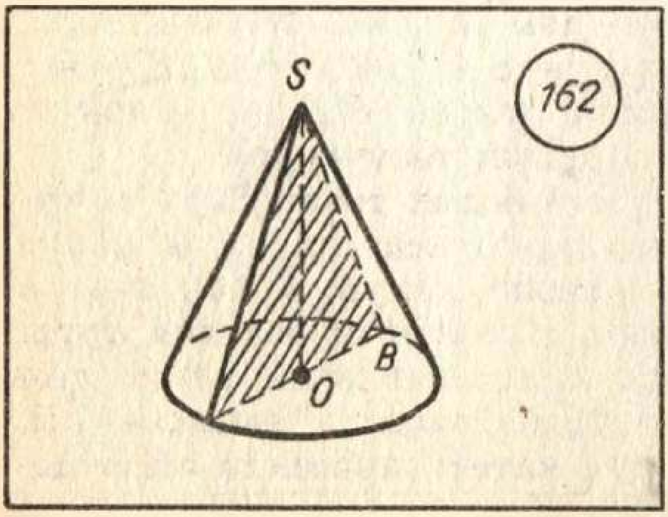
Конусның күчәре аша үтүче яссылык белән киселеме *күчәр киселеме* дип атала. Конусның төзүчесе аша шул ук төзүче аша үткән күчәр киселеменә перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылык конуска *орынма яссылык* дип атала.

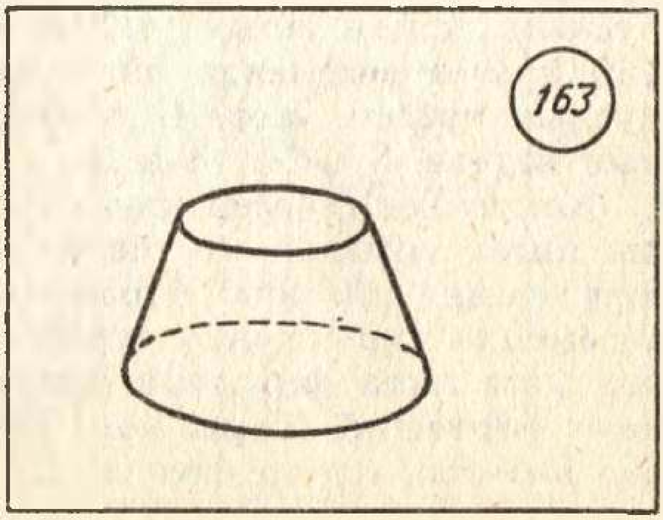
162 нче рәсемдә конусның күчәр киселеме аша үтүче конус киселеме сурәтләнгән.

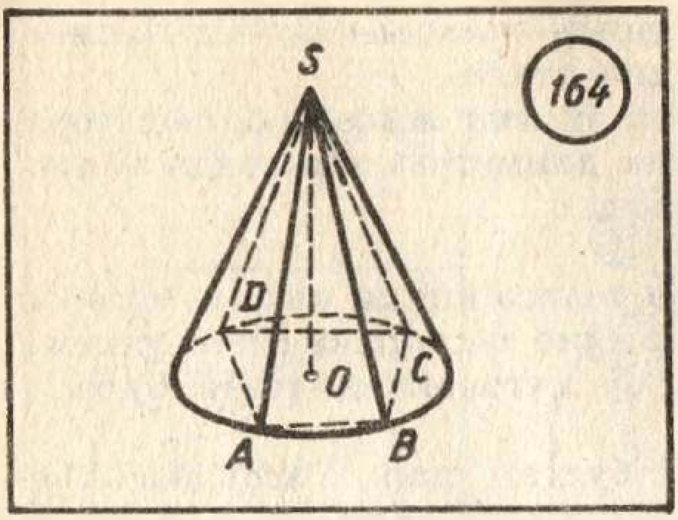
Конусның күчәренә перпендикуляр яссылык конусны — түгәрәк буенча, ә аның ян өслеген үзәге конус күчәрендә яткан әйләнә буенча кисеп үтә.

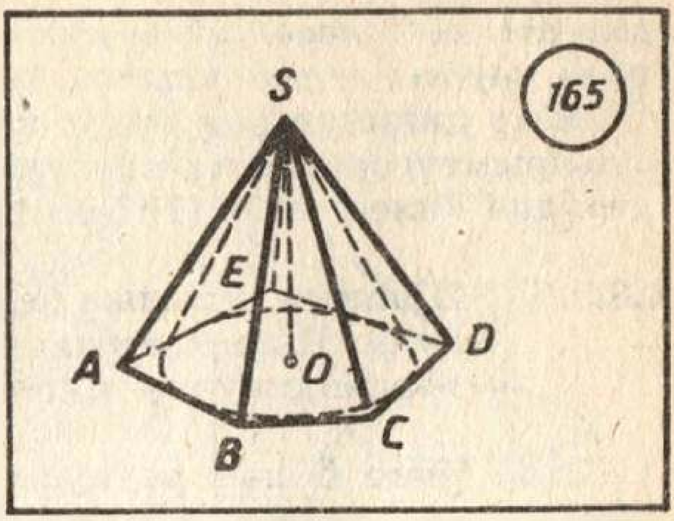
Конусның күчәренә перпендикуляр яссылык аннан кечерәк конус кисеп ала. Бу конусның калган икенче кисәге *кисек конус* дип атала (163 нче рәсем).

Нигезе — конус нигезендәге әйләнәгә камалган күппочмак, ә түбәсе конус түбәсе булган пирамида конуска *камаулы пирамида* дип атала. Конуска камаулы пирамиданың ян кабыргалары конусның төзүчеләре була. Нигезе конус нигезен


162


163

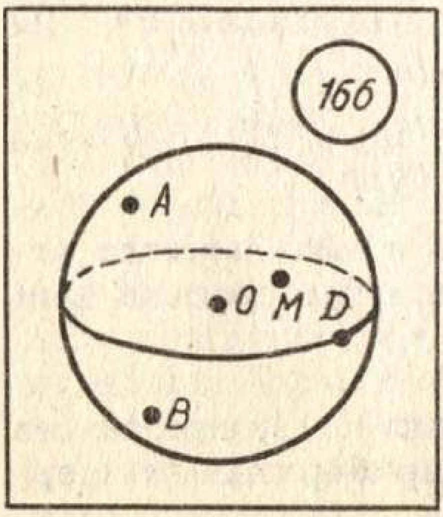

164

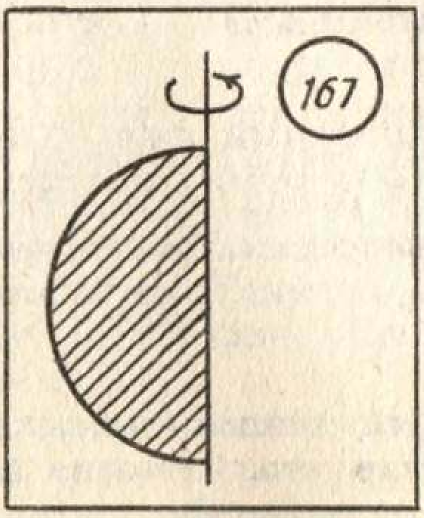

165

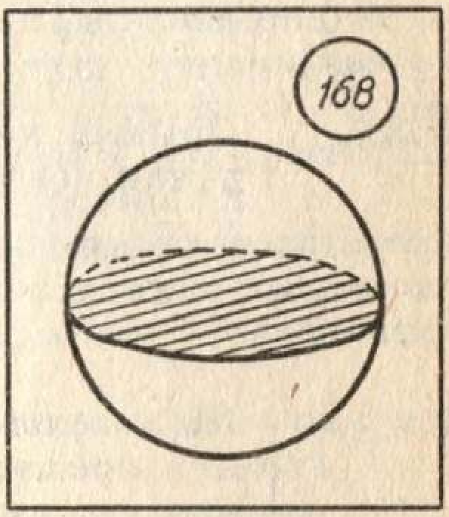
камаучы күппочмак булган, ә түбәсе конус түбәсе белән тәңгәл килгән пирамида конусны *камаучы* пирамида дип атала. Камаучы пирамиданың ян кыр яссылыклары конуска орынма яссылыклар булып тора.

164 нче рәсемдә конуска камаулы пирамида сурәтләнгән, ә 165 нче рәсемдә пирамидага камалган конус, ягъни конусны камаучы пирамида сурәтләнгән.

54. Шар. Пространствоның бирелгән ноктасыннан бирелгән ераклыктан артмаган ераклыкта ятучы барлык нокталарыннан торган җисем *шар* дип атала. Бу нокта үзе — шарның үзәге дип, ә бирелгән ераклык *шарның радиусы* дип атала. 166 нчы рәсемдә үзәге O ноктасында һәм радиусы R булган шар сурәтләнгән. A, B, M, D һәм O нокталарының бирелгән шарда ятуларын искәртеп китик. Шарның чиге шар өслеге яки *сфера* дип атала. 166 нчы рәсемдә A, B һәм D нокталары сферада ята, ә, мәсәлән M ноктасы, сфераныкы түгел. Шулай итеп, шарның үзәгеннән радиусына тигез ераклыкта урнашкан барлык нокталары сфера нокталары була. Шарның үзәген шар өслегенең ноктасы белән тоташтыручы теләсә нинди кисемтә *радиус* дип атала. Шар үзәге аша үтеп, шар өслегенең ике ноктасын тоташтыручы кисемтә *диаметр*


166


167


168

дип атала. Теләсә кайсы диаметрның очлары *шарның диаметраль каршы ятучы нокталары* дип атала.

Шар цилиндр һәм конус кебек әйләнү җисеме булып тора. Ул ярымтүгәрәкне күчәр буларак диаметры тирәсендә әйләндерүдән килеп чыга (167 нче рәсем).

Т.3.5. Шарның яссылык белән теләсә нинди киseме түгәрәк була. Шар үзәгеннән кисүче яссылыкка төшерелгән перпендикуляр нигезе бу түгәрәкнең үзәге була.

Әгәр үзәге O һәм радиусы R булган шар α яссылыгы белән кистерелсә, кисемтәдә Т.3.5 буенча, радиусы r үзәге K булган түгәрәк килеп чыга. Шарның яссылык белән кисеменең радиусын

$$r = \sqrt{R^2 - OK^2}$$

формуласы буенча исәпләргә була. Формуладан күренгәнчә, үзәктән тигез ераклыктагы яссылыклар шардан тигез түгәрәклар кисеп ала. Кисүче яссылык шар үзәгенә якынрак, ягъни OK ераклыгы кечкенәрәк булган саен кисемнең радиусы зуррак була. Яссылык шар үзәге аша үткәндә килеп чыккан кисемнең радиусы иң зур була. Ул түгәрәкнең радиусы шар радиусына тигез.

Шарның үзәге аша үтүче яссылык *диаметраль яссылык* дип атала. Шарның диаметраль яссылык белән кисеме — зур түгәрәк дип, ә сфера белән кисеме *зур әйләнә* дип атала. 168 нче рәсемдә α яссылыгы — диаметраль яссылык, R радиуслы түгәрәк — шарның зур түгәрәге, ә тиңдәшле әйләнә зур әйләнә була.

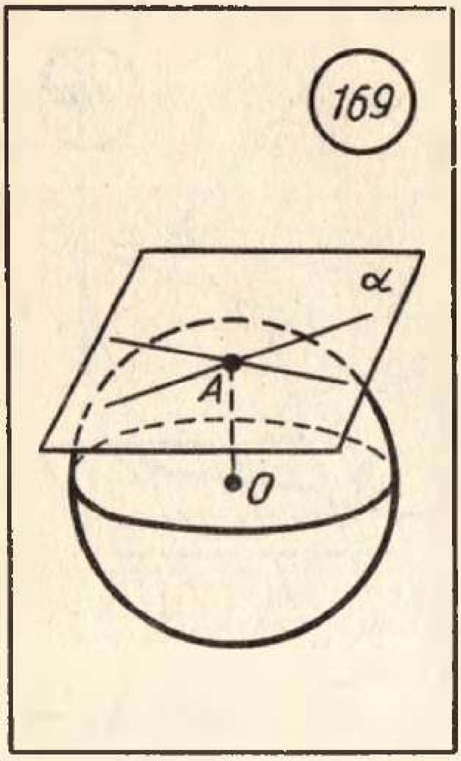
Т.3.6. Шарның теләсә кайсы диаметраль яссылыгы аның симметрия яссылыгы була. Шарның үзәге аның симметрия үзәге була.

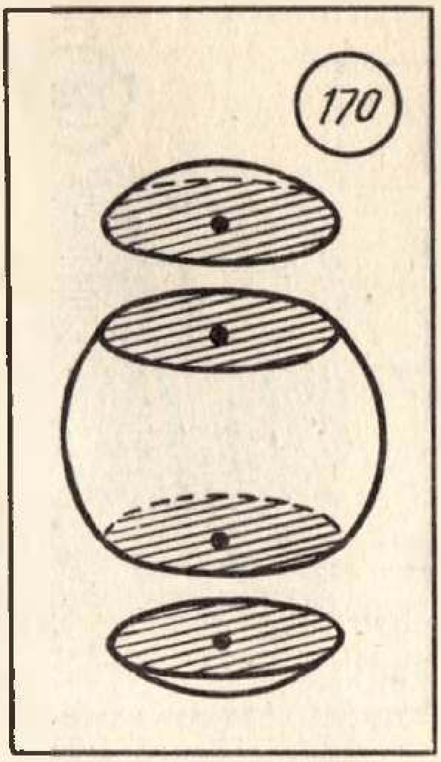
Шар өслегенең A ноктасы аша үтүче һәм шул ноктага үткәрелгән радиуска перпендикуляр яссылык *орынма яссылык* дип атала. A ноктасы *орыну ноктасы* дип атала (169 нчы рәсем).

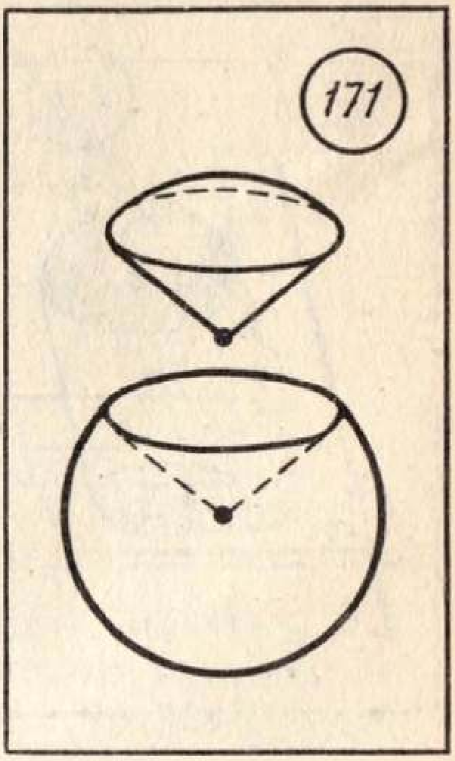
Т.3.7. Орынма яссылыкның шар белән бары тик бер генә уртак ноктасы — орыну ноктасы була.

Шар өслегенең A ноктасы аша үтүче һәм шул ноктага үткәрелгән радиуска перпендикуляр булган туры орынма дип атала.

Т.3.8. Шар өслегенең теләсә кайсы ноктасы аша чиксез күп орынмалар үтә, өстәвенә алар барысы да шарның орынма яссылыгында яталар.


169


170


171

Шарның яссылык белән кистереп алынган кисәге *шар сегменты* дип атала. Шарның кисүче ике параллель яссылык арасында урнашкан кисәге *шар катламы* дип атала (170 нче рәсем).

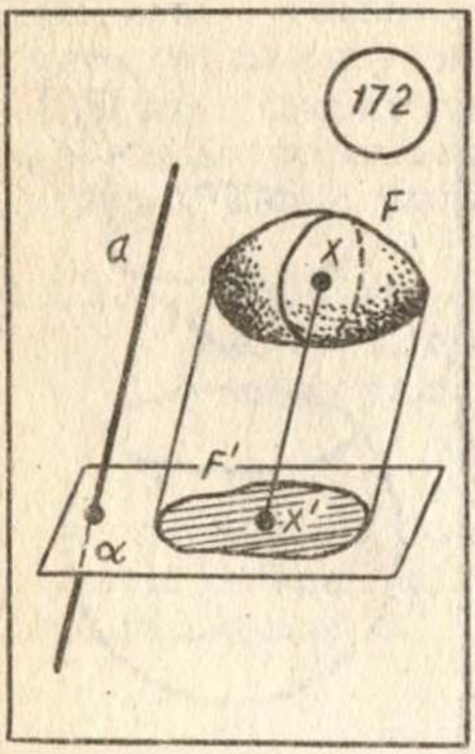
Шар секторы шар сегментыннан һәм конустан түбәндәгечә китереп чыгарыла. Әгәр шар сегменты ярымшардан кечерәк булса, шар сегменты түбәсе шар үзәгендә яткан, ә нигезе сегментның нигезе булган конус белән тутырыла. Әгәр дә сегмент ярымшардан зуррак булса, әлеге конус аннан алып ташлана (171 нче рәсем).

§ 13. Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү

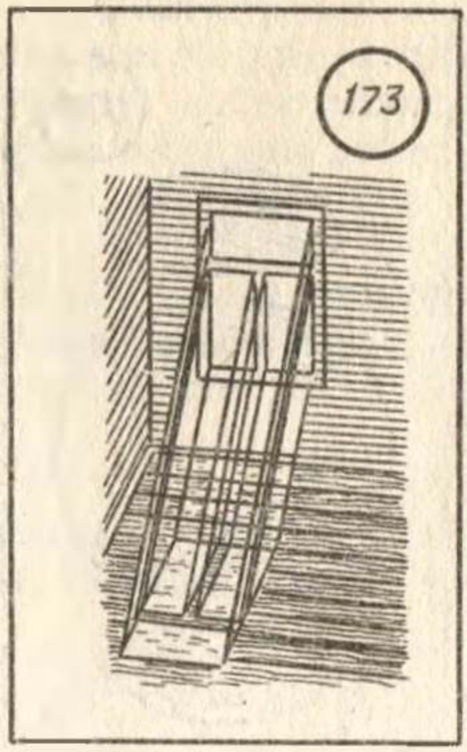
55. Параллель проекция. Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү өчен гадәттә *параллель проекцияләүдән* файдаланалар. Фигураларны сурәтләүнең бу ысулы түбәндәгедән гыйбарәт. Бирелгән фигура проекцияләнә торган яссылыкны кисеп үтүче ирекле l турысы алабыз да, фигураның нинди дә булса A ноктасы аша l га параллель туры үткәрәбез. Бу турының сызым яссылыгы белән кисешү ноктасы A_1 әлеге A ноктасының сурәте булыр. 172 нче рәсемдә F фигурасының α яссылыгына параллель проекциясе F' күрсәтелгән.

Шул рәвешле фигураның һәр ноктасының сурәтен төзеп, фигураның сурәтен табабыз. Пространство фигурасын яссылыкта сурәтләүнең бу ысулы фигураны ерактан карагандагы күренеше белән туры килә.

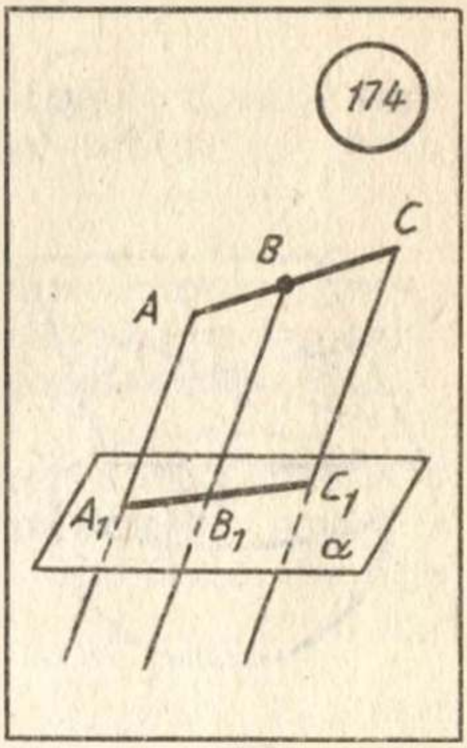
Табигатьтә ниндидер объектның параллель проекциясенә мисал итеп, мәсәлән, кояш нурлары яктысында (кояш нурларын параллель дип карап була) яссы өслеккә төшкән әлеге



172



173



174

объектның күләгәсен китерергә була. 173 нче рәсемдә тәрәзә рамының идән яссылыгына кояш нурлары белән яктыртылган параллель проекциясе сурәтләнгән.

Фигура сурәтен сөйләп үтелгән юл белән төзегәндә бу сурәтләүнең кайбер үзлекләре килеп чыга (сурәтләнә торган кисемтәләр һәм турылар проекцияләү юнәлешенә параллель түгелләр).

1. Турының проекциясе туры була.

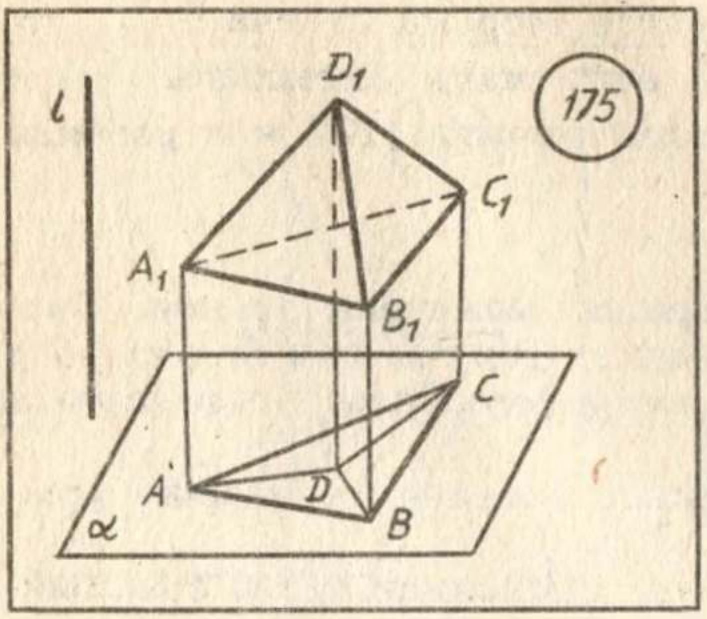
2. Кисемтәнең проекциясе кисемтә була.

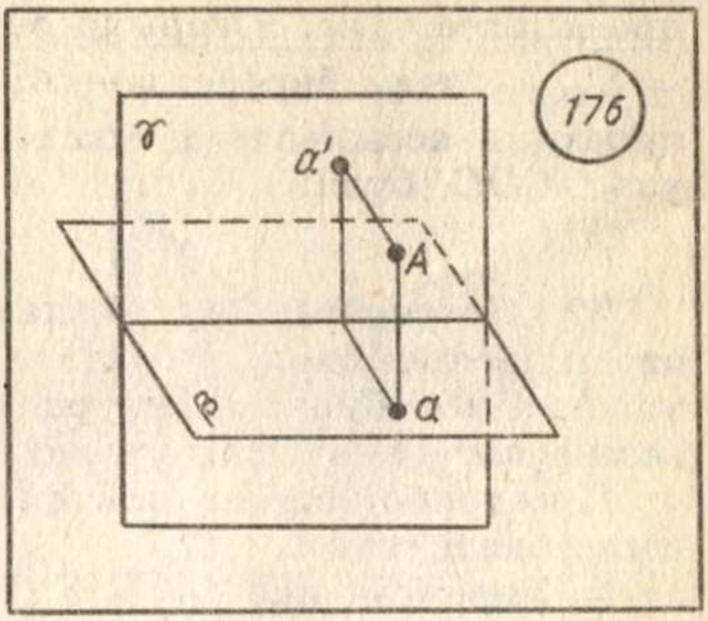
174 нче рәсемдә AC кисемтәсе α яссылыгына проекцияләнә. AC кисемтәсенең нокталарын проекцияләүче барлык турылар сызым яссылыгын A_1C_1 турысы буенча кисеп үтүче бер яссылыкта яталар. AC кисемтәсенең ирекле рәвештә алынган B ноктасы A_1C_1 кисемтәсенең B_1 ноктасы булып сурәтләнә. A_1C_1 кисемтәсе AC кисемтәсенең α яссылыгына проекциясе була. Проекцияләнүче кисемтә проекцияләү юнәлешенә параллель булмаганда гына әлеге расламаның дөрес булуын тагын бер кат әйтеп үтәбез.

3. Фигураның параллель кисемтәләре сызым яссылыгында параллель кисемтәләр булып сурәтләнә.

AC һәм A_1C_1 — фигураның параллель кисемтәләре. $A'C'$ һәм $A'_1C'_1$ турылары параллель, чөнки алар параллель яссылыкларны α яссылыгы белән кистерүдән килеп чыгалар. Бу яссылыкларның беренчесе AC һәм AA' турылары аша, икенчесе A_1C_1 һәм $A_1A'_1$ турылары аша үтә. Шулай итеп, AC һәм A_1C_1 параллель $A'C'$ һәм $A'_1C'_1$ кисемтәләренә күчәләр.

4. Параллель проекцияләгәндә бер турыдагы яки параллель турылардагы кисемтәләрнең чагыштырмасы саклана. Мәсәлән, $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ (174 нче рәсем).


175

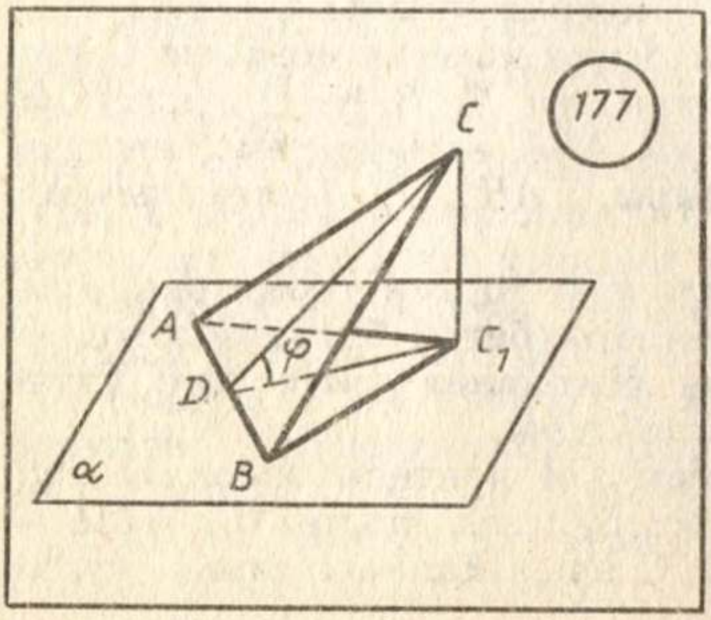

176

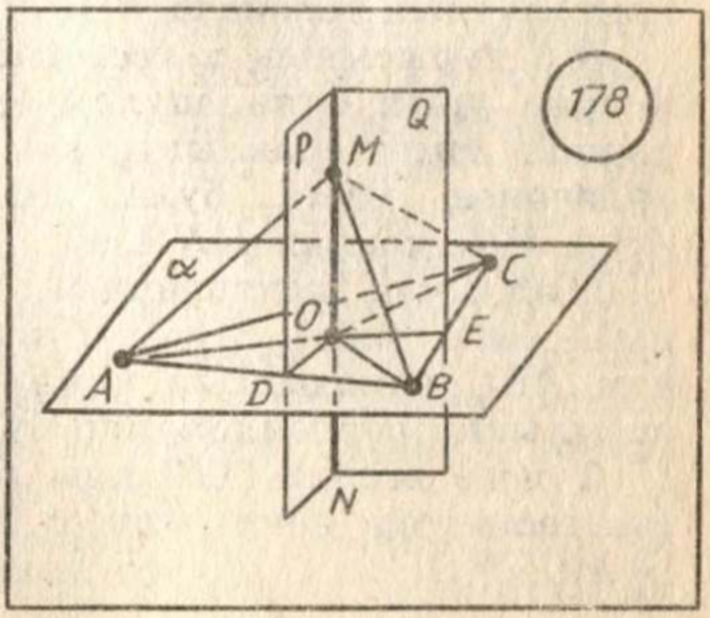
56. Ортогональ проекцияләү. α яссылыгы бирелсен, һәм шушы яссылыкта фигураны сурәтләргә кирәк булсын, ди. Шуның белән бергә проекцияләү юнәлеше α га перпендикуляр булган l турысы белән бирелгән (175 нче рәсем). Мондый проекцияләү яссылыкка *ортогональ* (турыпочмаклы) *проекцияләү* дип атала.

Ортогональ проекцияне техник сызымда киң кулланалар. Техник сызымнарны башкаруның нигезе итеп фигураны ике: горизонталь β һәм вертикаль γ яссылыкларына ортогональ проекцияләү ысулы алына (176 нчы рәсем). A ноктасының бу яссылыкларга проекцияләрен a һәм a' дип тамгалыйлар.

Т.3.9. Күппочмакның яссылыкка ортогональ проекциясенең мәйданы күппочмак мәйданы һәм күппочмак яссылыгы белән проекция яссылыгы арасындагы почмак косинусының тапкырчыгышына тигез.

177 нче рәсемдә $\triangle ABC$ ның α яссылыгына ортогональ проекциясе бирелгән. ABC_1 өчпочмагы ABC өчпочмагының


177


178

проекциясе була. Югарыда әйтелгән теорема буенча $S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC}\cos\varphi$, биредә φ — ABC өчпочмагы яссылыгы белән проекция яссылыгы α арасындагы почмак, 177 нче рәсемдә ул $\angle CDC_1$ була.

57. Пространствода нокталарның геометрик урыны. Пространствоның барлык нокталарыннан торучы һәм билгеле бер үзлеккә ия булган фигура *пространстводагы нокталарның геометрик урыны* дип атала.

Пространстводагы нокталарның берничә геометрик урынын санап китик.

1. Бирелгән ике: A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта урнашкан нокталарның геометрик урыны AB турысына перпендикуляр һәм AB кисемтәсенең уртасы аша үтүче яссылык була.

2. Бирелгән α яссылыгыннан d ераклыгында яткан нокталарның геометрик урыны бирелгән яссылыкка параллель һәм аннан d ераклыгындагы ике яссылык була.

3. Бирелгән O ноктасыннан бирелгән d ераклыгындагы нокталарның геометрик урыны үзәге O ноктасында һәм радиусы d булган сфера була.

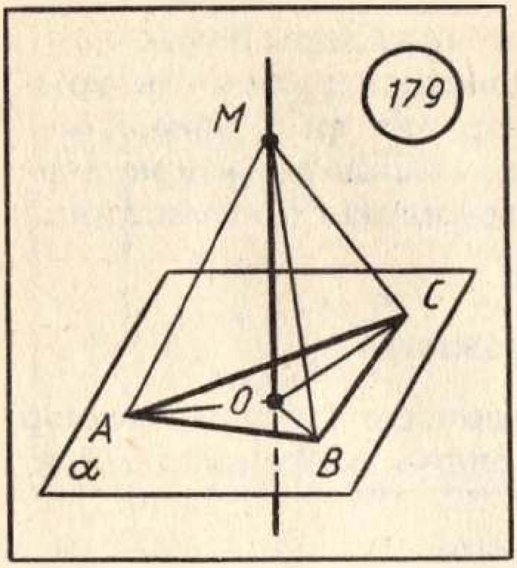
1 нче мисал. Пространствода бер турыда ятмаган һәм бирелгән өч ноктадан тигез ераклыктагы нокталарның геометрик урынын табарга.

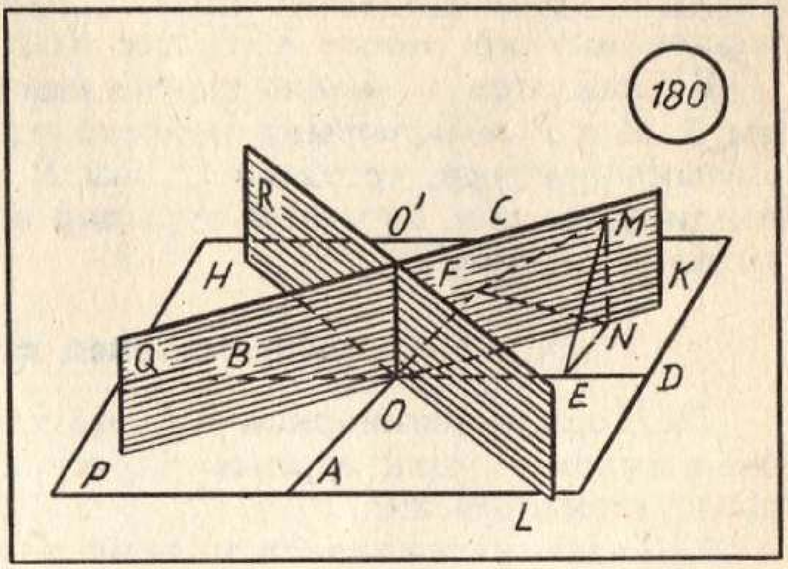
Чишү. 1 нче ысул (178 нче рәсем). Бирелгән A, B һәм C нокталары ABC өчпочмагы яткан α яссылыгын билгеләр. Без A һәм B нокталарыннан тигез ераклыктагы нокталарның геометрик урыны AB кисемтәсенә перпендикуляр һәм AB ягының уртасы D аша үтүче P яссылыгы булуын беләбез; аналогия буенча B һәм C нокталары өчен шундый нокталарның геометрик урыны Q яссылыгы булыр. P һәм Q яссылыкларының кисешү сызыгында (MN) ятучы нокталар A, B һәм C нокталарыннан бертигез ераклыкта яталар. MN турысы — нокталарның эзләнелә торган геометрик урыны.

MN турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы O геометрик урын була, шулай булгач, ул A, B һәм C нокталарыннан тигез ераклыкта ята һәм ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге була. Аннары, $AB \perp P$ булганлыктан, $AB \perp MN$, моннан $MN \perp \alpha$.

Нәтиҗә: нокталарның эзләнелә торган геометрик урыны — бирелгән A, B һәм C нокталары белән билгеләнә торган һәм ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге аша үтүче яссылыкка перпендикуляр булган туры.

2 нче ысул (179 нчы рәсем). M ноктасы эзләнелә торган геометрик нокталарның берсе булсын, ягъни $MA = MB = MC$, $MO \perp \alpha$. MA, MB һәм MC авышмалары тигез, шулай





булгач, аларның α яссылыгына проекцияләре дә тигез, ягъни $OA = OB = OC$.

Моннан түбәндәгеләр чыга: 1) O — $\triangle ABC$ны камаучы әйләнәнең үзәге; 2) геометрик урынның нокталары α яссылыгында бер үк ноктага проекцияләнәләр, димәк, алар барысы да O ноктасы аша үтүче α яссылыгына булган перпендикулярда яталар.

2 нче мисал. Пространствода бирелгән ике кисешүче турыдан бертигез ераклашкан нокталарның геометрик урынын табарга.

Чишү. AC һәм BD — бирелгән турылар булсын, ди (180 нче рәсем), P — алар белән билгеләнгән яссылык. M — эзләнелгән геометрик урынның ирекле ноктасы булсын, ягъни $MF \perp AC$, $ME \perp BD$ һәм $MF = ME$. P яссылыгына MN перпендикулярын төшерәбез; ул вакытта MF һәм ME тигез авышмаларының P яссылыгына проекцияләре буларак $NF = NE$. AC һәм BD турылары тиңдәшле рәвештә авышмаларга перпендикуляр булалар, димәк, ул турылар аларның проекцияләренә перпендикуляр, ягъни $AC \perp NF$ һәм $BD \perp NE$. Без нокталарның геометрик урынының ирекле ноктасының бирелгән турылар белән билгеләнгән P яссылыгына проекциясенең AC һәм BD дан бертигез ераклыкта ятуын күрәбез. Билгеле булганча, яссылыкта кисешүче ике турыдан бертигез ераклашкан нокталарның геометрик урыны KO һәм HL турылары була, алар бирелгән AC һәм BD турылары белән төзелгән почмакларны урталай бүләләр. MN перпендикулярының барлык нокталары, мөгаен, нокталарның геометрик урынныкы булалардыр. MN һәм KO турылары аша Q яссылыгын төзибез. Т.2.9 буенча бу яссылык P яссылыгына перпендикуляр. Q яссылыгының барлык нокталары эзләнелә торган нокталарның геометрик урынында яталар.

Эзләнелә торган геометрик урынның нокталары шулай ук P яссылыгына перпендикуляр булган P яссылыгында ятуы да аналогик рәвештә исбатлана. Q һәм R яссылыклары үзара перпендикуляр, чөнки KOL һәм KOH почмаклары туры.

Шулай итеп, эзләнелә торган нокталарның геометрик урыны булып P яссылыгына перпендикуляр булган Q һәм R яссылыклары тора, өстәвенә Q һәм R яссылыклары үзара перпендикуляр һәм бирелгән турылар арасындагы почмакларны урталай бүләләр.

§ 14. Җисемнәрнең күләмнәре

58. Гади җисемнәрнең күләме төшенчәсе. Гади җисемнәр өчен күләм — уңай зурлык ул, аның санча кыйммәте түбәндәге үзлекләргә ия:

1. *Тигез җисемнәрнең күләмнәре тигез.*

2. *Җисем гади җисемнәрдән торган кисәкләргә бүлгәләнсә, бу җисемнәрнең күләме аның кисәкләренең күләмнәре суммасына тигез.*

3. *Кабыргасы озынлык берәмлегенә тигез булган кубның күләме берәмлеккә тигез.*

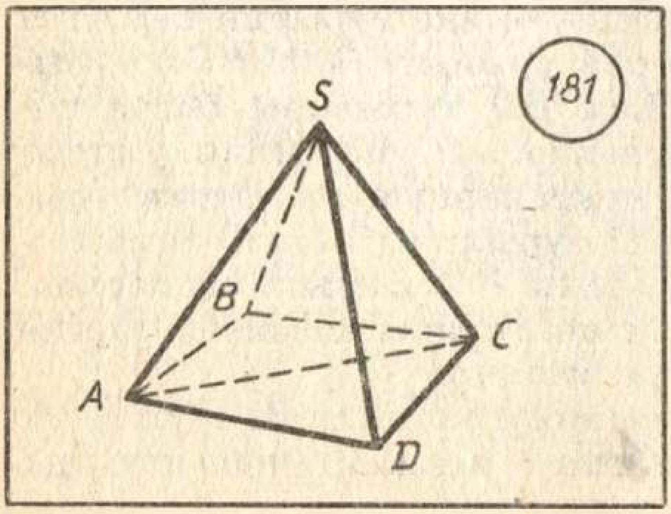
Әгәр билгеләмәдә әйтелгән кубның кабыргасы 1 см булса, күләм куб сантиметрларда күрсәтелер; кубның кабыргасы 1 м булса, күләм куб метрларда булыр, кубның кабыргасы 1 км булса, күләм куб километрларда үлчәнер һ. б. ш.

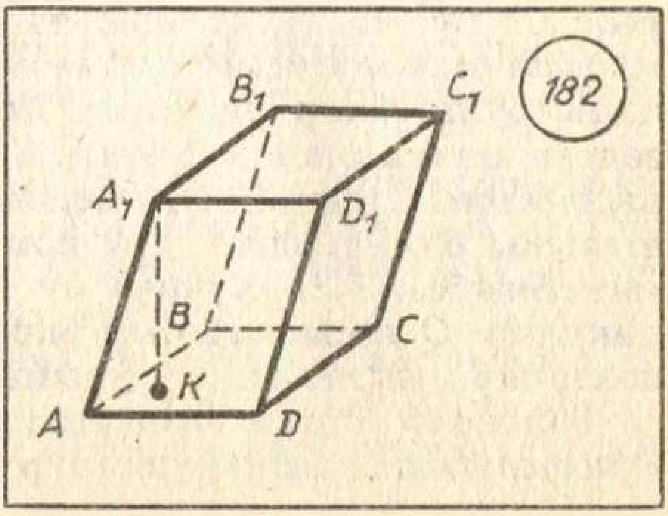
181 нче рәсемдә гади җисем — дүртпочмаклы пирамида $SABCD$ сурәтләнгән. Ул пирамиданың күләме 2 нче үзлек буенча $SABC$ һәм $SADC$ пирамидаларының күләмнәре суммасына тигез.

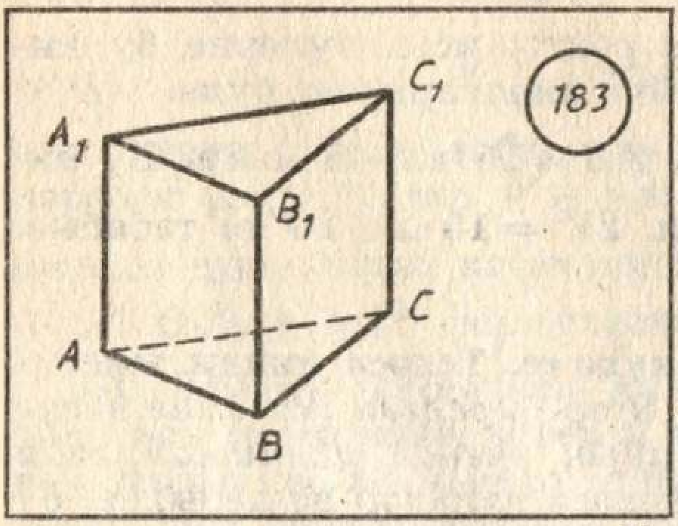
59. Параллелепипед, призма һәм пирамиданың күләме. *Турыпочмаклы параллелепипедның күләме*

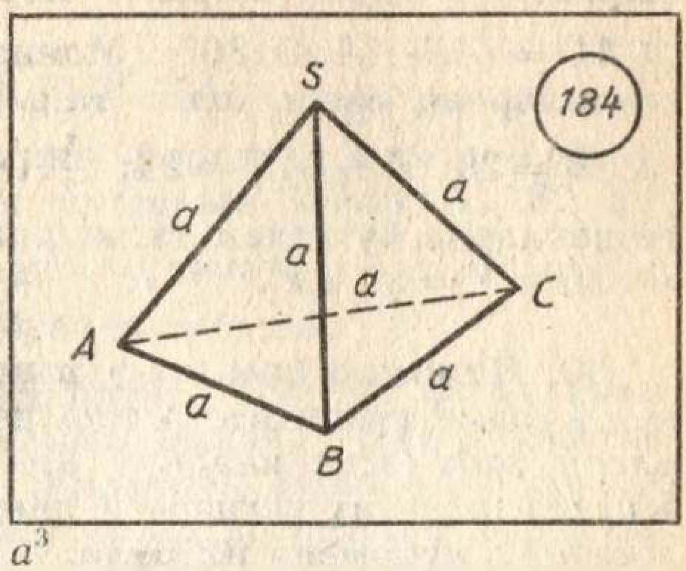
$$V = abc$$

формуласы буенча табыла, биредә a, b, c — турыпочмаклы параллелепипедның кабыргалары. Бу формуладан чыгып, куб күләменең формуласын табарга була. *Кубның күләмен*


181


182


183


184

$$V=a^3$$

формуласы буенча табалар, биредә a — кубның кабыргасы.

Кайвакытта турыпочмаклы параллелепипедның күләме аның сызыкча үлчәмнәренең тапкырчыгышына яки нигезенең мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез диләр. Соңгы раслау теләсә нинди параллелепипед өчен дә дөрес.

182 нче рәсемдә авыш параллелепипед сурәтләнгән. Аның күләме $V=S_{ABCD}\cdot A_1K$, биредә S_{ABCD} — нигезенең мәйданы, ә A_1K авыш параллелепипедның биеклеге.

Теләсә нинди призманың күләмен табу кагыйдәсен чыгарырга була (шул исәптән авыш призманыкын да).

Призманың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез:

$$V=S\cdot H.$$

Туры призма очрагында (183 нче рәсем) аның биеклеге ян кабырга белән тәңгәл килә һәм туры призманың күләме нигезе мәйданы белән ян кабыргасы тапкырчыгышына тигез.

Теләсә нинди пирамиданың *күләме*

$$V=\frac{1}{3}SH$$

формуласы буенча табыла, биредә S — нигезенең мәйданы, H — пирамида биеклеге.

184 нче рәсемдә кабыргасы a булган ABC төзек тетраэдры сурәтләнгән. Аның күләме $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ була.

Мисал. Авыш параллелепипедта нигезе һәм ян кыры — мәйданнары тиңдәшле рәвештә 20 дм^2 һәм 24 дм^2 га тигез булган турыпочмаклыклар, ә аларның яссылыклары арасындагы почмак 30° ка тигез. Параллелепипедның бер ян кырының мәйданы 15 дм^2. Параллелепипедның күләмен табарга.

Чишү. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $ABCD$ һәм ADD_1A_1 кырлары — турыпочмаклыклар. Ул вакытта AD кабыргасы ABB_1A_1 кырына перпендикуляр һәм $V = S_{ABB_1A_1} \times \times AD = (AB \cdot AA_1 \sin 30°)$. Моннан соңгы исәпләүләрне бу кисемтәләрнең озынлыгын тапмыйча башкарырга була. $AD \times \times AB = 20$; $AA_1 \cdot AD = 24$; $\frac{1}{2} AA_1 \cdot AB = 15$ килеп чыга. Бу тигезлекләрне буынлап тапкырлап, $2V^2 = 15 \cdot 24 \cdot 20$ не табабыз, моннан $V = 60$ дм^3.

60. Цилиндр һәм конусның күләме. Теләсә нинди җисемнең күләме түбәндәгечә табыла. Әгәр *бирелгән җисемне эченә алган гади җисемнәрнең һәм аның эчендә урнашкан гади җисемнәрнең* күләмнәре V дан теләсә никадәр аз аерылса, бу җисем V күләменә ия була.

Бу билгеләмәне цилиндр һәм конусның күләмнәрен табуга кулланып, түбәндәге теоремаларны исбатларга мөмкин.

Т.3.10. Цилиндрның күләме аның нигезе мәйданын биеклегенә тапкырлаганга тигез, ягъни $V = S \cdot H$.

Әгәр цилиндр нигезенең радиусы R, ә биеклеге H булса, аның күләме формуласы түбәндәгечә булыр:

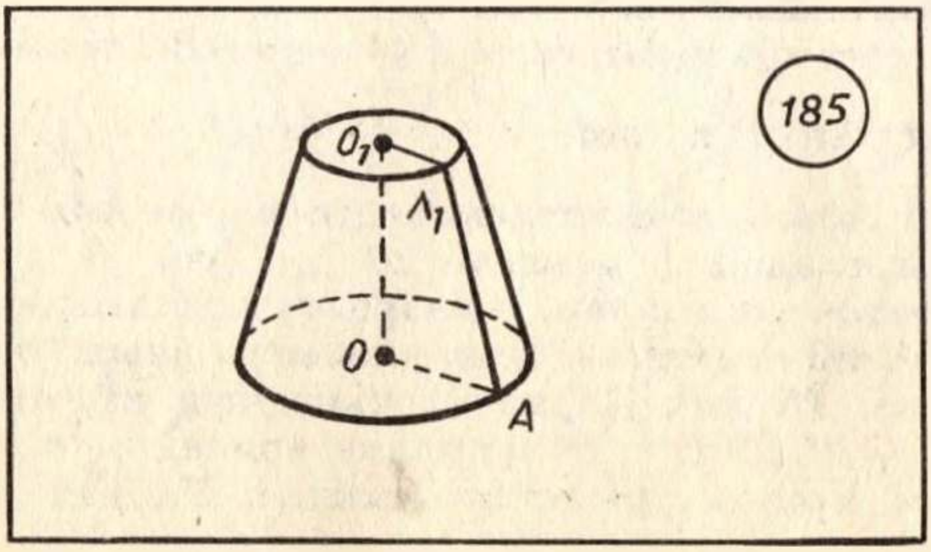
$$V = \pi R^2 H.$$

Т.3.11. Конусның күләме нигезе мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышының өчтәнberенә тигез, ягъни $V = \frac{1}{3} SH$.

Әгәр нигезенең радиусы R, ә биеклеге H булса, аның күләме

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

формуласы буенча табыла.



Кисек конусның күләмен

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$$

формуласы буенча табарга мөмкин, биредә R һәм r — нигезләренең радиуслары, H — кисек конусның биеклеге. 185 нче рәсемдә сурәтләнгән кисек конусның күләме $V=\frac{1}{3}\pi OO_1(OA^2+OA\cdot O_1A_1+O_1A_1^2)$ формуласы буенча табыла.

61. Әйләнү җисемнәре күләмнәренең гомуми формуласы. Шар һәм аның кисәкләренең күләме. Әйләнү җисеме күләменең формуласын чыгару өчен җисемнең күчәрен x күчәре итеп алып, пространствода Декарт координаталары кертәләр. xy яссылыгы җисемнең өслеген x күчәре симметрия күчәре булган сызык буенча кисә. $y=f(x)$ — x күчәреннән өстә урнашкан сызыкның бер кисәгенең тигезләмәсе (186 нчы рәсем).

$x=a$ һәм $x=b$ параллель яссылыклары арасында чикләнгән әйләнү җисемнәре кисәкләренең күләмнәрен исәпләгәндә анализ формуласын кулланалар (228 нче п. кара).

$$V=V(b)-V(a)=\int_a^b \pi f^2(x)dx,$$

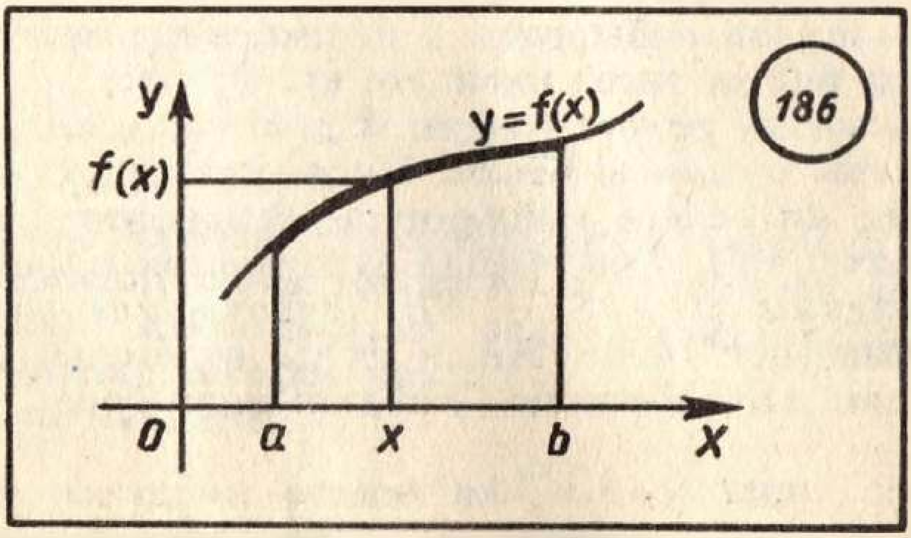
биредә $a<b$, $f(x)$ — $[a;\ b]$ да өзлексез функция.

Әлеге формула ярдәмендә тиңдәшле рәвештә координаталар системасын сайлап һәм $f(x)$ функциясен табып, конкрет әйләнү җисемнәренең күләм формулаларын табарга була.

Аерым алганда, *R радиуслы шар күләменең* формуласы түбәндәгечә:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Биеклеге H, ә радиусы R булган шар сегментының күләме түбәндәге формула буенча табыла:



186

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Шар секторының күләме формуласы:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

биредә R — шар радиусы, H — тиңдәшле шар сегментының биеклеге.

§ 15. Җисемнәрнең өслек мәйданнары

62. Күпкырлыкларның өслек мәйданнары. *Күпкырлыкның өслек мәйданы* дип аның барлык кырларының мәйданнары суммасы атала (кайвакыт тулы өслек мәйданы дип әйтәләр).

Кайбер күпкырлыклар, мәсәлән пирамида, призма өчен *ян өслеге мәйданы* карала.

Призманың ян өслеге мәйданы дип ян кырларының мәйданнары суммасы атала. *Призманың тулы өслеге мәйданы* аның ян өслекләре мәйданнары белән нигезләренең мәйданнары суммасына тигез. 147 нче рәсемдә сурәтләнгән призманың ян өслегенең мәйданы ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, AA_1D_1D параллелограммнарының мәйданнары суммасына тигез. Бу призманың тулы өслегенең мәйданы ян өслеге мәйданын плюс $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ нигезләренең мәйданнары суммасына тигез.

Т.3.10. Туры призманың ян өслеге мәйданы нигез периметры белән призма биеклегенең, ягъни ян кабыргасы озынлыгының, тапкырчыгышына тигез.

Т.3.11. Призманың ян өслеге мәйданы перпендикуляр кисем периметры белән ян кабыргасы озынлыгының тапкырчыгышына тигез.

Бу теоремалардан кабыргасы a булган кубның тулы өслегенең мәйданы $6a^2$ ка тигез икәнлеге килеп чыга.

Пирамиданың ян өслеге мәйданы дип аның ян кырларының мәйданнары суммасы атала. Пирамиданың тулы өслеге мәйданы аның ян өслеге мәйданнары белән нигез мәйданы суммасына тигез. 150, *б* рәсемендә сурәтләнгән пирамиданың ян өслеге мәйданы SAC, SCB, SBA өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез. Аның тулы өслегенең мәйданы ян өслектән һәм ABC нигезенең мәйданыннан тора.

Т.3.12. Төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы нигезенең ярымпериметры белән апофемасының тапкырчыгышына тигез, ягъни $S_б = \frac{pl}{2}$, биредә p — нигезенең периметры, ә l — пирамиданың апофемасы.

Т.3.15. Төзек кисек пирамиданың ян өслеге мәйданы нигезләре периметрларының ярымсуммасы белән апофемасының тапкырчыгышына тигез, ягъни $S = \frac{1}{2}(an + bn)l$, биредә an һәм bn — нигезләренең периметрлары, ә l апофема.

Кабыргасы a булган төзек тетраэдр өслегенең мәйданы $a^2\sqrt{3}$ га тигез, ә кабыргасы a булган октаэдр өслегенең мәйданы $2a^2\sqrt{3}$ га тигез.

Мисал. Төзек пирамиданың барлык кабыргаларын 3 тапкыр арттырганда, пирамиданың тулы өслеге мәйданы ничек үзгәрер?

Чишү. n — почмаклы пирамиданың тулы өслегенең мәйданы $nS_{\triangle} + S_{нигез}$ гә тигез булсын, биредә $S_{\triangle}$ — бер ян кырының мәйданы, ә $S_{нигез}$ — нигезенең мәйданы. Һәр кабырганы 3 тапкыр арттырганда нигездәге төзек күппочмак охшаш күппочмакка әйләнә, ә n өчпочмакның һәркайсы (охшашлык билгесе буенча) охшаш өчпочмакка әверелә, ягъни $S_{\triangle} = 9S_{\triangle}$, $S'_{нигез} = 9S_{нигез}$, моннан $S' = 9S$. Пирамиданың тулы өслегенең мәйданы 9 тапкыр артыр.

63. Өслек мәйданы төшенчәсе. F — бирелгән өслек булсын. Пространствоның барлык нокталарыннан торган F_h җисемен төзик. Ул нокталарның һәркайсы өчен F өслегендә h тан ерак булмаган нокта табылыр. F җисемен ачык күзаллау өчен аның өслеген ике яклап та буяганда h калынлыгындагы буяу катламы белән тулган дип алырга мөмкин.

F_h җисеменең күләме V_h булсын. F өслегенең мәйданы дип без $\frac{V_h}{2h}$ чагыштырмасының h 0 гә омтылгандагы чикләмәсен атарбыз, ягъни

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

64. Әйләнү җисемнәре өслекләренең мәйданнары. Алдагы пунктта бирелгән өслек мәйданы билгеләмәсен файдаланып, төрле әйләнү җисемнәренең өслек мәйданнарын исәпләү өчен формулалар табарга мөмкин.

Сфераның мәйданы

$$S = 4\pi R^2$$

формуласыннан табыла, биредә R — сфераның радиусы.

Сферик сегментның өслек мәйданы

$$S = 2\pi RH$$

формуласы буенча табыла, биредә R — сфера радиусы, ә H — сегментның биеклеге.

Цилиндрның ян өслеге мәйданы

$$S = 2\pi RH$$

формуласыннан табыла, биредә R — цилиндр нигезенең радиусы, ә H — аның биеклеге. Цилиндрның тулы өслегенең мәйданын табу өчен ян өслегенең мәйданына нигезенең икеләтелгән мәйданын кушарга кирәк.

Конусның ян өслеге мәйданы

$$S = \pi Rl$$

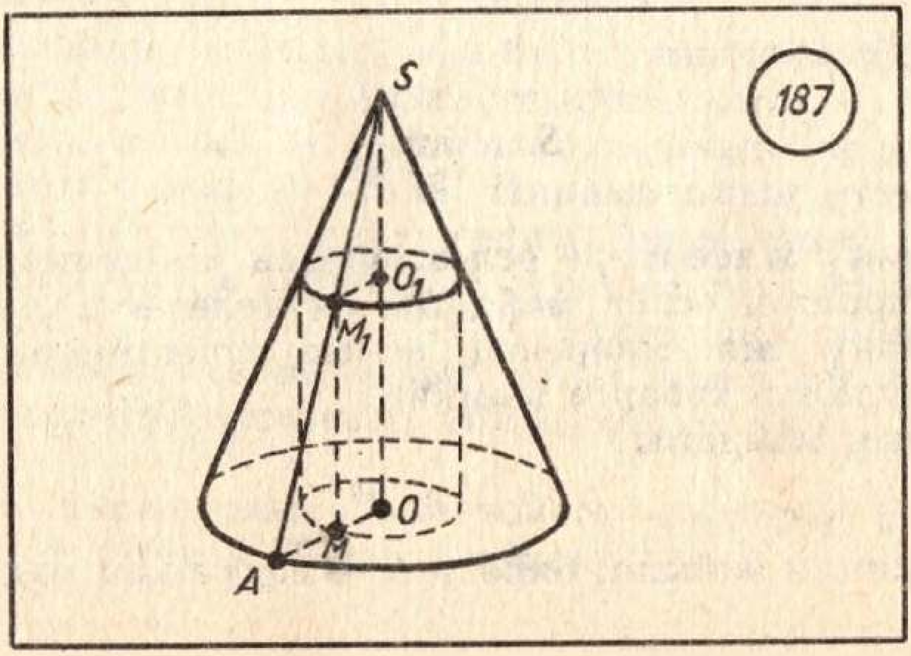
формуласы буенча табыла, биредә R — конус нигезенең радиусы, ә l — аның төзүчесе. Конусның тулы өслеге мәйданын табу өчен аның ян өслеге мәйданына нигез мәйданын кушарга кирәк. Кисек конусның ян өслеге мәйданы

$$S = \pi (R + r) l$$

формуласы буенча табыла, биредә R һәм r нигезләренең тиңдәшле радиуслары, ә l — аның төзүчесе.

1 нче мисал. Нигез радиусы R һәм биеклеге H булган конус эченә цилиндр камалган. Цилиндрның ян өслеге мәйданы иң зур кыйммәткә ия булырлык үлчәмнәрен табыгыз.

Чишү. Цилиндр нигезенең радиусын r аша, ә биеклеген h аша билгелибез (187 нче рәсем). SAO һәм M_1AM өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{R-r}{h} = \frac{R}{H}$ килеп чыга, монннан $h = \frac{(R-r)H}{R}$. $S_{\text{ян}} = 2\pi rh$ формуласына h кыйммәтен куеп, $S_{\text{ян}} = 2\pi rH - \frac{2\pi H}{R} r^2$ ны табабыз.



$S_{\text{ян}}$ ны r функциясе буларак карыйбыз һәм аны экстремумга тикшерәбез. Моның өчен аның чыгарылмасы $S'_{\text{ян}}=2\pi H-\frac{4\pi H}{R}\cdot r$ ны табабыз. Билгеле, $r=\frac{R}{2}$ булганда $S'=0$. Бу ноктада $S_{\text{ян}}$ функциясенең максимумы бар. Шулай итеп, цилиндрның ян өслегенең мәйданы иң зур кыйммәтне $r=\frac{R}{2}$, ә $h=\frac{1}{2}H$ булганда ала.

IV БҮЛЕК. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ

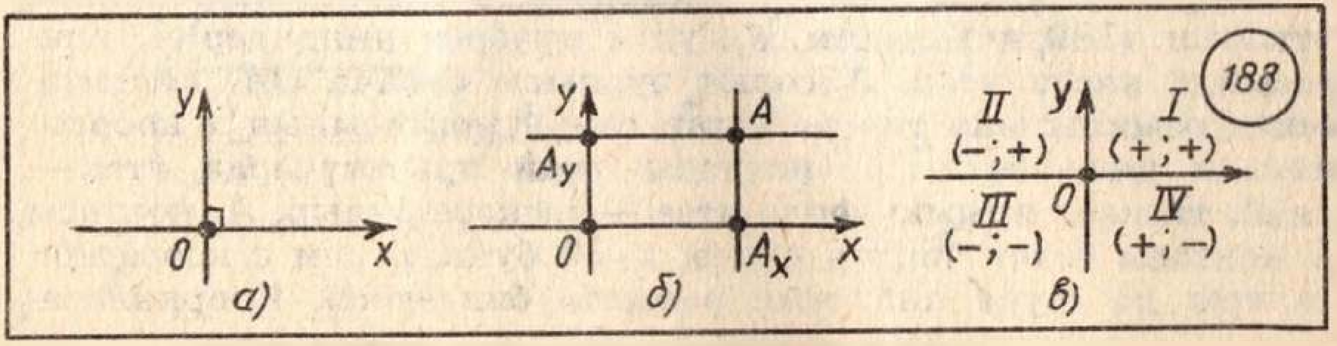
§ 16. Яссылыкта һәм пространствода координаталар

65. Яссылыкта һәм пространствода координаталар кертү. Яссылыкта O ноктасы аша үзара перпендикуляр x һәм y турылары — *координаталар күчәрләрен* үткәрәбез. x күчәре (ул гадәттә горизонталь) *абсциссалар* күчәре, ә y күчәре *ординаталар* күчәре дип атала. Бу күчәрләрнең кисешү ноктасы O *координаталар башлангычы* дип атала. Бу нокта белән күчәрләрнең һәркайсы ике ярымкүчәргә бүленә. Аларның берсен ук белән билгеләп уңай дип, ә икенчесен тискәре дип алабыз. 188 нче *а* рәсемдә x һәм y күчәрләре сурәтләнгән, O ноктасы — координаталар башлангычы.

Түбәндәге кагыйдә буенча яссылыкның һәр A ноктасына саннар парын — ноктаның координаталарын — (x) абсциссасын һәм (y) ординатасын тиңдәшле рәвештә куярбыз.

A ноктасы аша ординаталар күчәренә параллель итеп туры үткәрик (188 нче рәсем, *б*). Ул абсциссалар күчәре x ны ниндидер A_x ноктасында кисеп үтәр. A ноктасының *абсциссасы* дип без абсолют зурлыгы O ноктасыннан A га кадәрге ераклыкка тигез булган x санын атарбыз. Бу сан A_x ноктасы уңай ярымкүчәрнеке булганда уңай, ә A_x тискәре ярымкүчәрнеке булганда тискәре. Әгәр A_x ноктасы ординаталар күчәре y та ятса, x ны нульгә тигез дип алабыз.

A ноктасының *ординатасы* (y) шулай ук билгеләнә. A ноктасы аша, абсциссалар күчәренә параллель итеп, туры үткәрәбез (188 нче рәсем, *б*). Ул ординаталар күчәре y ны нин-


188

дидер A_y ноктасында кисеп үтәр. A ноктасының ординатасы дип без абсолют зурлыгы A_y ноктасыннан O га кадәрге ераклыкка тигез булган y санын атарбыз. Бу сан A_y уңай ярымкүчәрнеке булганда уңай, ә A_y тискәре ярымкүчәрнеке булганда тискәре булыр. Әгәр A ноктасы абсциссалар күчәрендә ятса, y ны нульгә тигез дип алабыз.

Ноктаның координаталары аның хәрефле тамгасы белән рәттән җәяләр эченә языла, мәсәлән $A(x, y)$ (беренче урында — абсцисса, икенчесендә — ордината).

Координата күчәрләре яссылыкны дүрт кисәккә — I, II, III, IV чирекләргә бүләләр (188 нче рәсем, *в*). Бер чирек эчендә ике координатаның да тамгалары саклана. Беренче чиректә алар уңай, икенчесендә — абсцисса тискәре, ә ордината уңай, өченчесендә — абсцисса һәм ордината тискәре, дүртенчедә — абсцисса уңай, ә ордината тискәре (188 нче рәсем, *в*).

x күчәре (абсциссалар күчәре) нокталарының ординаталары нульгә тигез ($y=0$), ә y күчәре (ординаталар күчәре) нокталарының абсциссалары нульгә тигез ($x=0$). Координаталар башлангычының абсциссасы һәм ординатасы нульгә тигез.

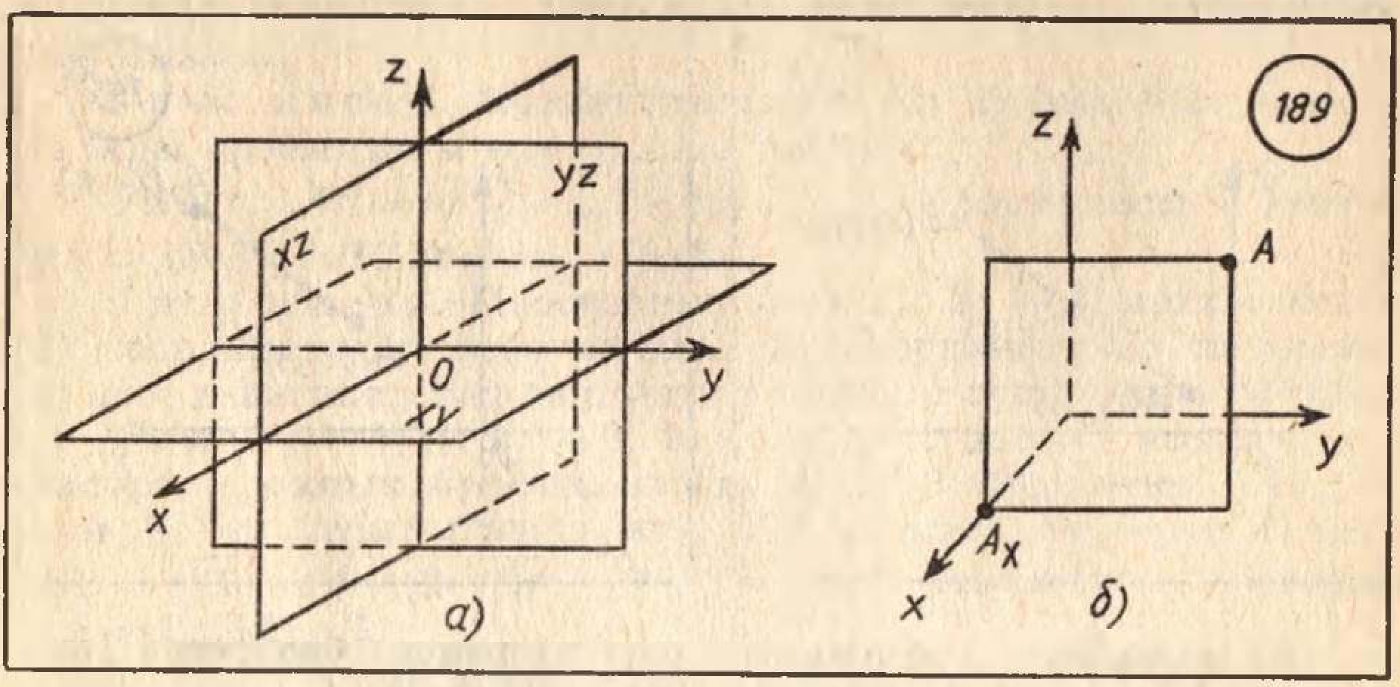
Югарыда язылган ысул белән x һәм y координаталары күрсәтелгән яссылыкны xy яссылыгы дип атарбыз. Бу яссылыктагы координаталар x һәм y булган ирекле нокта A ны $A(x, y)$ дип тамгалыйлар.

Франция галиме Р. Декарт (1596—1650) хөрмәтенә яссылыкта кертелгән x, y координаталарын Декарт координаталары дип атыйлар.

Декарт координаталары пространствода аналогик рәвештә кертелә.

Бер үк O ноктасында кисешүче үзара перпендикуляр x, y, z турылары алыйк (189 нчы рәсем, *а*). Бу турыларның һәр пары аша яссылык үткәрик. x һәм y турылары аша үтүче яссылык xy яссылыгы дип атала. Калган ике яссылык тиңдәшле рәвештә xz һәм yz яссылыклары дип атала. x, y, z турылары — *координаталы күчәрләр* яки координаталар күчәрләре дип, аларның кисешү ноктасы O — *координаталар башлангычы* дип, ә xy, yz, xz *координаталы яссылыклар* дип атала. O ноктасы координата күчәрләренең һәркайсын ике ярымтурыга бүлә. Аларның берсе — уңай, икенчесе тискәре дип атала.

Әгәр A ноктасы аша yz яссылыгына параллель яссылык үткәрсәк (189 нчы рәсем, *б*), ул x күчәрен ниндидер A_x ноктасында кисеп үтәр. Абсолют зурлыгы буенча OA_x кисемтәсенең озынлыгына тигез булган сан A ноктасының x координатасы дип атала. A_x ноктасы уңай ярымкүчәрдә ятса — уңай, тискәре ярымкүчәрдә ятса — тискәре булыр. A_x ноктасы O ноктасы белән тәңгәл килсә, $x=0$ була, y һәм z координаталары да шуңа аналогик рәвештә билгеләнә. Координата-



189

лары x, y, z булган A ноктасын гадәттә болай язалар: $A(x;\ y;\ z)$.

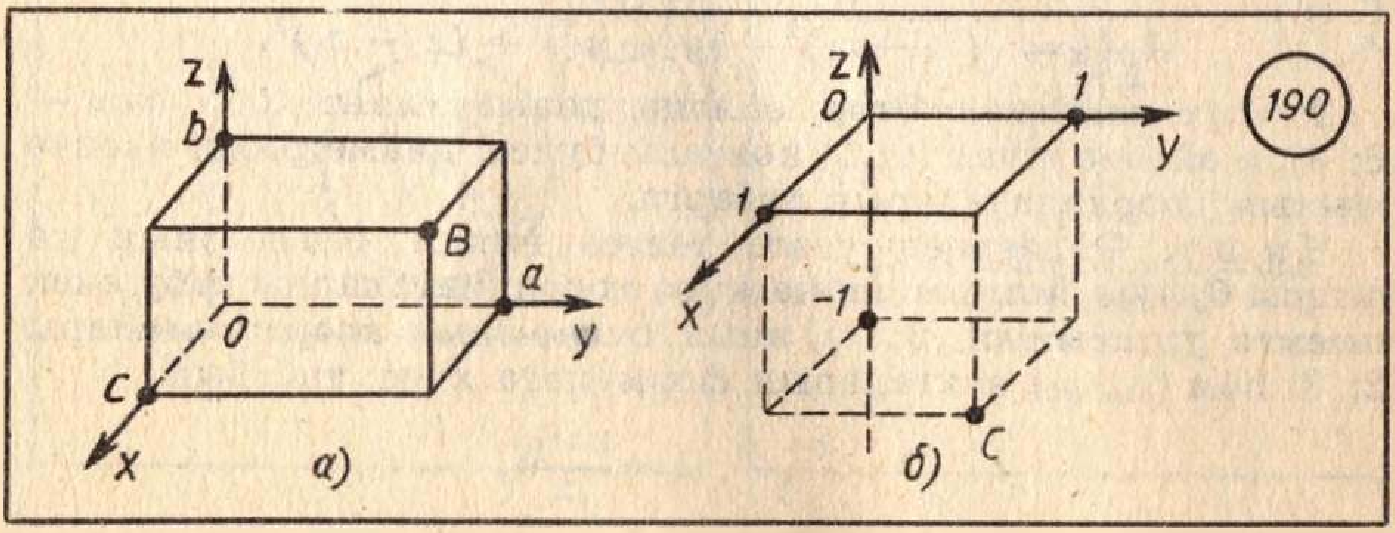
Шулай итеп, пространствоның һәр A ноктасына өч сан — пространстводагы A ноктасының координаталарын — x, y, z не тиңдәш итәләр.

190 нчы a рәсемдә B ноктасының пространствода өч координатасы бар: c, a, b, ягъни $B(c;\ a;\ b)$.

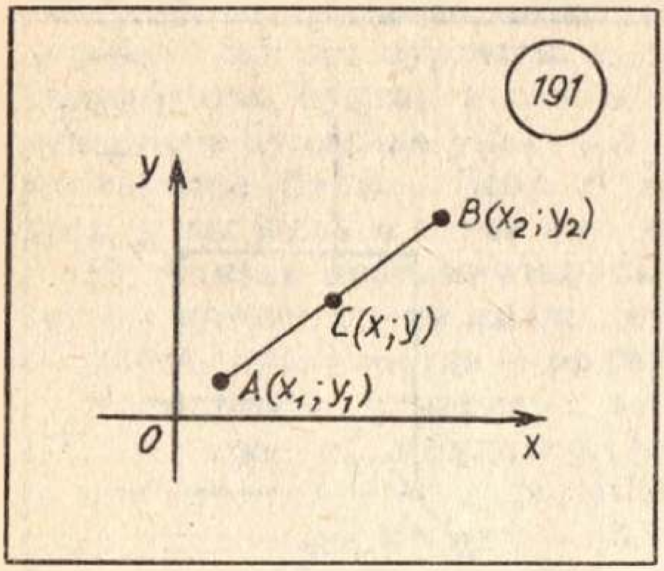
Өч сан буенча нoктаның пространстводагы торышын табарга була. Мәсәлән, 1, 1, -1 саннары C ноктасының пространствода торышын бирәләр (190 нчы рәсем, *б*).

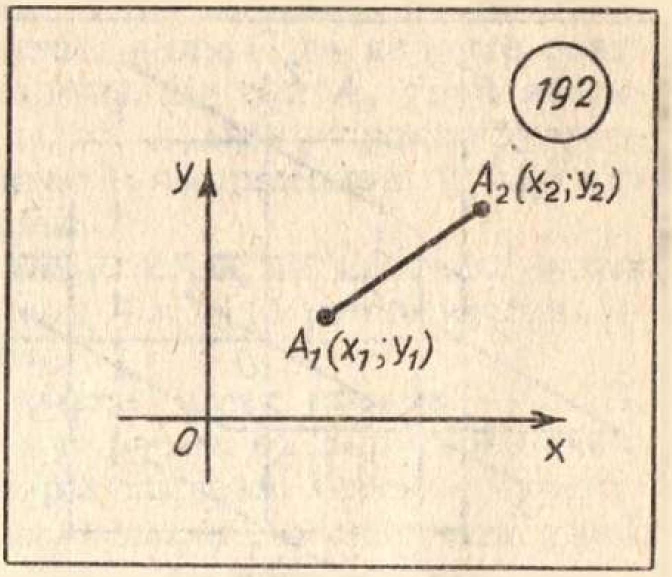
66. Кисемтә уртасының координаталары. Нокталар арасындагы ераклык. $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2)$ — яссылыкның ирекле ике ноктасы һәм $C(x;\ y)$ — AB кисемтәсенең уртасы булсын (191 нче рәсем). C ноктасының координаталарын A һәм B нокталарының координаталары белән бәйләүче формулалар түбәндәгечә бирелә:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



190





AB кисемтәсе координата күчәрләренең берәрсенә параллель булган очракта да формулалар дөрес.

Пространствоның A, B һәм C нокталары өчен дә бу формулалар шундый ук.

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — ирекле рәвештә алынган ике нокта булсын. AA_1 кисемтәсенең уртасын — C ноктасының координаталары x, y, z не — аның A_1 һәм A_2 очларының координаталары аша белдергән формулалар түбәндәгечә:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Үзенең координаталары белән бирелгән нокталар арасындагы ераклыкны табу формуласы бар.

Әгәр $A_1(x_1;\ y_1)$ һәм $A_2(x_2;\ y_2)$ нокталары яссылыкта ятсалар (192 нче рәсем), A_1 һәм A_2 арасындагы ераклык

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

формуласы белән табыла.

Бу формула A_1 һәм A_2 нокталарының теләсә нинди торышы өчен дөрес.

Пространствоның $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нокталары арасындагы ераклыгы түбәндәге формула буенча табыла:

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

1 нче мисал. Әгәр әйләнә диаметрының бер очы — (2; 3), ә әйләнә үзәге (0, 1) ноктасы булса, диаметрның икенче очының координаталарын табарга.

Чишү. Әйләнәнең үзәге теләсә нинди диаметрның да уртасы булуы билгеле, шуңа күрә координаталарны табу өчен кисемтә уртасының (0; 1), аның очларының координаталары (2; 3) һәм $(x_2;\ y_2)$ нокталарын формулага куеп, табабыз:

$$0=\frac{2+x_2}{2},\ 1=\frac{3+y_2}{2},$$

моннан $x_2=-2$, $y_2=-1$ — диаметрның икенче очының координаталары.

2 нче мисал. Яссылыктагы $A(-1;\ 2)$ һәм $B(2;\ 4)$ нокталары арасындагы ераклыкны табарга.

Чишү. $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ формуласы буенча $AB=\sqrt{9+4}=13$ икәнен табабыз.

3 нче мисал. Пространствоның $(1;\ 2;\ -3)$ ноктасыннан 1) координаталар яссылыгына; 2) координаталар күчәренә; 3) координаталар башлангычына кадәрге ераклыкны табарга.

Чишү. 1) $A(1;\ 2;\ -3)$ һәм AA_1-A дан xy яссылыгына кадәрге ераклык булсын, ягъни $A_1(1;\ 2;\ 0)$, чөнки $AA_1\perp xy$ һәм A_1 xy яссылыгында ята. Ул вакытта формула буенча $AA_1=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(0+3)^2}=3$. Аналогик рәвештә $AA_2=2$, $AA_3=1$.

2) AA_x-A дан x ка кадәрге ераклык булсын, ул вакытта $A_x(1;\ 0;\ 0)$, моннан $AA_x=\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$. Аналогик рәвештә $AA_y=\sqrt{10}$, $AA_z=\sqrt{5}$.

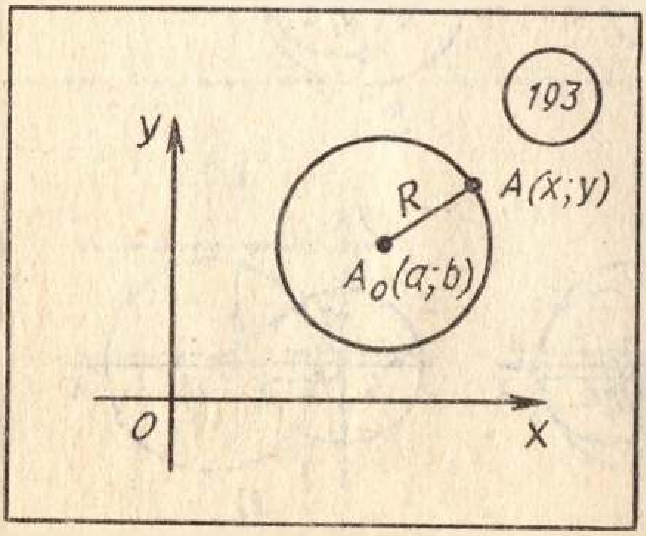
3) $O(0;\ 0;\ 0)$ булганлыктан, $AO=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$.

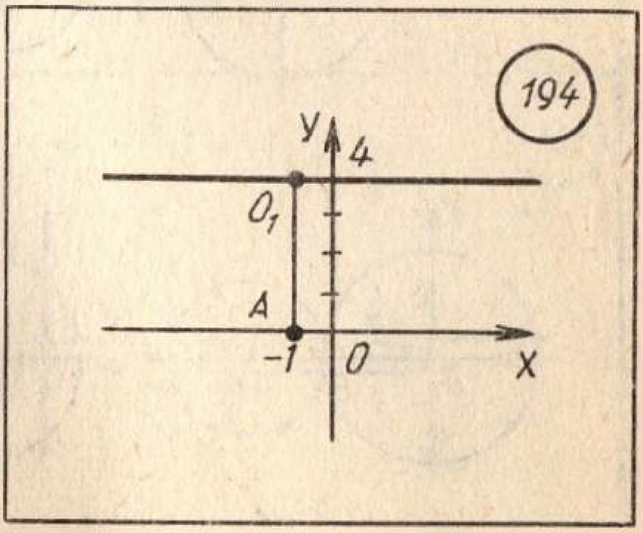
§ 17. Яссылыкта фигураларның тигезләмәләре

67. Әйләнә тигезләмәсе. Фигураның теләсә кайсы ноктасының координаталары тигезләмәнең чишелеше булса, бу ике x һәм y үзгәрешлеле тигезләмә декарт координаталарында *яссылыктагы фигураның тигезләмәсе* дип атала. Һәм киресенчә: бу тигезләмәне канәгатьләндерүче теләсә нинди ике сан фигураның кайсыдыр бер ноктасының координаталары була.

Үзәге $A_0(a;\ b)$ ноктасында һәм радиусы R булган әйләнә (193 нче рәсем) түбәндәге тигезләмә белән бирелә:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$





Әгәр әйләнә үзәге координаталар башлангычы булса, аның тигезләмәсе

$$x^2+y^2=R^2$$

рәвешендә була.

Мисал. x күчәренә $A(-1;\ 0)$ ноктасында орынучы һәм $y=4$ турысында үзәге булган әйләнә тигезләмәсен төзергә.

Чишү. xy координаталар системасында $y=4$ турысын һәм $A(-1;\ 0)$ ноктасын төзибез (194 нче рәсем). Шарт буенча әйләнә x күчәренә A ноктасында орынырга тиеш, ә аның үзәге $y=4$ турысында ятарга тиеш, ягъни әйләнә үзәге O_1 ноктасының координаталары $O_1(-1;\ 4)$ булыр. Эзләнә торган тигезләмә үзәге $(-1;\ 4)$ ноктасында һәм радиусы 4 булган әйләнә тигезләмәсе була:

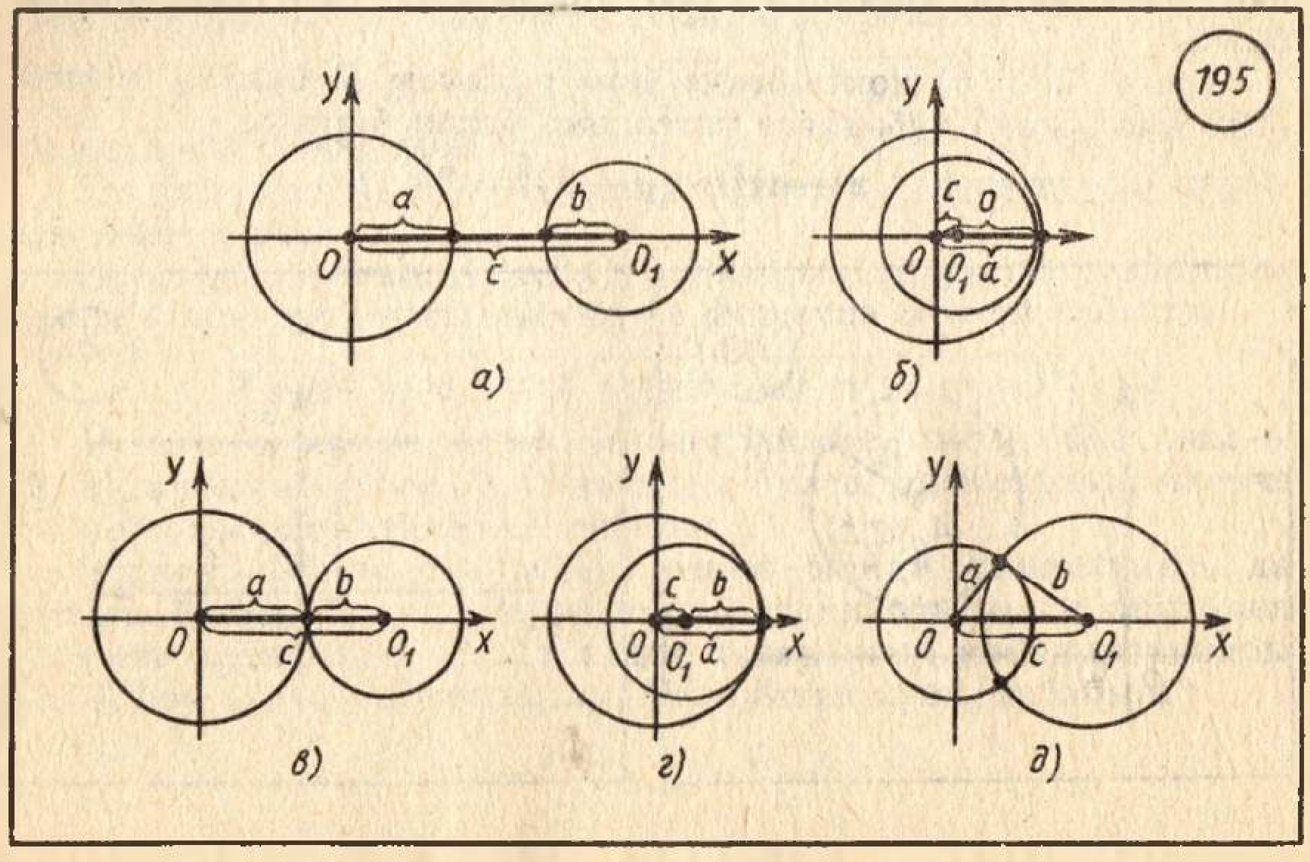
$$(x+1)^2+(y-4)^2=16.$$

68. Ике әйләнәнең кисешүе. 195 нче рәсемдә үзәкләре O һәм O_1 булган, үзәкләре арасындагы ераклык $OO_1=c$ һәм тиңдәшле рәвештә радиуслары a һәм b га тигез булган ике әйләнә бирелгән. O ноктасын — координаталар системасының башлангычы, ә OO_1 ярымтурысын уңай x ярымкүчәре дип кабул итәрбез. Ул вакытта әйләнәләрнең тигезләмәләре

$$x^2+y^2=a^2,\ (x-c)^2+y^2=b^2$$

булыр.

Бу тигезләмәләр системасын чишеп, мондый нәтиҗә ясарга була: a, b, c саннарының берсе калган икесенең сумма-



а) б) в) г) д)

сыннан зуррак булса, әйләнәләрнең уртак ноктасы булмый (195 нче рәсем, *а*); әгәр аларның берсе калган икесенең суммасына тигез булса, әйләнәләр орыналар (195 нче рәсем, *в*, *г*); әгәр бу саннарның һәркайсы калган икесенең суммасыннан кечкенәрәк булса, әйләнәләрнең ике уртак нокталары була, ягъни кисешәләр (195 нче рәсем, *д*).

69. Туры тигезләмәсе. Яссылыкта декарт координаталарында теләсә нинди туры

$$ax+by+c=0$$

тигезләмәсе белән бирелә.

Бу тигезләмәдәге a һәм b коэффициентлары төрле кыйммәтләр алырга мөмкин. Шуңа бәйле рәвештә туры яссылыкта төрлечә урнаша. Кайбер аерым очракларны карыйк.

1. $a=0$, $b\neq 0$. Бу очракта турының тигезләмәсен болай язарга мөмкин: $y=-\frac{c}{b}$. Турының барлык нокталары бер үк $\left(-\frac{c}{b}\right)$ ординаталы булалар, димәк, туры x күчәренә параллель (196 нчы рәсем, *а*). Аерым алганда, әгәр $c=0$ булса, туры x күчәре белән тәңгәл килә.

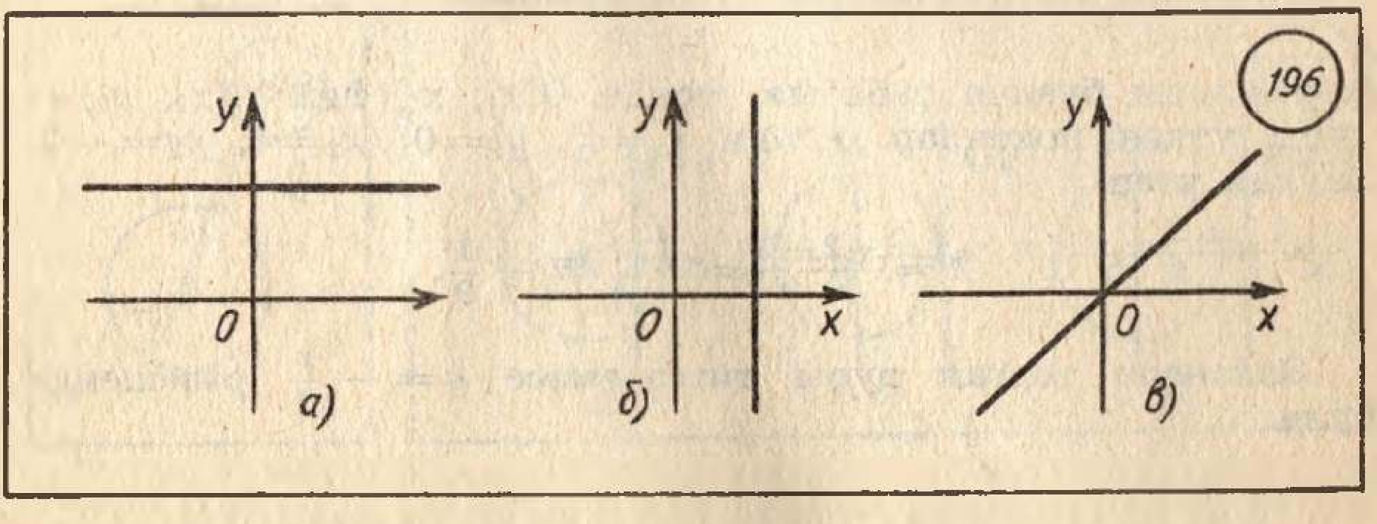
2. $b=0$, $a\neq 0$. Бу очракта тигезләмә $x=-\frac{c}{a}$ рәвешен ала. Туры y күчәренә параллель (196 нчы рәсем, *б*) яки $c=0$ булганда аның белән тәңгәл килә.

3. $c=0$. Тигезләмә $ax+by=0$ рәвешен ала. Туры координаталар башлангычы аша үтә (196 нчы рәсем, *в*).

Әгәр $ax+by+c=0$ турысы тигезләмәсендә коэффициент $b\neq 0$ булса, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ дип язарга була. $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=$ $=q$ дип тамгалап, $y=kx+q$ ны табабыз. Бу тигезләмәдә k коэффициенты *турының почмакча коэффициенты* дип атала.

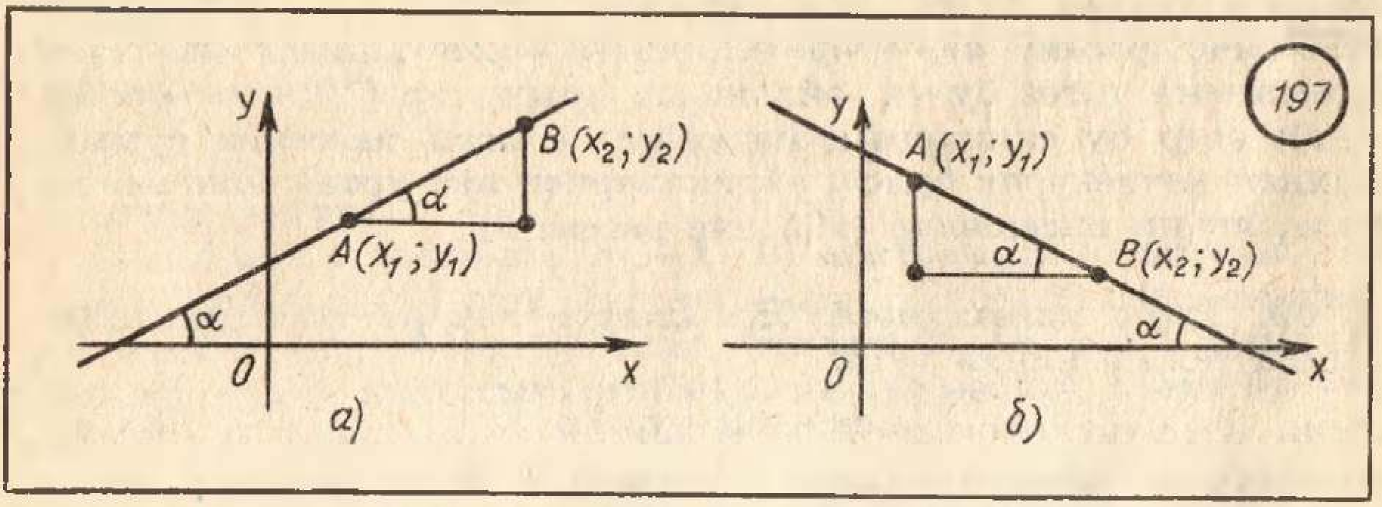
197 нче рәсемдә $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2)$ нокталары рәсемдә сурәтләнгән турыларда яталар, димәк,

$$y_1=kx_1+q,\ y_2=kx_2+q;$$



196

а) б) в)



икенче тигезлектән беренчесен буынлап алып, табабыз:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

моннан $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

197 нче *а* рәсемендә сурәтләнгән очракта

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

197 нче *б* рәсемендә сурәтләнгән очракта

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Турының почмакча коэффициенты түбәндәге геометрик мәгънәгә ия: туры тигезләмәсендәге k коэффициенты тамгасына кадәр төгәллек белән туры x күчәре белән ясаган кысынкы почмак тангенсына тигез.

Мисал. Координаталар башлангычы һәм $A(4;\ -2)$ ноктасы аша үтүче туры тигезләмәсе төзергә.

Туры координаталар башлангычы аша үтә, ягъни $O(0;\ 0)$ ноктасының координаталары $0 = k \cdot 0 + q$ турысының тигезләмәсен канәгатьләндерәләр, ягъни $q = 0$.

Почмакка коэффициент k ны

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

формуласы буенча табабыз, монда $O(x_1;\ x_2)$ һәм $A(x_2;\ y_2)$ — туры үткән нокталар, ягъни $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 4$, $y_2 = -2$. Шулай итеп,

$$k = \frac{-2-0}{4-0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Эзләнелә торган туры тигезләмәсе $y = -\frac{x}{2}$ рәвешендә була.

70. Турының һәм әйләнәнең кисешүе. 198 нче рәсемдә радиусы R булган әйләнә һәм a турысы сурәтләнгән, d — бу әйләнәнең үзәгеннән a турысына кадәрге ераклык. Әгәр әйләнә үзәген координаталар башлангычы, ә a турысына перпендикуляр турыны x күчәре итеп алсак (199 нчы рәсем), ул вакытта әйләнә һәм туры тигезләмәләре болай була: $x+y=$ $=R$, $x=d$. Табылган системаны чишеп, $x=d$, $y=\pm\sqrt{R^2-d^2}$ икәнен табабыз.

Әгәр $R>d$ булса, әйләнә белән турының ике уртак ноктасы бар, ягъни алар кисешәләр (199 нчы рәсем, *а*); әгәр $R=d$ булса, туры белән әйләнәнең бер уртак ноктасы була, ягъни алар орыналар (199 нчы рәсем, *б*); әгәр $R<d$ булса, туры белән әйләнә кисешми (199 нчы рәсем, *в*).

1 нче мисал. Үзәге $A(2;\ 3)$ ноктасында булган әйләнә y күчәренә орына. Әлеге әйләнә x күчәрен кисеп үтәме?

Чишү. Мәсьәләнең шартыннан әйләнә радиусы 2 гә тигез икәнлеге килеп чыга, ә тигезләмә $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ рәвешендә булыр. Аннан соң мәсьәләне төрлечә чишеп була.

1 нче ысул. Әйләнә x күчәрен киссен өчен, $R<d$ шарты үтәлергә тиеш, биредә R — әйләнә радиусы, ә d — әйләнә үзәгеннән турыга кадәр ераклык. $R=2$, ә $d=3$ булганлыктан, әйләнә x күчәрен кисеп үтми.

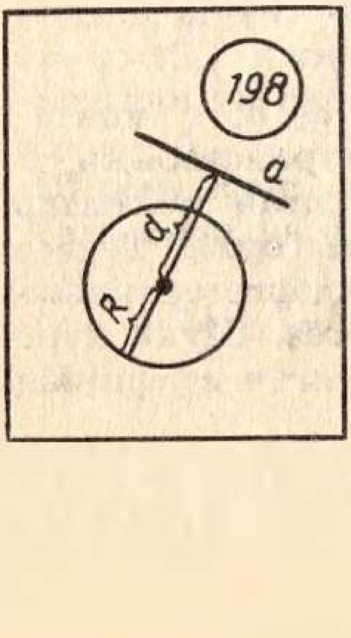
2 нче мисал. $y=0$ булганда $(x-2)^2+(0-3)^2=4$, $(x-2)^2=-5$, ә бу мөмкин түгел. $y\leqslant 0$ шарты $(x-2)^2\leqslant -5$ тигезсезлегенә китерә, шуңа күрә мондый нәтиҗә ясый алабыз: $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ әйләнәсе x күчәрен кисеп үтми.

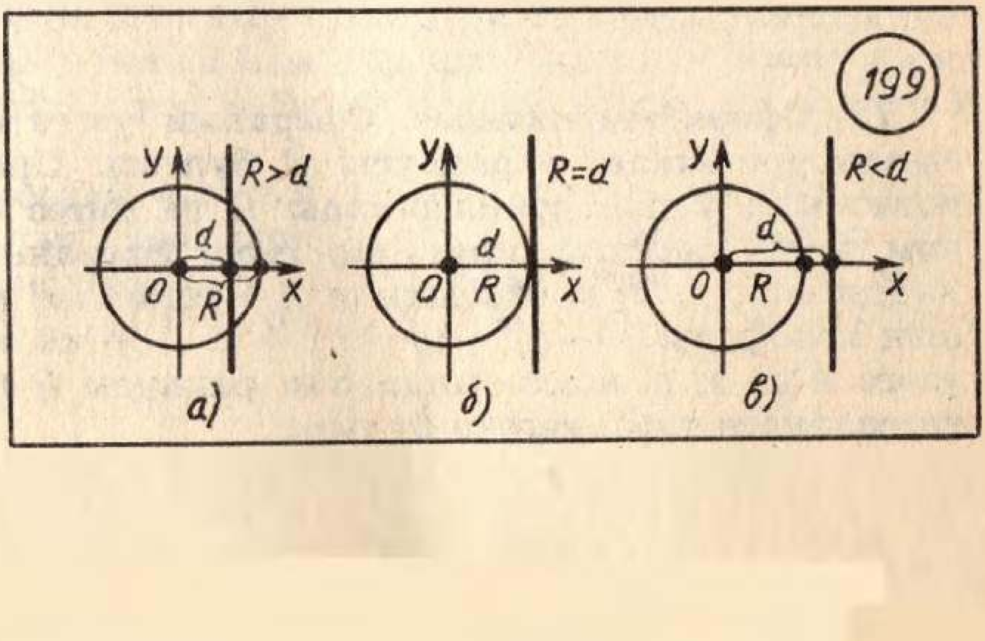
2 нче мисал. c нинди кыйммәт алганда $x+y+c=0$ турысы $x^2+y^2=1$ әйләнәсенә орына?

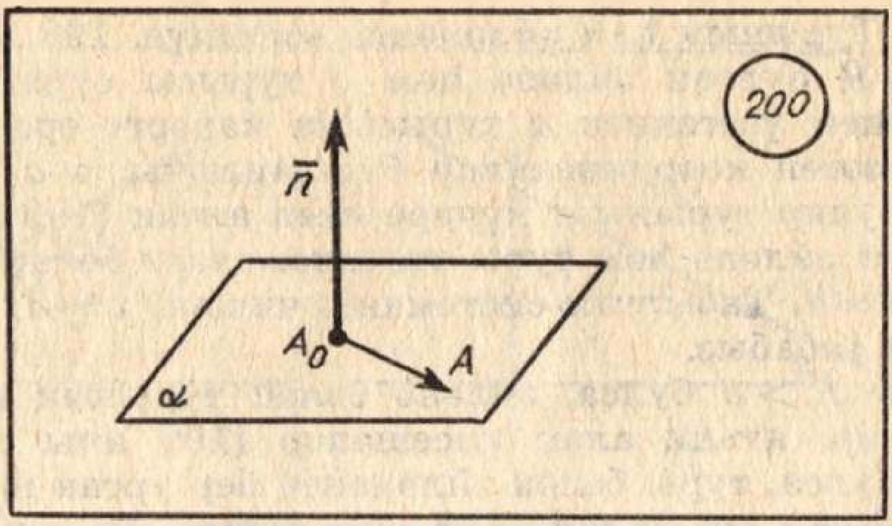
Чишү. Тигезләмәләр системасын чишәбез:

$$\begin{cases} x+y+c=0, \\ x^2+y^2=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-c-y, \\ (-c-y)^2+y^2=1. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәнең рәвешен үзгәртеп, дискриминанты $D=-4c^2+8$ гә тигез булган $2y^2+2cy+c^2-1=0$ квадрат тигезләмәсен табабыз. Туры белән әйләнә орынсыннар өчен,


198


199



аларның бердәнбер уртак нокталары булуы кирәк, ә бу табылган квадрат тигезләмәнең y ка карата бердәнбер чишелеше булырга тиеш дигәнне аңлата. $D=0$, ягъни $-4c^2+8=0$ булганда әлеге очрак була, моннан $c=\pm\sqrt{2}$. $x+y+\sqrt{2}=0$ һәм $x+y-\sqrt{2}=0$ турылары $x^2+y^2=1$ әйләнәсенә орыналар.

§ 18. Фигураларның пространстводагы тигезләмәләре

71. Яссылык тигезләмәсе. Пространствода фигура тигезләмәсе яссылыктагы кебек үк билгеләнә.

$A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — α яссылыгының ноктасы һәм $n(a;\ b;\ c)$ бу яссылыкта перпендикуляр вектор булсын (200 нче рәсем). $A(x;\ y;\ z)$ — α яссылыгының ирекле ноктасы, ягъни $AA_0\perp n$ булсын, ул вакытта $AA_0\cdot n=0$. A ноктасының координаталары

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \qquad (1)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерәләр.

Әгәр $A(x;\ y;\ z)$ ноктасы (1) тигезләмәне канәгатьләндерсә, ул вакытта A ноктасының α яссылыгында ятуы да дөрес. Шулай итеп, (1) тигезләмә α яссылыгы тигезләмәсе була.

Яссылык тигезләмәсен

$$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$$

рәвешендә язып була. Бу тигезләмәдә a, b, c коэффициентлары әлеге яссылыкка перпендикуляр векторның координаталары була.

72. Сфера тигезләмәсе. Сфераның үзәге $A(a;\ b;\ c)$ ноктасында урнашкан, ә радиусы R булсын. Пространстводың A ноктасына кадәр ераклыклары R га тигез булган нокталар һәм бары тик шул нокталар гына сфераныкы була. Теләсә нинди $B(x;\ y;\ z)$ ноктасыннан A ноктасына кадәрге ераклыкның квадраты $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ ка тигез. Шуңа күрә үзәге $A(a;\ b;\ c)$ ноктасында һәм радиусы R булган сфераның тигезләмәсе түбәндәгечә булыр:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Үзәге (2; −1; 3) ноктада һәм радиусы 5 булган сфера $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$ тигезләмәсе белән бирелә.

Сфераның үзәге координаталар башлангычында булса, R радиуслы сфераның тигезләмәсе

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

рәвешендә булыр.

Шар тигезләмә белән түгел, ә тигезсезлек белән бирелә. Үзәге $A(a;\ b;\ c)$ ноктасында һәм радиусы R булган шарны тикшерик. Шарның билгеләмәсе буенча (п. 54) $AM\leqslant R$, ягъни $AM^2\leqslant R^2$ булган барлык шундый M нокталары шарныкы була. $A(a;\ b;\ c)$, ә $M(x;\ y;\ z)$ координаталы икәнен исәпкә алып, табабыз:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2.$$

Әгәр шарның үзәге координаталар башлангычында ятса, тигезсезлек түбәндәгечә булыр:

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2.$$

Яссылыктагы турыпочмаклы координаталарда радиусы r, үзәге $A(a;\ b)$ ноктасында яки координаталар башлангычында булган түгәрәк

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2 \text{ яки } x^2+y^2\leqslant r^2$$

тигезсезлеге белән аналогик рәвештә бирелә.

Мисал. Әгәр сфераның радиусы 3 кә тигез һәм $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 4;\ 0)$ нокталары аша үтсә, сфераның тигезләмәсен языгыз.

Чишү. Үзәге $M(a;\ b;\ c)$ ноктасында һәм радиусы 3 булган сфераның тигезләмәсе $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=9$ рәвешендә булыр. Аны A, B һәм C нокталарының координаталары канәгатьләндерергә тиеш. a, b һәм c саннары сфера тигезләмәсенә бирелгән өч ноктаның координаталарын куюдан килеп чыккан өч тигезләмә системасыннан табыла:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9, \\ (4-a)^2+b^2+c^2=9, \\ a^2+(4-b)^2+c^2=9. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәне буынлап икенче һәм өченче тигезләмәдән алып, $16-8a=0$, $16-8b=0$ не табабыз, моннан $a=b=2$. c ның кыйммәте a һәм b ның табылган кыйммәтләрен беренче тигезләмәгә куеп табыла: $4+4+c^2=9$, $c^2=1$, $c_1=1$, $c_2=-1$.

Шулай итеп, мәсьәлә шартын канәгатьләндерүче ике сфера бар икән, аларның үзәкләре $O_1(2;\ 2;\ 1)$ ноктасында һәм $O_2(2;\ 2;\ -1)$ ноктасында, ә тигезләмәләре болай була: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ һәм $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

73. Сфера белән яссылыкның үзара торышы. R радиуслы сфера бирелсен, аның үзәге C дан α яссылыгына кадәрге ераклык d га тигез булсын. 201 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, координаталар системасы кертәбез: xy яссылыгы α яссылыгы белән тәңгәл килә, ә сфераның үзәге C z күчәрендә ята. Координаталарның бу системасында C ноктасының координаталары $(0;\ 0;\ d)$ була, шуңа күрә сфера тигезләмәсе болай була: $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$. Яссылык координаталар яссылыгы xy белән тәңгәл килә, шуңа күрә аның тигезләмәсе $z=0$.

Әгәр нинди дә булса $M(x;\ y;\ z)$ ноктасының координаталары тигезләмәнең икесен дә канәгатьләндерсә, M ноктасы α яссылыгында да, сферада да ята, ягъни яссылык белән сфераның уртак ноктасы була. Әгәр бу ике тигезләмә системасының чишелешләре булмаса, сфера белән яссылыкның уртак нокталары булмый. Шулай итеп, сфера белән яссылыкның үзара торышы турындагы мәсьәлә

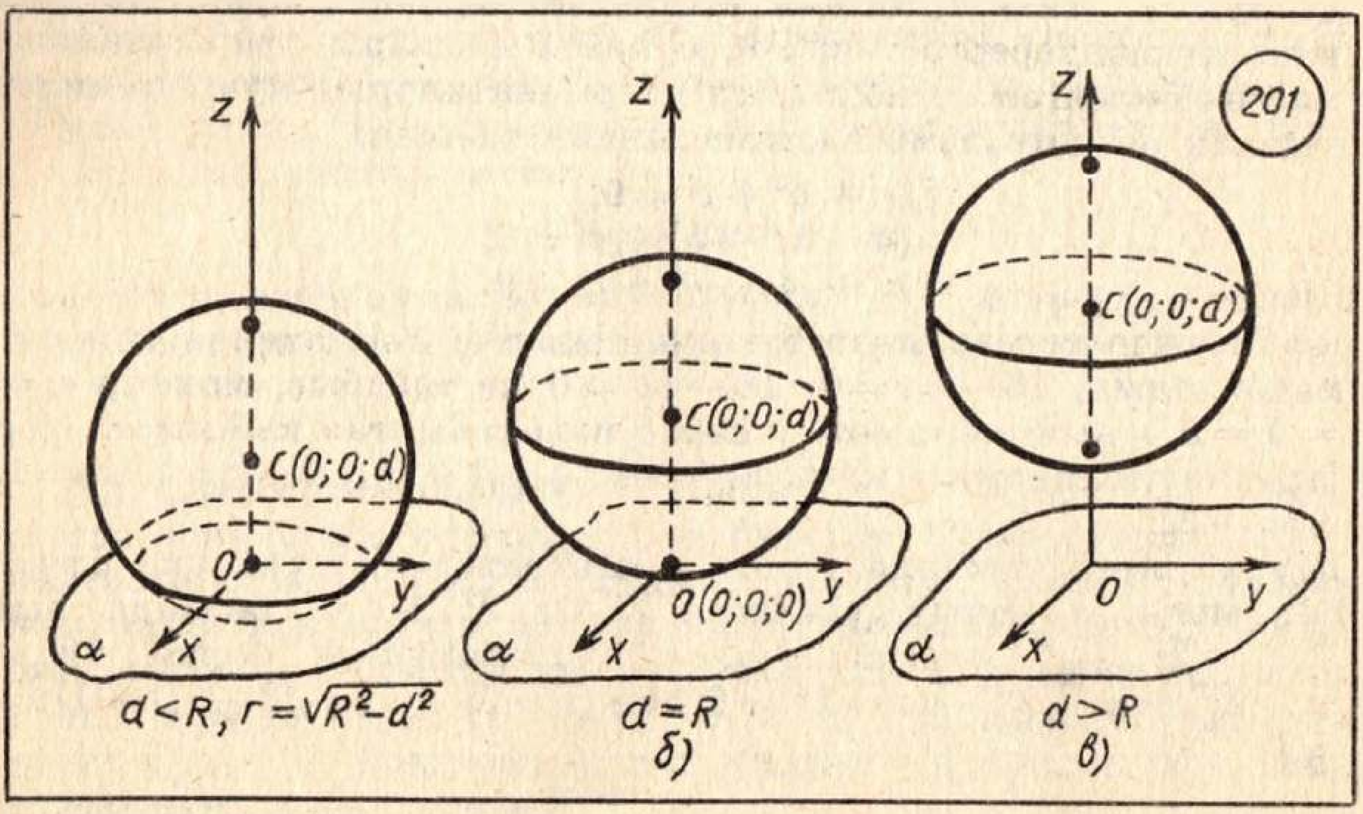
$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \end{cases}$$

тигезләмәләр системасын тикшерүгә кайтып кала.

Өч очрак булырга мөмкин:

1. $d<R$. Системаның чишелешләре чиксез күп, барлык нокталар да әйләнәдә ята. Нәтиҗә: әгәр сфера үзәгеннән яссылыкка кадәрге ераклык радиустан кечерәк булса, сфераның яссылык белән киселеше әйләнә була (201 нче рәсем, *а*).

2. $d=R$. Системаның чишелеше бердәнбер. Нәтиҗә: әгәр сфера үзәгеннән яссылыкка кадәрге ераклык сфераның радиу-



$d<R,\ r=\sqrt{R^2-d^2}$

$d=R$
б)

$d>R$
в)

сына тигез булса, сфера белән яссылыкның бердәнбер уртак ноктасы — орыну ноктасы була (201 нче рәсем, *б*).

3. $d > R$. Системаның чишелешләре юк. Нәтиҗә: әгәр сфера үзәгеннән яссылыкка кадәрге ераклык сфера радиусыннан зуррак булса, сфера белән яссылыкның уртак нокталары булмый (201 нче рәсем, *в*).

74. Ике сфераның кисешүе. Ике сфераның кисешү шартын табу өчен аларның үзәкләрен тоташтыручы турыны x күчәре дип алабыз. $A(a;\ 0;\ 0)$ ноктасы — беренче сфераның үзәге, ә R_1 аның радиусы булсын. $B(b;\ 0;\ 0)$ ноктасы — икенче сфераның үзәге, ә R_2 аның радиусы булсын.

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2 \text{ һәм } (x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2$$

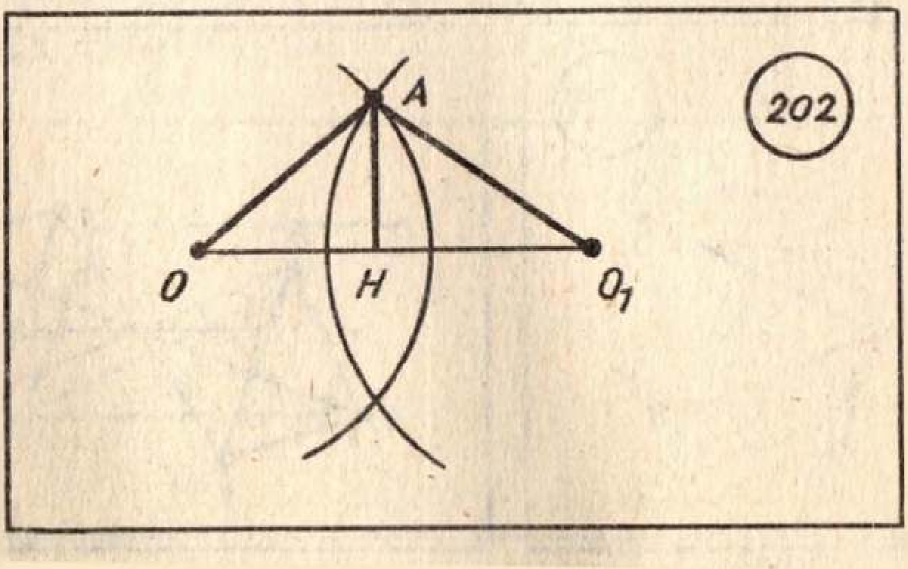
сфераларның тигезләмәләре булыр. Бу системаны чишеп, түбәндәге нәтиҗәгә килергә мөмкин:

Т.4.1. | Ике сфераның кисешү сызыгы әйләнә була.

Мисал. Шарларның радиуслары 25 һәм 29 дм га, ә аларның үзәкләре арасындагы ераклык 36 дм га тигез. Аларның өслекләренең кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

Чишү. Яссылыкта 36 дм озынлыктагы OO_1 кисемтәсе һәм радиуслары 25 һәм 29 дм, үзәкләре O һәм O_1 ноктасында булган ике әйләнә карыйк. Әгәр A — бу әйләнәләрнең кисешү нокталарының берсе булса (202 нче рәсем), мәсьәлә шартында бирелгән сфераларның (бирелгән шарларның өслекләренең) кисешүеннән килеп чыккан әйләнәнең радиусы r AOO_1 өчпочмагының AH биеклегенә тигез һәм Герон формуласы буенча якынча мәйданын исәпләп, әлеге радиусны табарга була (п. 37). $p=\frac{1}{2}(36+25+29)=45$. $S_{\triangle AOO_1}=\sqrt{45\cdot 9\cdot 20\cdot 16}=$ $=9\cdot 5\cdot 2\cdot 4=360$. Икенче яктан $S_{\triangle AOO_1}=\frac{1}{2}r\cdot 36$, моннан $r=$ $=20$ дм $=2$ м.

Сфералар кисешүеннән килеп чыккан әйләнәнең озынлыгы $C=2\pi r=4\pi$ м.



V БҮЛЕК. ФИГУРАЛАРНЫ ҮЗГӘРТҮ

§ 19. Хәрәкәт

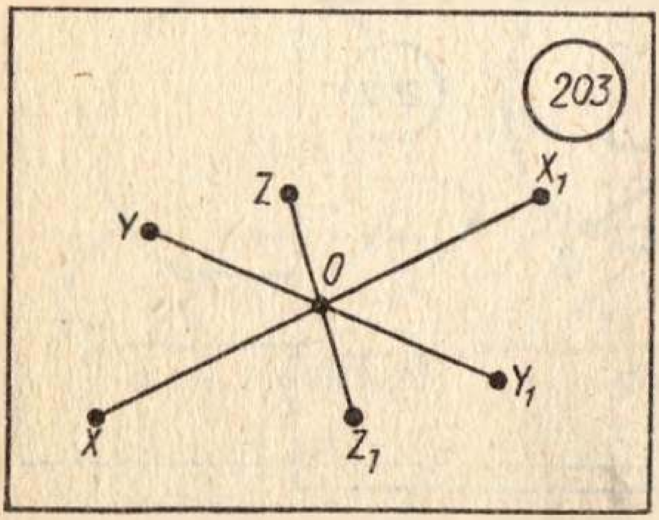
75. Фигураларны үзгәртүгә мисаллар. Геометрия курсында *фигураларны үзгәртү* яссылыкта һәм пространствода өйрәнелә. Әгәр бирелгән фигураның һәр ноктасын яссылыкта һәм пространствода ничек булса да урыныннан күчерсәк, без яңа фигура табарбыз. Бу фигура бирелгән фигурадан үзгәртү юлы белән килеп чыккан, диләр. Фигураларны үзгәртүгә берничә мисал китерик.

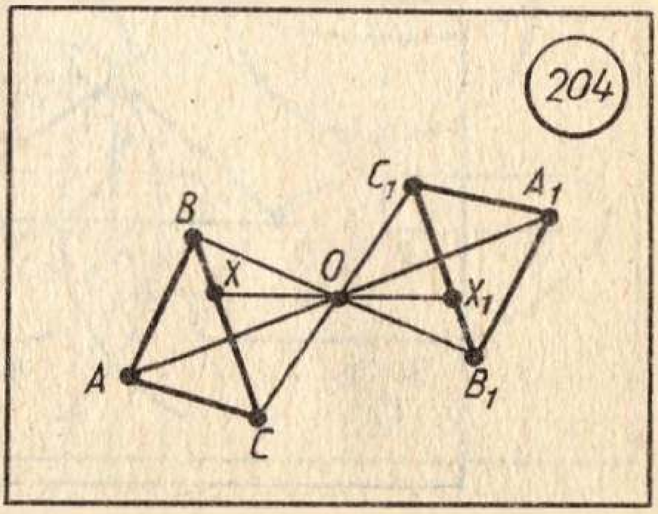
1. Ноктага карата симметрия (үзәкле симметрия). Ноктага карата симметрия болай билгеләнә. O — билгеләнгән нокта һәм X — ирекле нокта булсын. Әгәр X, O, X_1 нокталары бер турыда ятсалар һәм $OX=OX_1$ булса, X_1 ноктасы *O ноктасына карата X ноктасына симметрик* дип атала. O ноктасына симметрик нокта O ноктасы үзе була. 203 нче рәсемдә X һәм X_1, Y һәм Y_1, Z һәм Z_1 нокталары O ноктасына карата бер-берсенә симметрияле.

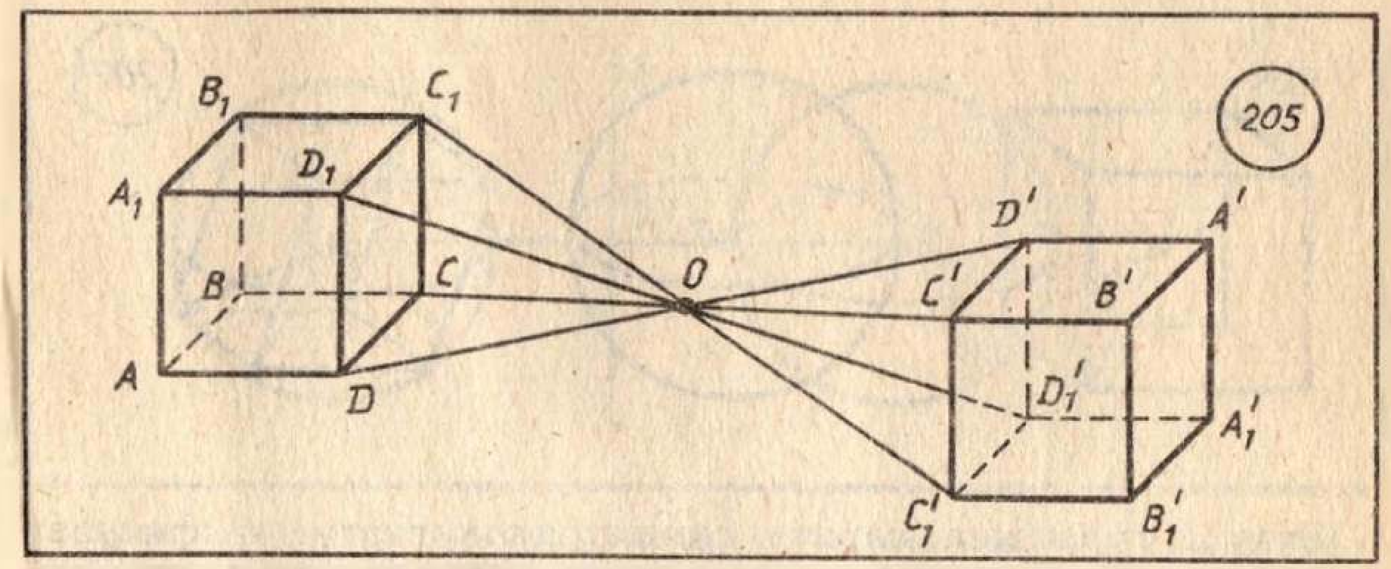
F — бирелгән фигура һәм O — яссылыкның билгеләнгән ноктасы булсын. F фигурасының һәр X ноктасын бирелгән O ноктасына карата симметрик X_1 ноктасына күчереп, F фигурасын F_1 фигурасына үзгәртү *O ноктасына карата симметрия үзгәртүе* дип атала. 204 нче рәсемдә O үзәгенә карата $\triangle ABC$ га симметрик булган $\triangle A_1B_1C_1$ сурәтләнгән.

205 нче рәсемдә O ноктасына карата симметрик булган ике куб сурәтләнгән.

Әгәр O ноктасына карата симметрия үзгәртүе фигураны үзенә күчерсә, ул *үзәк симметрияле* фигура дип атала, ә O ноктасын әлеге *симметриянең үзәге* дип атыйлар. Мәсәлән, параллелограмм үзәк симметрияле фигура булып тора. Диагональләрнең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге була (206 нчы рәсем, *а*). O үзәкле әйләнә шулай ук симметрия үзәге


203


204



205

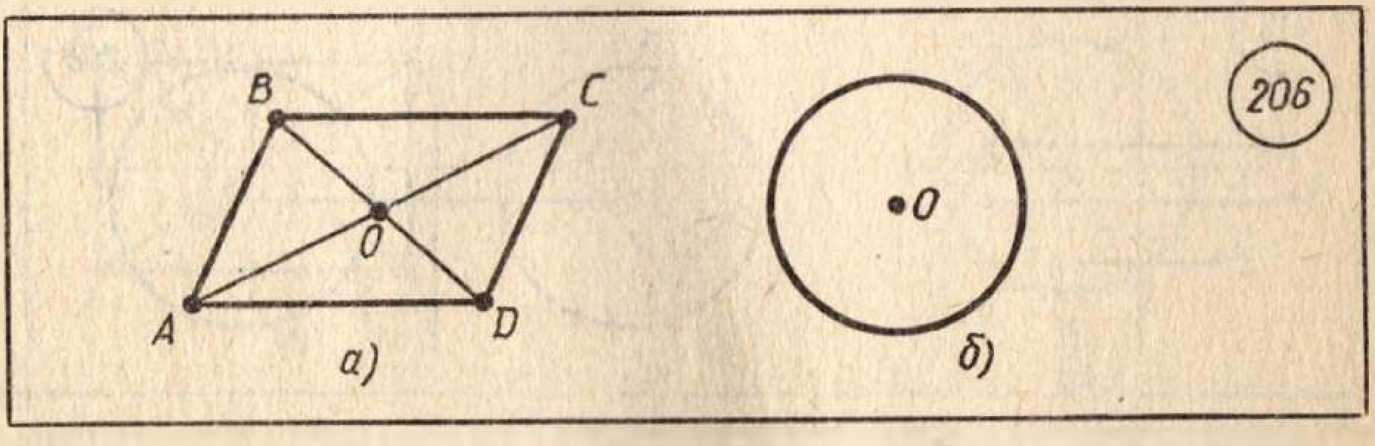
O булган үзәк симметрияле фигура (206 нчы рәсем, *б*). Барлык санап үткән фигуралар яссы фигуралар.

Пространствода да, яссылыктагы кебек үк, үзәк симметрияле фигураларга мисаллар күп. Мәсәлән, 207 нче рәсемдә шундый фигуралар сурәтләнгән. Куб, сфера, параллелепипед.

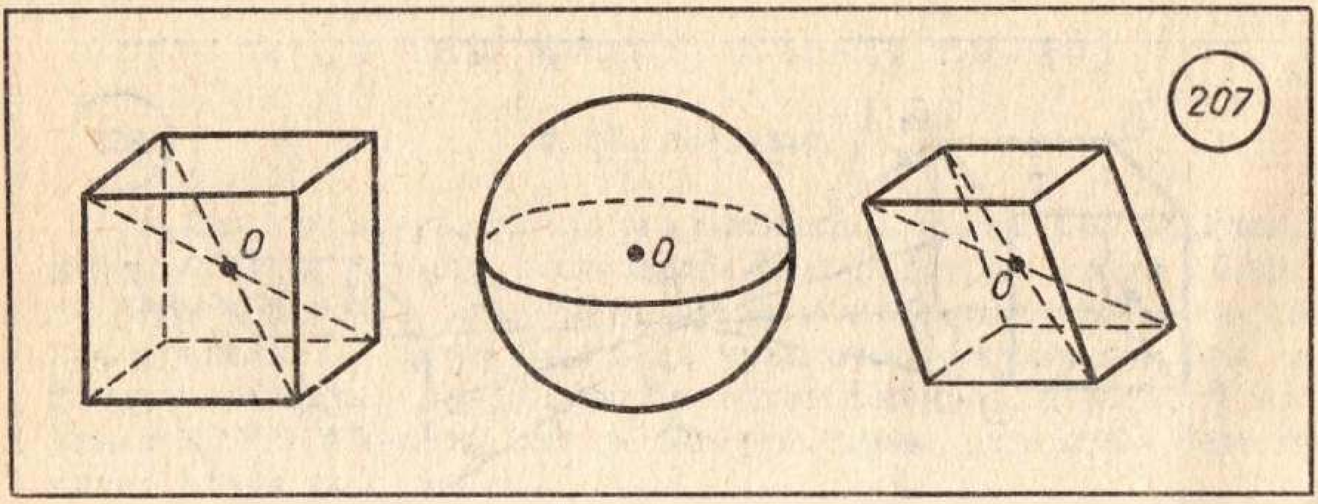
2. **Турыга карата симметрия (күчәр симметриясе).** l — билгеләнгән туры булсын (208 нче рәсем). Әгәр XX_1 турысы l турысына перпендикуляр һәм $OX_1 = OX$ булса (биредә O — XX_1 һәм l турыларының кисешү ноктасы), X_1 ноктасы *l турысына карата X ноктасына симметрик* дип атала. Әгәр X ноктасы l турысында ятса, аңа симметрик нокта X ноктасы үзе була. X ноктасы X_1 ноктасына симметрик нокта була. 208 нче *а* рәсемдә X һәм X_1, Y һәм Y_1, Z һәм Z_1 нокталары l турысына карата симметрик була.

Әгәр F фигурасын F_1 фигурасына үзгәрткәндә F фигурасының һәр X ноктасы F_1 фигурасындагы l турысына карата симметрик X_1 ноктасына күчсә, бу үзгәртү *l турысына карата симметрия үзгәртүе* дип атала. Бу вакытта F һәм F_1 фигуралары l турысына карата симметрик фигуралар дип атала. 208 нче *б* рәсемдә *l турысына карата симметрик* булган әйләнәләр сурәтләнгән.

209 нчы рәсемдә l турысына карата симметрик булган ике сфера сурәтләнгән.



206



207

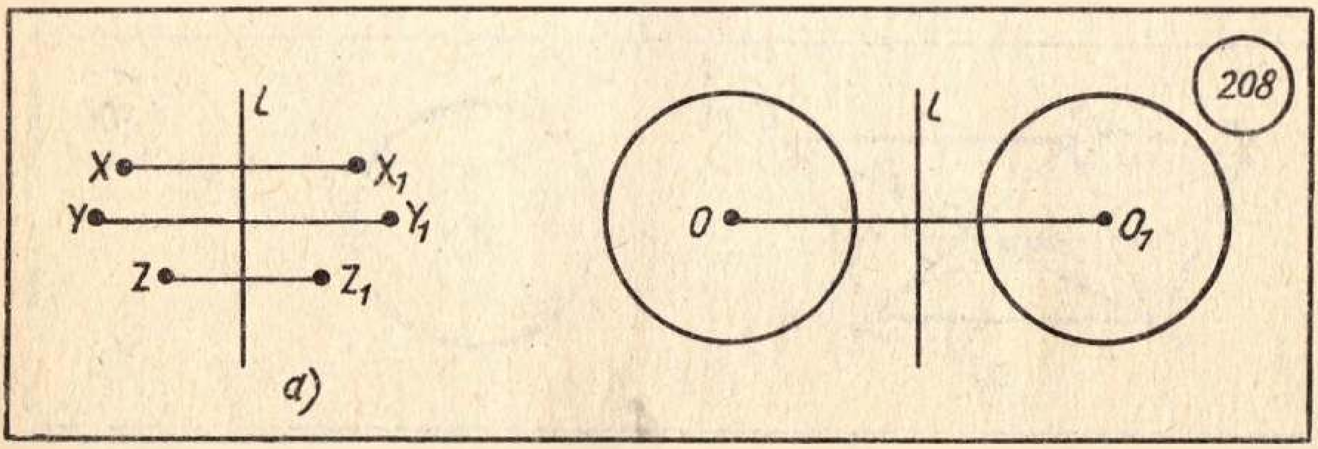
Әгәр l турысына карата симметрия үзгәртүе F фигурасын үзенә күчерсә, бу фигура *l турысына карата симметрик* дип атала, ә l турысы *фигураның симметрия күчәре* дип атала.

Мәсәлән, диагональләренең кисешү ноктасы аша турыпочмаклыкның якларына параллель итеп үткәрелгән турылар турыпочмаклыкның симметрия күчәрләре булып тора (210 нчы рәсем, *а*). Ромбның диагональләре яткан турылар аның симметрия күчәрләре була (210 нчы рәсем, *б*). Әйләнә үзенең үзәге аша үтүче теләсә нинди турыга симметрик (210 нчы рәсем, *в*). Барлык бу фигуралар яссы.

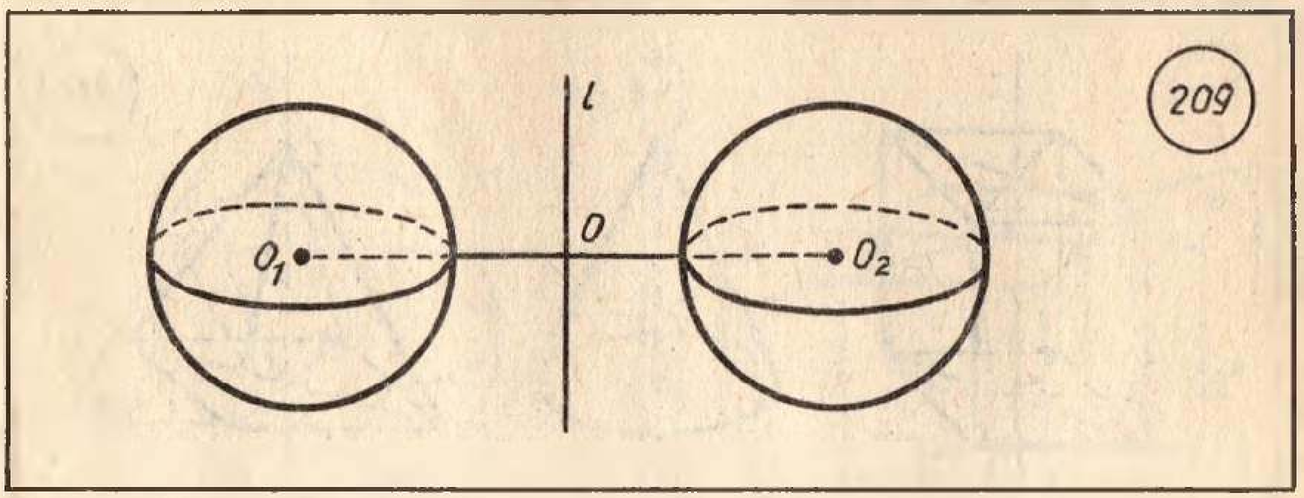
Пространствода да, яссылыктагы кебек үк, симметрия күчәрләре булган фигураларга мисаллар күп. 211 нче рәсемдә шундый фигуралар сурәтләнгән: турыпочмаклы параллелепипед, конус, дүртпочмаклы төзек пирамида.

3. Яссылыкка карата симметрия. α — билгеләнгән ирекле яссылык. X ноктасыннан α яссылыгына перпендикуляр төшерәләр (O — перпендикулярның α яссылыгы белән кисешү ноктасы) һәм аның дәвамында O ноктасыннан OX ка тигез булган OX_1 кисемтәсен салалар. X һәм X_1 нокталарын *α яссылыгына карата симметрик* дип атыйлар (212 нче рәсем).

Әгәр F фигурасын F_1 фигурасына үзгәрткәндә F фигурасының һәр X ноктасы α яссылыгына карата симметрик X_1 нок-



208



тасына күчсә, бу үзгәртү α *яссылыгына карата симметрия үзгәртүе* дип атала. Бу вакытта F һәм F_1 фигуралары α *яссылыгына карата симметрик фигуралар* дип атала.

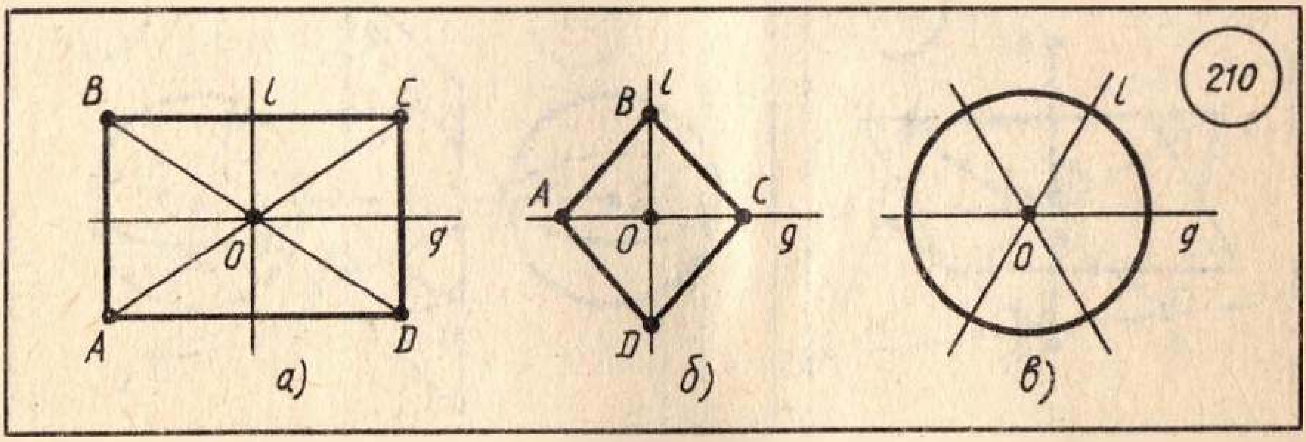
213 нче рәсемдә α яссылыгына карата симметрик булган ике сфера сурәтләнгән.

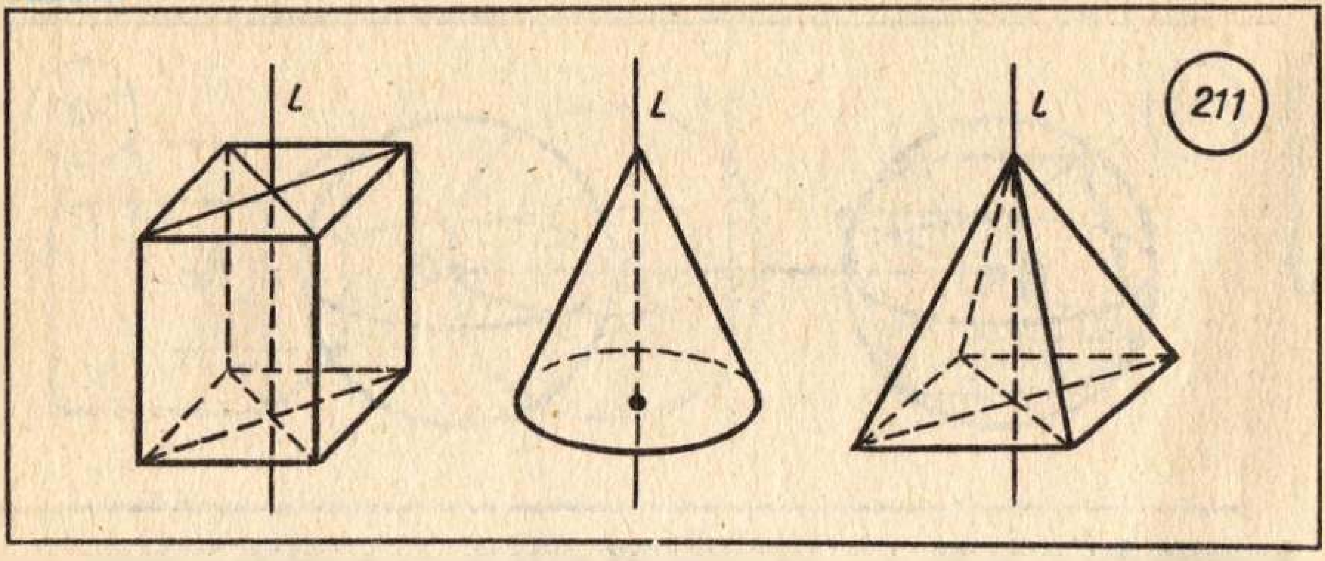
Әгәр яссылыкка карата симметрия үзгәртүе фигураны үзенә күчерсә, бу фигура α *яссылыгына карата симметрик* дип атала, α яссылыгы *симметрия яссылыгы* дип атала.

214 нче рәсемдә сфераның ике симметрия яссылыгы сурәтләнгән. Сферада мондый симметрия яссылыклары чиксез күп булуын искәртеп китик. Кубның шулай ук симметрия яссылыклары бар. 215 нче рәсемдә шуларның икесе сурәтләнгән.

4. Гомотетия. F — бирелгән фигура һәм O — билгеләнгән нокта булсын (216 нчы рәсем). F фигурасының ирекле X ноктасы аша OX нуры үткәрәбез һәм анда $kOX (k > 0)$ ка тигез булырдай OX_1 кисемтәсе салабыз. F фигурасын һәм X ноктасын күрсәтелгән ысул белән X_1 ноктасына күчерүче F_1 фигурасына үзгәртү O үзәгенә карата *гомотетия* дип атала. k саны *гомотетия коэффициенты* дип атала. F һәм F_1 фигуралары *гомотетик* фигуралар дип атала. 216 нчы рәсемдә $X_1Y_1Z_1U_1$ дүртпочмагы гомотетия үзәге O һәм гомотетия коэффициенты $k=2$ белән $XYZU$ дүртпочмагына гомотетик.

217 нче рәсемдә $\triangle A_1B_1C_1$ үзәге O һәм гомотетия коэффициенты 1,6 белән $\triangle ABC$ га гомотетик.





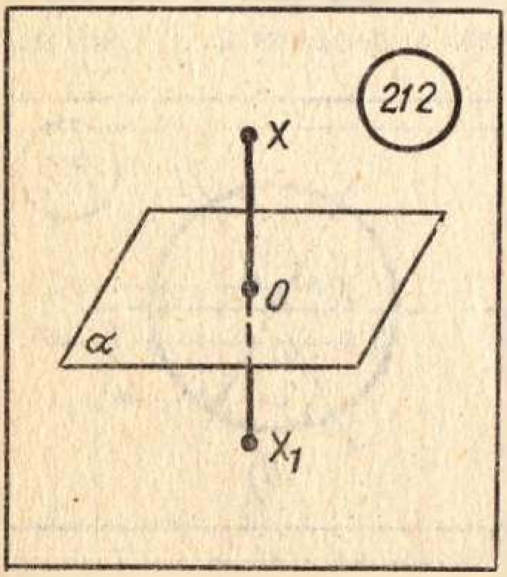
211

218 нче рәсемдә гомотетия коэффициенты 2 гә тигез булган ике гомотетик сфера сурәтләнгән.

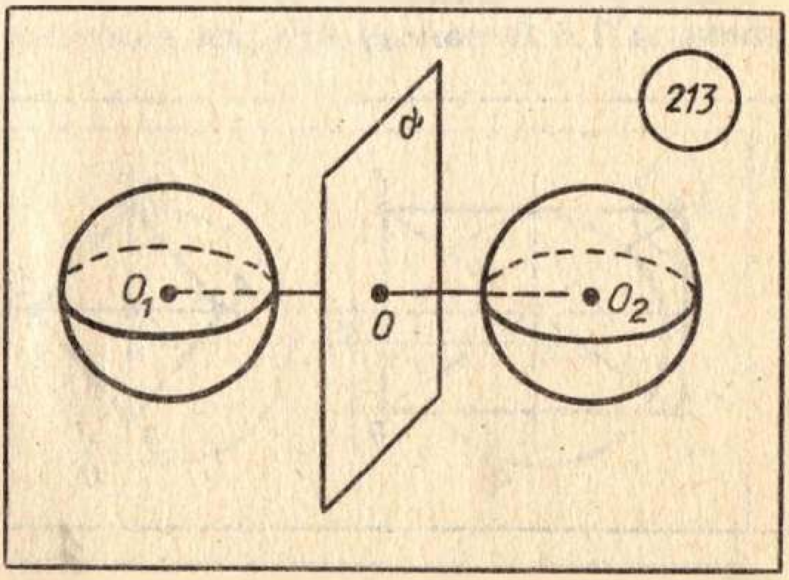
Мисал. Бирелгән дүртпочмаклы төзек пирамидага дүрт түбәсе пирамиданың кабыргаларында, ә дүртесе нигезендә ятарлык итеп камаулы куб төзергә.

Чишү. Түбәсе S һәм нигезенә параллель итеп пирамиданың теләсә нинди киseme $A_1B_1C_1D_1$ не үткәрәбез (219 нчы рәсем). Әлеге кисемдә (квадратта) өстәге нигезе дип алып $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ кубы төзибез. Пирамиданың түбәсе S ны гомотетия үзәге итеп алып, SA_2, SB_2, SC_2, SD_2 ярымтурылары (рәсемдә алар юк) үткәрәбез. Аларның пирамида нигезе белән (төгәлрәге, нигезнең диагональләре белән) кисешү нокталары A', B', C', D' эзләнелә торган куб нигезләренең берсенең түбәләре булыр. Әгәр A', B', C', D' аша пирамиданың кабыргалары белән кисешкәнче A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1, D_2D_1 гә параллель турылар үткәрсәк, икенче нигезнең A, B, C, D түбәләрен табарбыз.

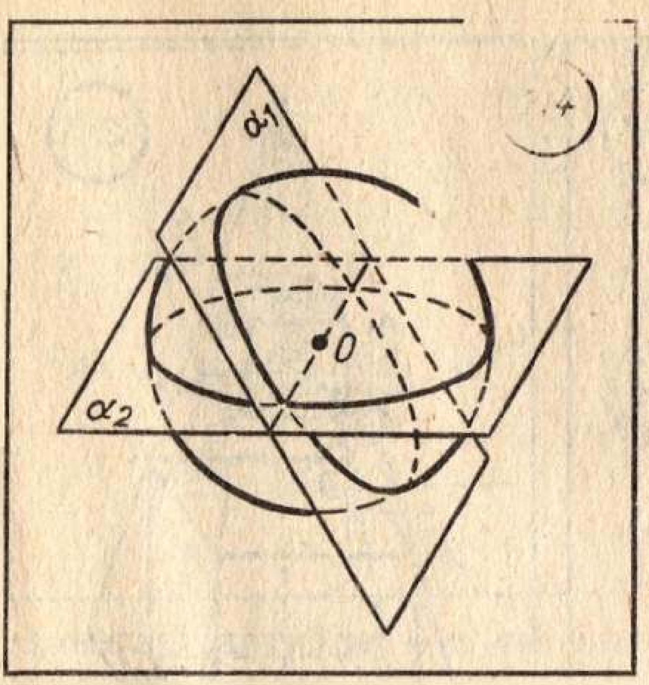
76. Хәрәкәт төшенчәсе. Хәрәкәтләрнең үзлекләре. Хәрәкәтнең билгеләмәсе яссылыкта да, пространствода да бертөр-

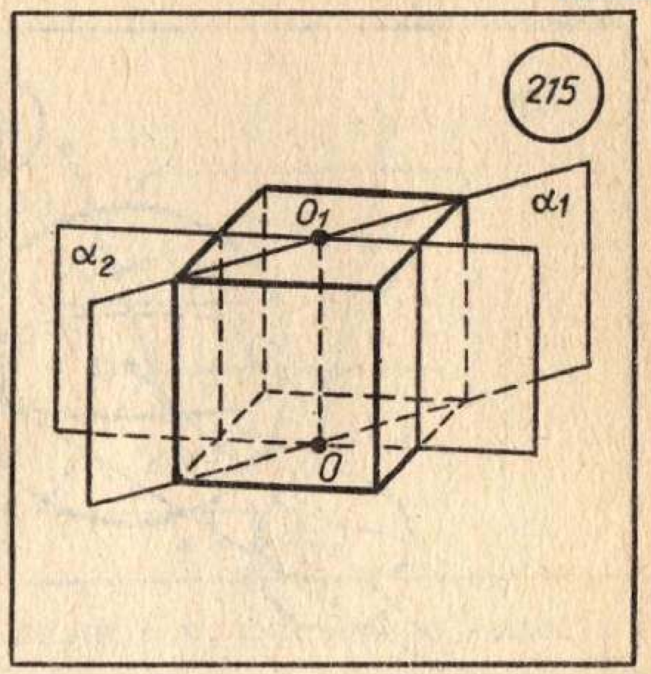


212



213


α_1
α_2
O


215
O_1
α_1
α_2
O

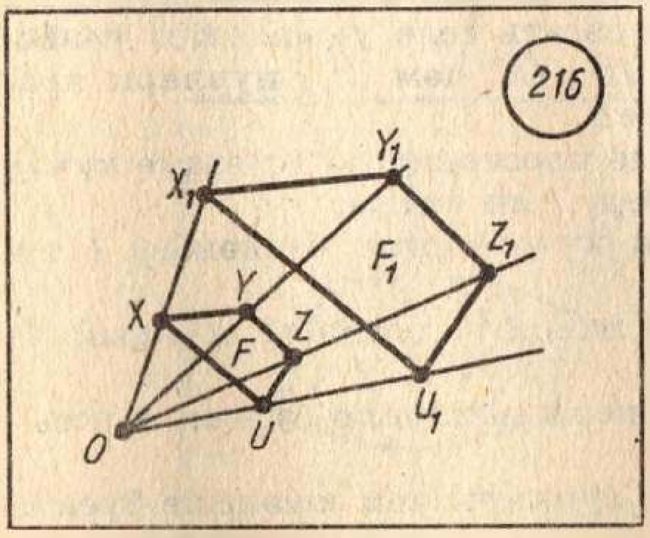
ле. Әгәр F фигурасын F_1 фигурасына үзгәртү нокталар арасындагы ераклыкларны сакласа, ягъни F фигурасының теләсә нинди ике ноктасын: A һәм B ны F_1 фигурасының A_1 һәм B_1 нокталарына $AB = A_1B_1$ булырлык итеп күчерсә, ул *хәрәкәт* дип атала. 75 нче пунктта каралган ноктага, туры белән яссылыкка карата симметрияләр хәрәкәт булалар.

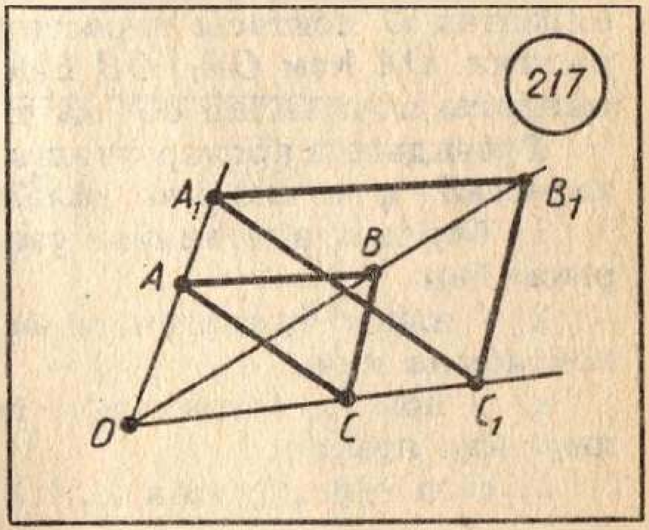
Т.5.1. Ноктага карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт булып тора.

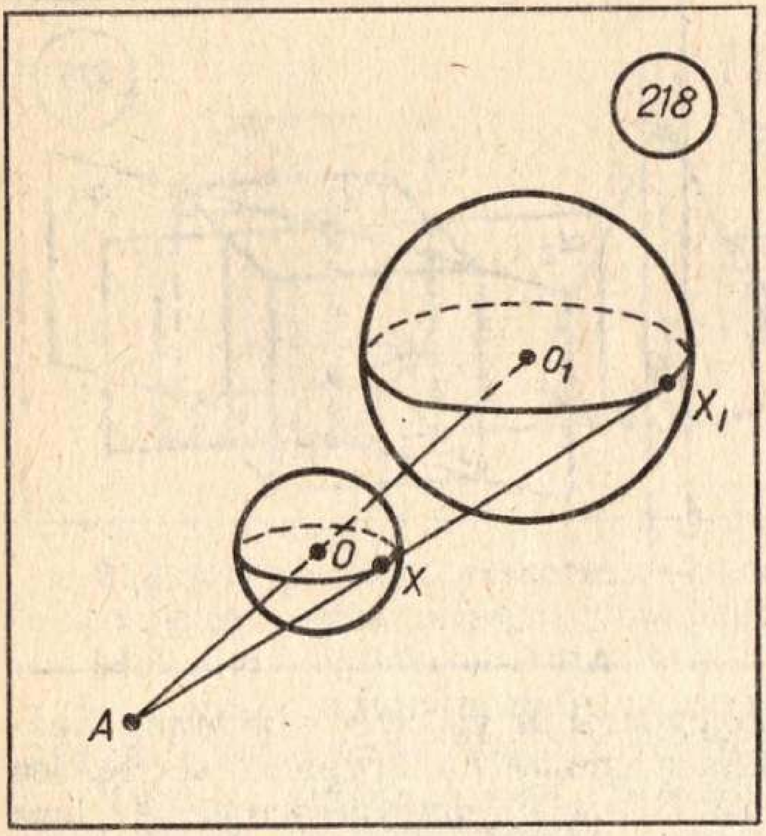
Т.5.2. Турыга карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт булып тора.

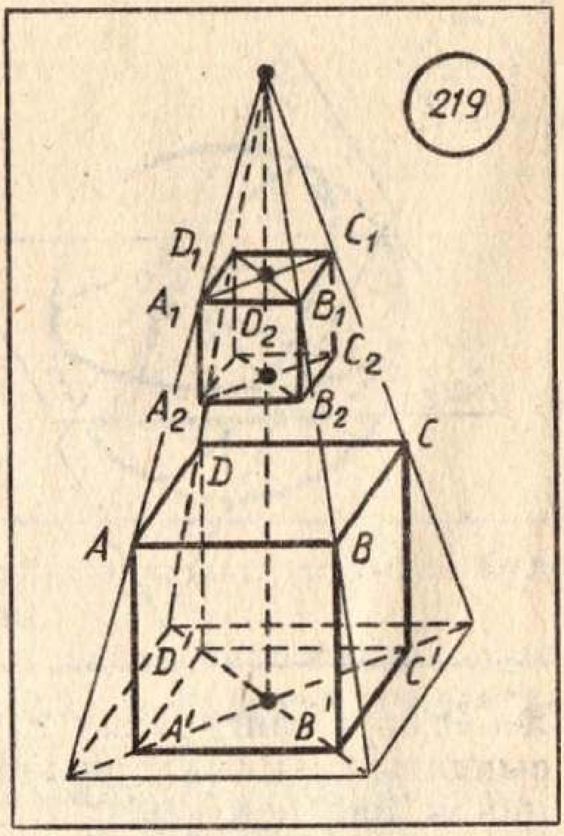
Т.5.3. Яссылыкка карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт булып тора.

Хәрәкәтнең кайбер үзлекләрен әйтеп китик.


216
X_1
Y_1
Z_1
F_1
X
Y
Z
F
O
U
U_1


217
A_1
B_1
B
A
O
C
C_1





Т.5.4. Хәрәкәт вакытында турыдагы нокталар туры нокталарына күчә, һәм аларның үзара-торыш тәртибе саклана.

5.4 теоремасыннан хәрәкәт вакытында турылар — турыларга, ярымтурылар — ярымтурыларга, кисемтәләр кисемтәләргә күчә дигән нәтиҗә чыга.

Хәрәкәт вакытында ярымтурылар арасындагы почмаклар саклана. Хәрәкәт вакытында яссылык яссылыкка күчә.

Тагын ике хәрәкәт — яссылыкта бору һәм пространствода күчәр тирәсендә әйләндерүне карыйк.

Әгәр хәрәкәт вакытында бирелгән ноктадан чыгучы һәр нур бер үк юнәлештә (сәгать теле уңаена һәм сәгать теленә каршы) бер үк почмакка борылса, бу хәрәкәт бирелгән нокта тирәсендә яссылыкта *бору* дип атала. 220 нче рәсемдә $\triangle ABC$ бирелгән O ноктасы тирәсендә сәгать теле уңаена 60° ка борылган. OA һәм OA_1, OB һәм OB_1, OC һәм OC_1 нурлары арасындагы почмаклар 60° ка тигез.

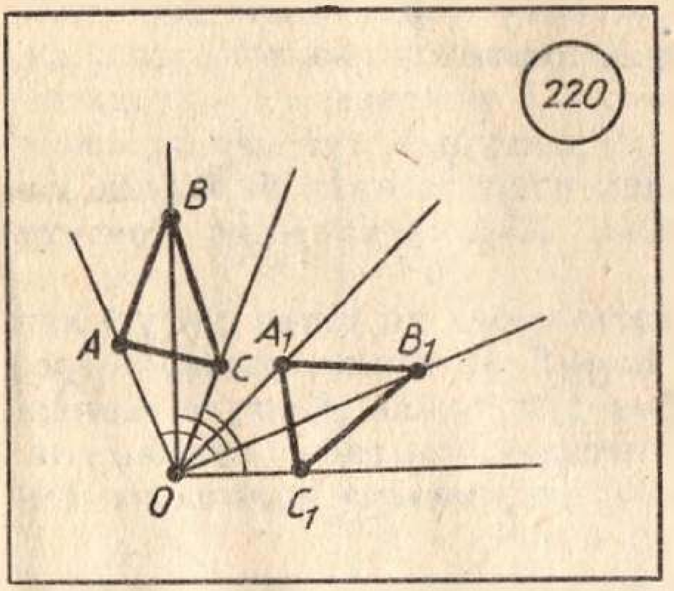
Түбәндәге шартлар үтәлгәндә пространство үзгәртүе *күчәр тирәсендә φ почмагына әйләндерү* дип атала:

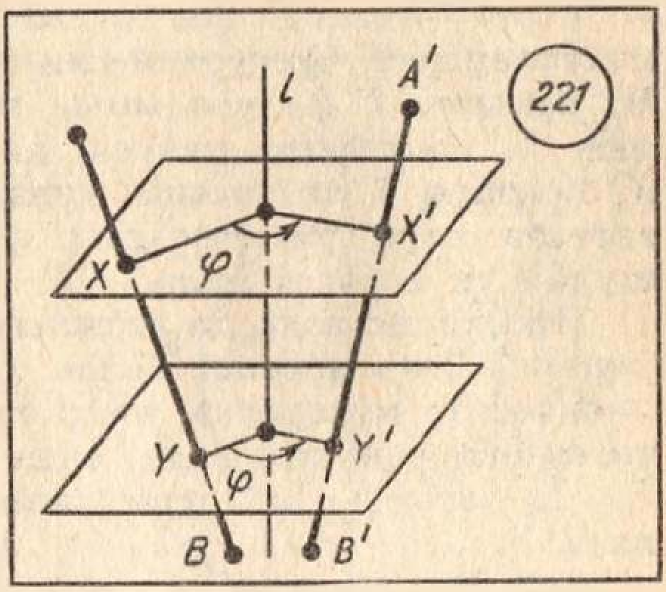
1) барлык нокталары үзенә күчә торган бердәнбер l турысы бар;

2) l ныкы булмаган теләсә нинди A ноктасы шундый A_1 ноктасына күчә:

а) A һәм A_1 нокталары l га перпендикуляр булган α яссылыгында яталар;

б) φ гә тигез булган $\angle AOA_1$ зурлыгы һәм юнәлеше буенча





даими (O ноктасы — α яссылыгының l күчәре белән кисешү ноктасы).

l турысын — *әйләнү күчәре* дип, φ почмагын *әйләнү почмагы* дип атыйлар (221 нче рәсем).

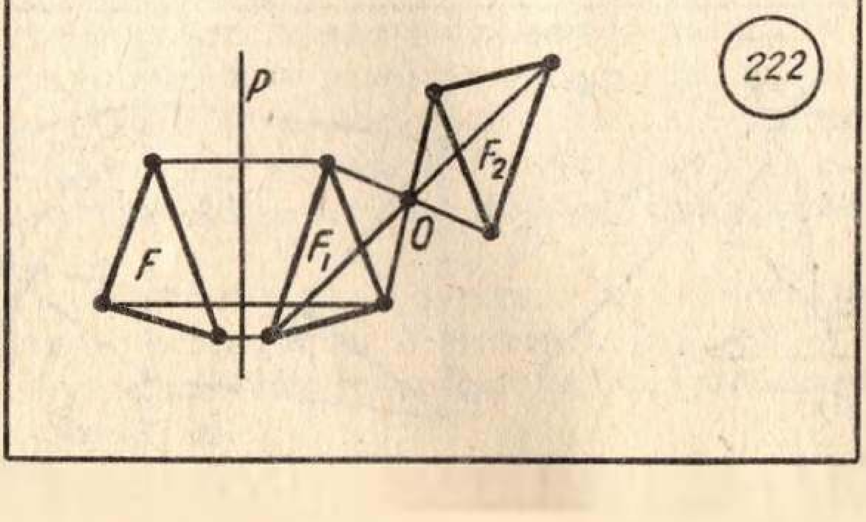
Әйләнүнең кузгалмас элементлары булып әйләнү күчәре нокталары, шулай ук бу күчәргә перпендикуляр булган барлык яссылыклар тора. Әгәр $\varphi = 2\pi m$, $m \in Z$ булса, әйләнүне тиңдәш үзгәртү дип санарга була.

$\varphi = \pi$ булганда турыга карата симметрияне әйләнүнең аерым очрагы дип карарга була.

Эзлекле башкарылган ике хәрәкәт тагын хәрәкәтне бирә. Бу хәрәкәтләрне башкару нәтиҗәсе хәрәкәтләрнең *композициясе* дип атала.

222 нче рәсемдә ике хәрәкәтнең эзлекле башкарылуы сурәтләнгән. F_1 фигурасы F фигурасыннан p күчәренә карата симметрия юлы белән, ә F_2 фигурасы F_1 фигурасыннан O ноктасына карата симметрия юлы белән табыла, әлеге хәрәкәтләрне эзлекле башкару нәтиҗәсендә тиңдәш нокталар арасындагы ераклыклар сакланган, һәм димәк, F_2 фигурасы F фигурасыннан хәрәкәт белән табылган.

Күчәрләре бер үк булган ике әйләнүнең композициясе әйләнү була.



F фигурасын F_1 фигурасына үзгәртү F фигурасының төрле нокталарын F_1 фигурасының төрле нокталарына күчерсен, ди. Бу вакытта F фигурасының ирекле X ноктасы F_1 фигурасының X_1 ноктасына күчсен, ди. F_1 фигурасын F фигурасына X_1 ноктасы X ноктасына күчәрлек итеп үзгәртү *бирелгән үзгәртүгә кире үзгәртү* дип атала. Хәрәкәткә кире үзгәртү шулай ук хәрәкәт була.

Пространствода да яссылыктагы кебек үк тигез фигуралар карала. Әгәр хәрәкәт белән F һәм F_1 фигураларының берсе икенчесенә күчерелсә, алар *тигез* дип атала. Фигураларның тигезлекләрен тамгалау өчен тигезлек тамгасы кулланыла. $F = F_1$ язмасы F фигурасының F_1 фигурасына тигезлеген аңлата.

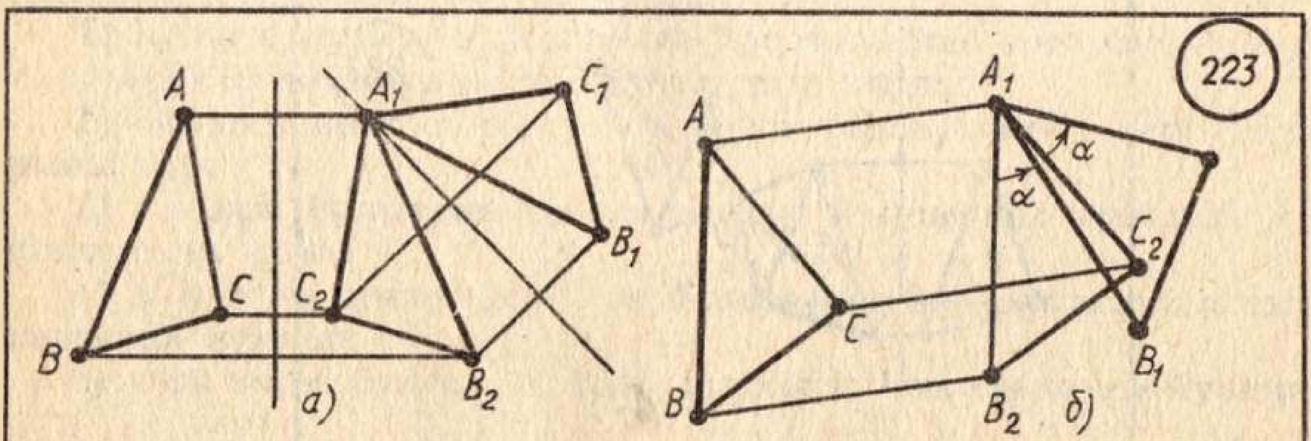
213 нче рәсемдә шарлар яссылыкка карата симметрияле, димәк, алар тигез. 205 нче рәсемдә кублар ноктага карата симметрияле, димәк, алар тигез. 222 нче рәсемдә F, F_1, F_2 өчпочмаклары тигез, чөнки алар берсе икенчесеннән хәрәкәт нәтиҗәсендә табылганнар.

1 нче мисал. 223 нче рәсемдә ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары сурәтләнгән, аларда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Ул өчпочмакларның хәрәкәт ярдәмендә тәңгәл килүен исбат итәргә, анда A түбәсе A_1 түбәсенә, B — B_1 гә һәм C түбәсе C_1 гә күчсен.

Чишү. Мәсьәләнең чишелеше өчпочмакларның ничек урнашуына бәйле.

1) 223 нче *а* рәсемдә мөмкин булган вариантларның берсе сурәтләнгән. $\triangle A_1B_2C_2$ ABC өчпочмагыннан AA_1 кисемтәсенә сызылган урта перпендикулярга карата симметрия юлы белән табылган. $\triangle A_1B_1C_1$ $A_1B_2C_2$ өчпочмагыннан A_1 ноктасын B_2B_1 кисемтәсенең уртасын тоташтыручы турыга карата симметриядән килеп чыккан. Без хәрәкәтләрне эзлекле рәвештә башкаруның хәрәкәт булуын беләбез. Шулай итеп, $\triangle A_1B_1C_1$ ABC өчпочмагыннан хәрәкәт юлы белән табыла.

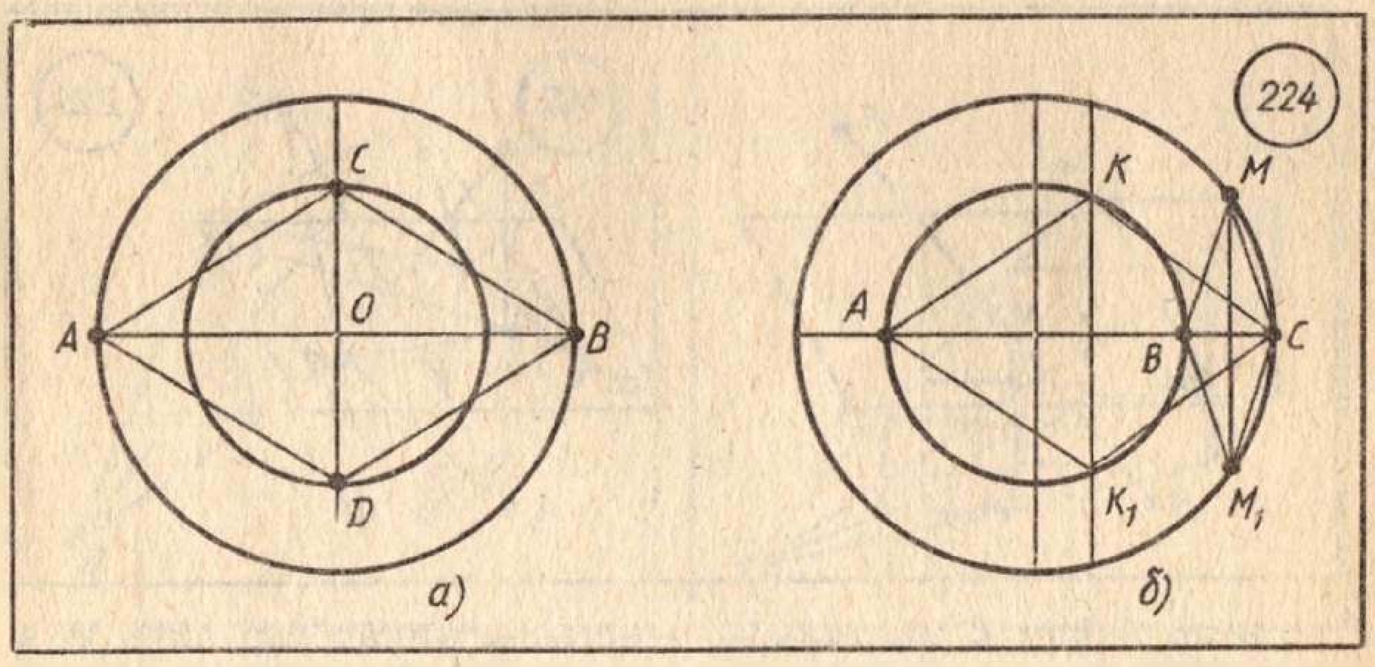
2) 223 нче *б* рәсемдә башка варианты сурәтләнгән. $\triangle A_1B_2C_2$ $\triangle ABC$ дан AA_1 ераклыгында бирелгән AA_1 нуры



а)

б)

223



юнәлешендә параллель күчереп табылган (79 пунктны кара). Аннары $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle A_1B_2C_2$ дән сәгать теленә каршы α почмагына борып табылган. Нәтиҗә беренче очрактагы кебек.

2 нче мисал. Ике концентрик әйләнә бирелгән. Квадраттан үзгә булган ромб төзергә. Аның: 1) ике түбәсе бер әйләнәнеке булсын, ә калган икесе — икенче әйләнәнеке; 2) өч түбәсе — бер әйләнәнеке, ә берсе икенче әйләнәнеке булсын.

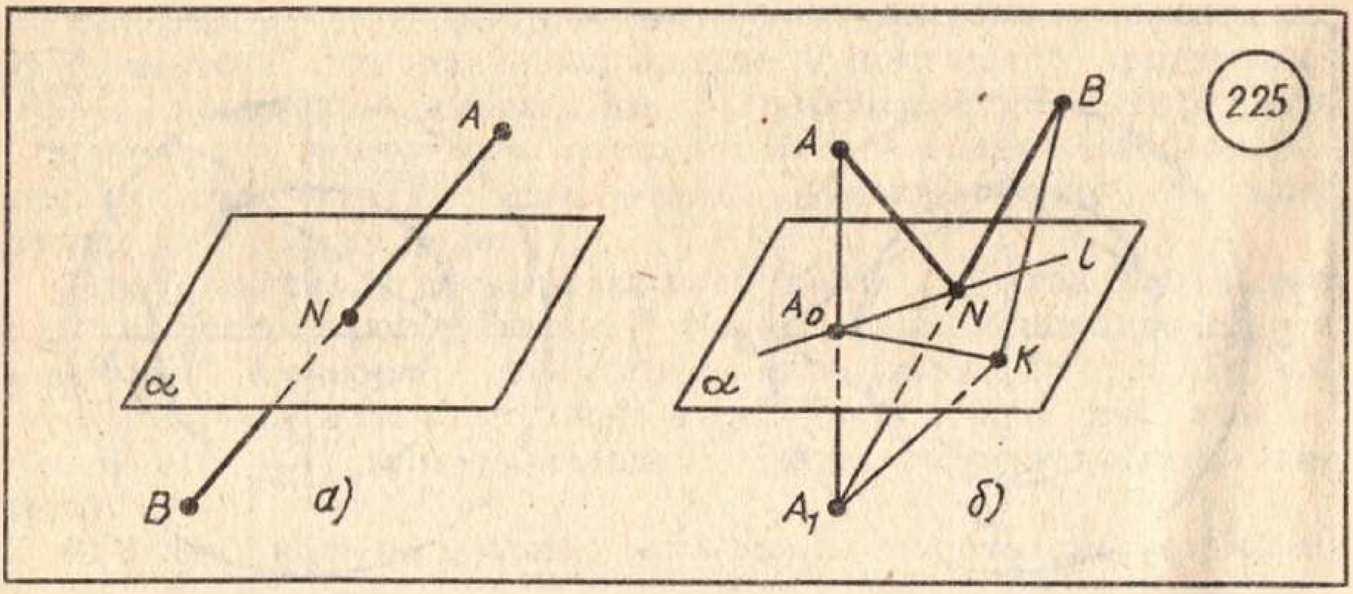
Чишү. 1) Бер әйләнәнең теләсә нинди диаметры AB ны һәм аңа перпендикуляр булган икенче әйләнәнең диаметры CD ны төзибез (224 нче рәсем, *а*). Табылган $CBDA$ дүртпочмагының диагональләре кисешү ноктасында урталай бүленәләр, димәк, $CBDA$ — параллелограмм (п. 25). AC һәм BC кисемтәләренең OD күчәренә карата симметриясеннән параллелограмм якларының тигезлеге, ягъни $CBDA$ ның ромб икәнлеге килеп чыга (п. 26).

2) Кечерәк әйләнәнең AB диаметрын зур әйләнә белән C ноктасында кисешкәнче дәвам итәбез. AC һәм BC кисемтәләренең симметрия күчәрләрен төзибез (224 нче рәсем, *б*). Без мәсьәләнең шартын канәгатьләндергән ике ромб табарбыз: $BMCM_1$ һәм $AKCK_1$. Төзүнең дөреслеген мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

Беренче очракта аналогик рәвештә тагын бер ромб, ә икенче очракта тагын ике ромб төзергә мөмкин.

3 нче мисал. α яссылыгы һәм аннан читтә ике нокта A һәм B бирелгән. α яссылыгында A һәм B дан ераклыклар суммасы, ягъни $AN+NB$, иң кечкенә булырлык итеп N ноктасын табыгыз.

Чишү. Әгәр A һәм B нокталары α яссылыгыннан төрле якта ятсалар, эзләнелгән N ноктасының AB турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы булуы үзеннән-үзе аңлашыла (225 нче рәсем, *а*).



225

Әгәр A һәм B нокталары α яссылыгыннан бер якта ятсалар (225 нче рәсем, *б*), эзләнелә торган N ноктасы A_1B турысының α яссылыгы белән кисешүеннән килеп чыгар, монда A_1 — α яссылыгына карата A ноктасына симметрияле нокта. N ның эзләнелә торган нокта икәнен исбатлыйк. N ноктасы AA_1 кисемтәсенә перпендикуляр һәм аның уртасы аша үтүче l турысында ята ($A_0N \perp AA_1$), һәм шуңа күрә $AN = A_1N$, моннан $AN + NB = A_1N + NB$. α яссылыгы өстендә N нан үзгә булган ирекле K ноктасын алабыз (225 нче рәсем, *б*). A_0 һәм K нокталарын тоташтырып, AA_1 кисемтәсенә перпендикуляр һәм аның уртасы A_0 аша үтүче A_0K кисемтәсен табарбыз, шуңа күрә $AK = A_1K$. Моннан $AK + KB = A_1K + KB$ икәне килеп чыга. $\triangle A_1KB$ дан $A_1K + KB > A_1B$ ны табабыз. $A_1B = AN + NB$ булганлыктан, $A_1K + KB > AN + NB$ икәне үзеннән-үзе аңлашыла.

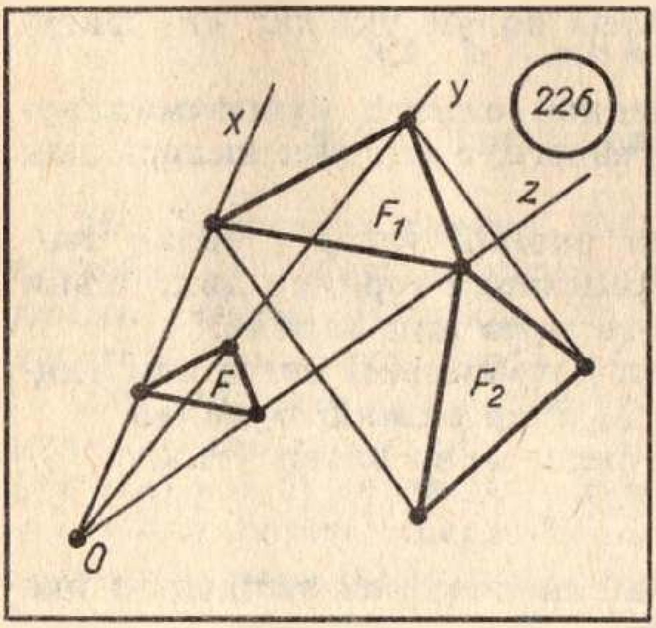
Шулай итеп, $AN + NB$ суммасының кыйммәте иң кечкенә була дигән нәтиҗәгә киләбез, һәм, димәк, N — эзләнелгән нокта.

§ 20. Фигураларның охшашлыгы

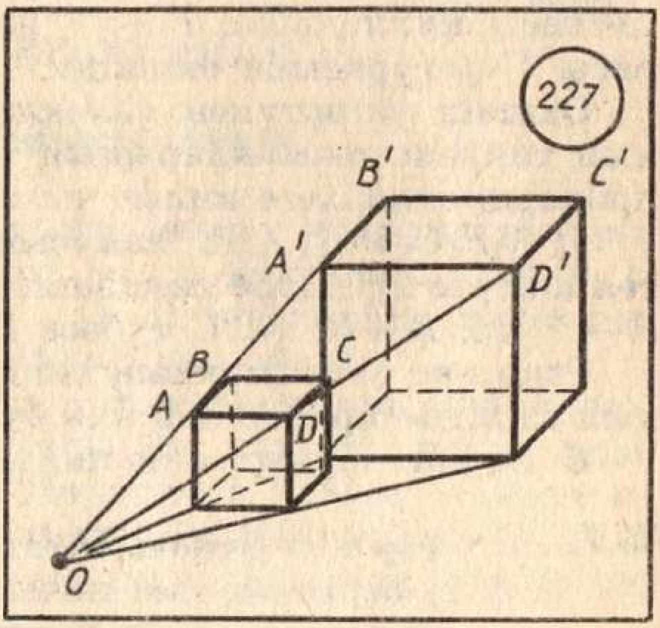
77. Охшаш үзгәртү. Охшаш үзгәртүнең билгеләмәсе яссылык өчен дә, пространство өчен дә бертөрле. Әгәр F фигурасын F_1 фигурасына үзгәрткәндә нокталар арасындагы ераклыклар бер үк сан тапкыр үзгәрсә (артса яки кимесә), бу үзгәртү *охшаш үзгәртү* дип атала. Бу шуны аңлата, әгәр F фигурасының ирекле A һәм B нокталары әлеге үзгәртү вакытында F_1 фигурасының A_1 һәм B_1 нокталарына күчсәләр, ул вакытта $A_1B_1 = kAB$, биредә $k > 0$.

k саны *охшашлык коэффициенты* дип атала ($k > 0$). $k = 1$ булганда охшаш үзгәртү хәрәкәт була.

Т.5.5. | Гомотетия охшаш үзгәртү булып тора.



226



227

Охшаш үзгәртүнең үзлекләрен карыйк.

1. Охшаш үзгәртүдә бер турыда ятучы өч нокта: A, B һәм C шулай ук бер турыда ятучы A_1, B_1 һәм C_1 нокталарына күчә. Өстәвенә, әгәр B ноктасы A һәм C нокталары арасында ятса, B ноктасы A_1 һәм C_1 нокталары арасында ята.

2. Охшаш үзгәртү турыларны турыларга, ярымтурыларны ярымтурыларга, кисемтәләрне кисемтәләргә, яссылыкларны яссылыкларга күчерә.

3. Охшаш үзгәртү ярымтурылар арасындагы почмакларны саклый.

4. Теләсә кайсы охшаш үзгәртү дә гомотетия булмый.

226 нчы рәсемдә F_1 фигурасы F фигурасыннан гомотетия белән табылган, ә F_2 фигурасы F_1 фигурасыннан z турысына карата симметрия белән табылган. F фигурасын F_2 фигурасына үзгәртү охшаш үзгәртү була, чөнки анда тиңдәш нокталар арасындагы ераклыклар чагыштырмасы саклана, әмма бу үзгәртү гомотетия булмый.

Гомотетия өчен пространствода түбәндәге теорема дөрес:

Т.5.6. Пространствода гомотетия үзгәртүе гомотетия үзәге аша үтмәүче теләсә нинди яссылыкны параллель яссылыкка яки үзенә күчерә.

227 нче рәсемдә гомотетия коэффициенты 2 гә тигез булган ике гомотетик куб сурәтләнгән. Т.5.6 буенча $ABCD$ яссылыгы аңа параллель булган $A'B'C'D'$ яссылыгына күчә. Шушыны ук кубның башка кырларының яссылыклары турында да әйтергә була.

78. Охшаш фигуралар. Охшаш үзгәртүдә берсе икенчесенә күчә торган F_1 һәм F_2 фигуралары *охшаш фигуралар* дип атала. Фигураларның охшашлыгын тамгалау өчен ∞

тамгасы кулланыла. $F_1 \sim F$ язмасы болай укыла: «F_1 фигурасы F фигурасына охшаш».

Охшаш үзгәртүнең үзлекләреннән охшаш күппочмакларның тиңдәш почмакларының тигезлеге, ә тиңдәш якларының пропорциональлеге килеп чыга.

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ язмасында охшаш үзгәртү белән тәңгәл килүче түбәләре тиңдәшле урыннарда торалар дип, ягъни $A \to A_1$ гә, $B \to B_1$ гә, C түбәсе C_1 гә күчә дип карала.

Әгәр ике өчпочмакның тиңдәш почмаклары тигез һәм тиңдәш яклары пропорциональ булса, алар охшаш булалар.

Өчпочмакларның охшашлык билгеләрен әйтеп үтик.

Т.5.7. Әгәр ике өчпочмакта:

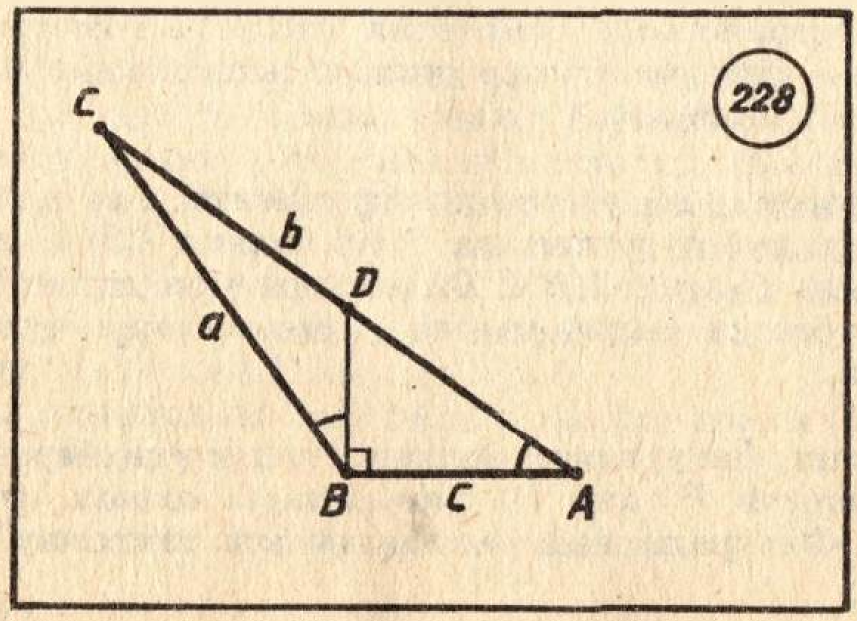
1) берсенең ике почмагы икенчесенең тиңдәшле ике почмагына тигез булса;

2) берсенең ике ягы икенчесенең ике ягына пропорциональ һәм бу яклар арасындагы почмаклар тигез булса;

3) берсенең яклары икенчесенең якларына пропорциональ булса, алар охшаш булалар.

Мисал. $\triangle ABC$ бирелгән, анда $\angle B = 90^\circ + \angle A$. Бу өчпочмакның a, b һәм c яклары арасындагы бәйлелекне табарга.

Чишү. $AB \perp BD$ үткәрәбез (228 нче рәсем). Ул вакытта $\angle A = \angle DBC$, $\angle CDB - \triangle ABD$ ның тышкы почмагы, ягъни $\angle CDB = 90^\circ + \angle A$, димәк, $\angle CDB = \angle CBA$, $\triangle ABC \sim \triangle BDC$, ике почмагы буенча (Т.5.7). Өчпочмакларның охшашлыгыннан $\frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}$ килеп чыга, моннан $CD = \frac{a^2}{b}$, $BD = \frac{ac}{b}$, $AD = AC - CD = \frac{b^2 - a^2}{b}$. $\triangle ABD$ дан Пифагор теоремасы буенча $AD^2 = BD^2 + AB^2$, моннан $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.



VI БҮЛЕК. ВЕКТОРЛАР

§ 21. Вектор төшенчәсен кертү

79. Параллель күчерү. Яссылыкта декарт координаталары кертәбез. F фигурасының ирекле $(x,\ y)$ ноктасын, a һәм b даими саннар булганда, $(x+a,\ y+b)$ ноктасына күчерүче үзгәртү *яссылыкта параллель күчерү* дип атала.

229 нчы рәсемдә F_1 фигурасы F фигурасыннан параллель күчереп табылган. $A(x;\ y)$ ноктасы бу үзгәртү вакытында $B(x+a;\ y+b)$ ноктасына күчә. Параллель күчерү $x_1=x+a$, $y_1=y+b$ формулалары белән бирелә. Бу формулалар $A(x;\ y)$ ноктасын параллель күчерү вакытында табылган ноктаның $B(x_1;\ y_1)$ координаталарын күрсәтәләр.

F фигурасының ирекле рәвештә алынган $(x,\ y,\ z)$ ноктасы $(x+a,\ y+b,\ z+c)$ ноктасына күчә торган үзгәртү *пространствода параллель күчерү* дип атала, биредә a, b, c — даими саннар. Пространствода параллель күчерү $x_1=x+a$, $y_1=y+b$, $z_1=z+c$ формулалары белән бирелә.

230 нчы рәсемдә $ABCA_1B_1C_1$ призмасы параллель күчергәндә $A'B'C'A_1'B_1'C_1'$ призмасына күчә.

Параллель күчерүнең кайбер үзлекләрен әйтеп үтәбез:

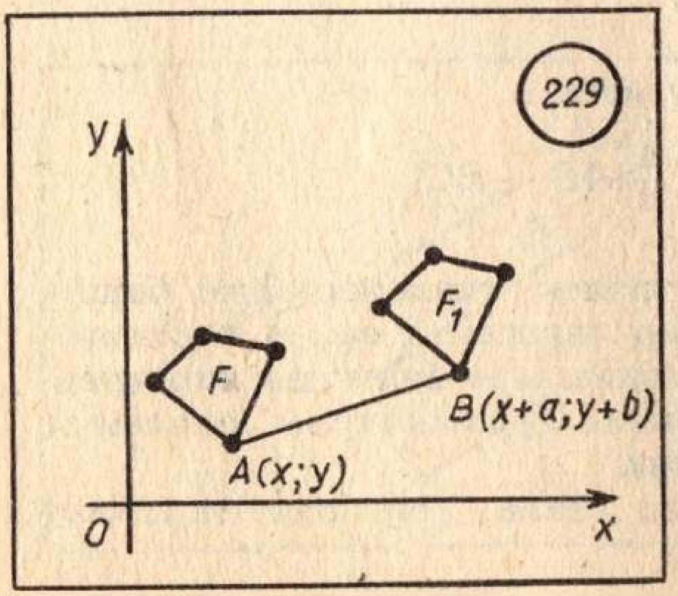
1. Параллель күчерү хәрәкәт ул.

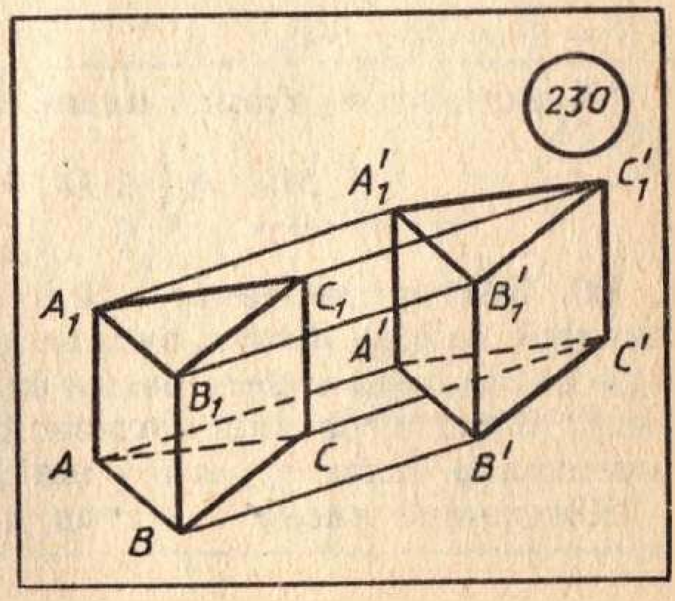
2. Параллель күчергәндә нокталар параллель (яки тәңгәл килгән) турылар буйлап бер үк ераклыкка күчәләр.

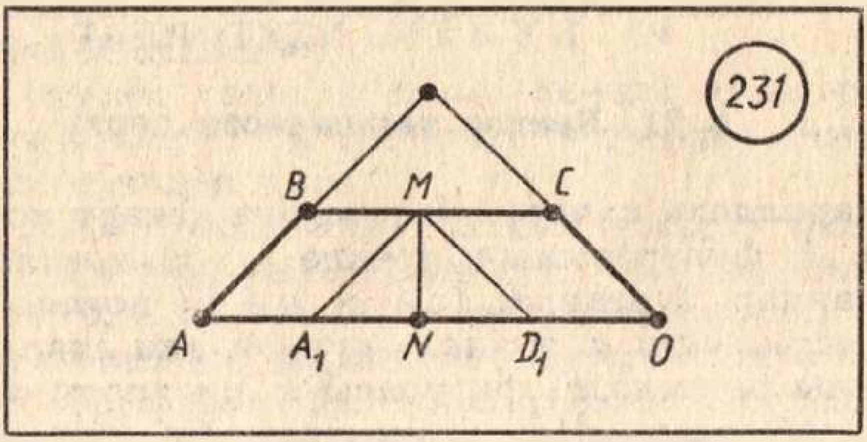
3. Параллель күчергәндә туры параллель турыга (яки үзенә) күчә.

4. A һәм A_1 нокталары нинди генә булмасын, A ноктасы A' ноктасына күчә торган параллель күчерү бар һәм бу күчерү бары тик бердәнбер.

5. Параллель күчерүгә кире үзгәртү параллель күчерү була. Ике параллель күчерүнең композициясе параллель күчерү була.







6. Пространствода параллель күчергәндә һәр яссылык я үзенә, я параллель яссылыкка күчә.

1 нче мисал. Трапециянең ян яклары яткан турылар үзара перпендикуляр була. Очлары трапеция нигезенең урталары булган кисемтә трапеция нигезләренең ярымсуммасына тигез. Шуны исбатлагыз.

Чишү. AD һәм BC — $ABCD$ трапециясенең нигезләре булсын, M — BC ның уртасы, N — AD ның уртасы, BM ярымтурысы юнәлешендә BM ераклыкка параллель күчергәндә B ноктасы M ноктасына, A ноктасы A_1 ноктасына күчә, CM ярымтурысы юнәлешендә CM ераклыкка параллель күчергәндә C ноктасы M ноктасына, ә D ноктасы D_1 ноктасына күчәр (231 нче рәсем). Ул вакытта

$$A_1N = AN - AA_1 = AN - BM; \qquad (1)$$

$$ND_1 = ND - D_1D = ND - MC. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) тигезлекләрне кушып, табабыз:

$$A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC.$$

Ләкин $A_1N + ND_1 = A_1D_1$, димәк,

$$A_1D_1 = AD - BC \qquad (3)$$

$A_1N = ND_1$, шуңа күрә MN барлыкка килгән турыпочмаклы A_1MD_1 өчпочмагының медианасы була. Шуның өчен $MN = \frac{1}{2}(A_1N + ND_1)$.

(3) тигезлекне исәпкә алып, табабыз:

$$MN = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

80. Вектор төшенчәсе. Көч, тизлек, тизләнеш һәм башка шундый кайбер физик зурлыклар үзләренең санча кыйммәтләре белән генә түгел, бәлки юнәлешләре белән дә характерлана. Шуңа күрә күрсәтелгән физик зурлыкларны юнәлешле кисемтәләр белән сурәтләү җайлы.

Юнәлешле кисемтә *вектор* дип атала. Векторны тамгалау өчен a, b, c, ... латин юл хәрефләре белән файдаланырбыз. Кайвакыт векторны болай тамгалыйлар: векторны сурәтләүче кисемтәнең очларын күрсәтәләр. Мәсәлән, 232 нче a рәсемдә AB векторы сурәтләнгән. A ноктасы — AB векторының башлангычы, ә B ноктасы ахыры дип атала. Векторны аны сурәтләүче кисемтәнең очлары ярдәмендә тамгалаганда беренче урынга һәрвакыт векторның башлангычы куела. Хәрефле тамгаланышы өстенә ук яки сызык куела. Мәсәлән, a языльшы болай укыла: «a векторы» дип.

Әгәр ике ярымтуры параллель күчерүдә тәңгәл килсәләр, ягъни бер ярымтурыны икенчесе белән тәңгәл китерүче параллель күчерү булса, алар ***бердәй юнәлешле*** дип атала.

Әгәр a һәм b ярымтурылары бердәй юнәлгән һәм b, c ярымтурылары да бердәй юнәлгән булса, a һәм c ярымтурылары шулай ук бердәй юнәлгән була.

232 нче *б* рәсемдә AB һәм CD ярымтурылары бердәй юнәлешле, CD һәм KM шулай ук бердәй юнәлешле, һәм димәк, AB һәм KM ярымтурылары бердәй юнәлешле.

Әгәр ике ярымтурының һәркайсы икенчесенә өстәмә ярымтуры белән бердәй юнәлгән булса, ул ярымтурылар ***капма-каршы юнәлешле*** дип атала.

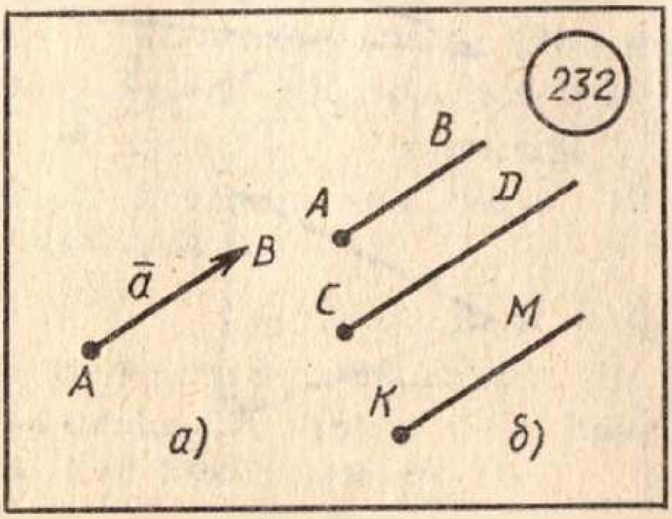
AB һәм CD ярымтурылары бердәй юнәлгән булсалар, AB һәм CD векторлары бердәй юнәлешле. Капма-каршы юнәлешле векторлар да шулай ук билгеләнә.

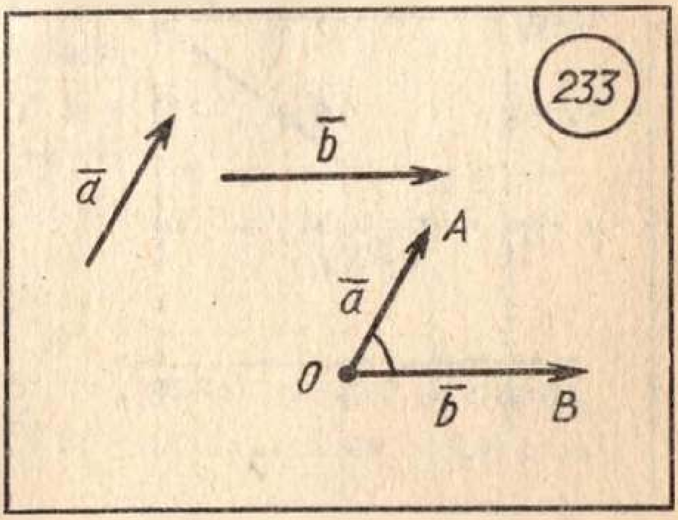
Векторны сурәтләүче кисемтәнең озынлыгы аның ***абсолют зурлыгы*** (модуле) дип атала. a векторының абсолют зурлыгы $|a|$ дип тамгалана.

Әгәр ике вектор параллель күчерүдә тәңгәл килсәләр, алар ***тигез*** дип атала. Бу беренче векторның башлангычын һәм ахырын икенче векторның тиңдәшле рәвештә башлангычына һәм ахырына күчерүче параллель күчерү бар дигәнне аңлата.

Тигез векторларның юнәлешләре бердәй һәм абсолют зурлыклары тигез.

Киресенчә: әгәр векторлар бердәй юнәлешле һәм абсолют зурлыклары буенча тигез икән, алар тигез була.





Векторның башлангычы аның ахыры белән тәңгәл килүе мөмкин. Андый векторны *нуль вектор* дип атыйлар. Нуль вектор өстенә сызык куелган нуль ($\bar{0}$) белән тамгалана. Нуль векторның юнәлеше турында төшенчә кертелми. Нуль векторның абсолют зурлыгы нульгә тигез дип санала. Билгеләмә буенча барлык нуль векторлар тигез.

Параллель күчерүнең үзлекләреннән (п. 79) теләсә нинди ноктадан бирелгән векторга тигез вектор салып була һәм бары тик берне генә дигән нәтиҗә чыга.

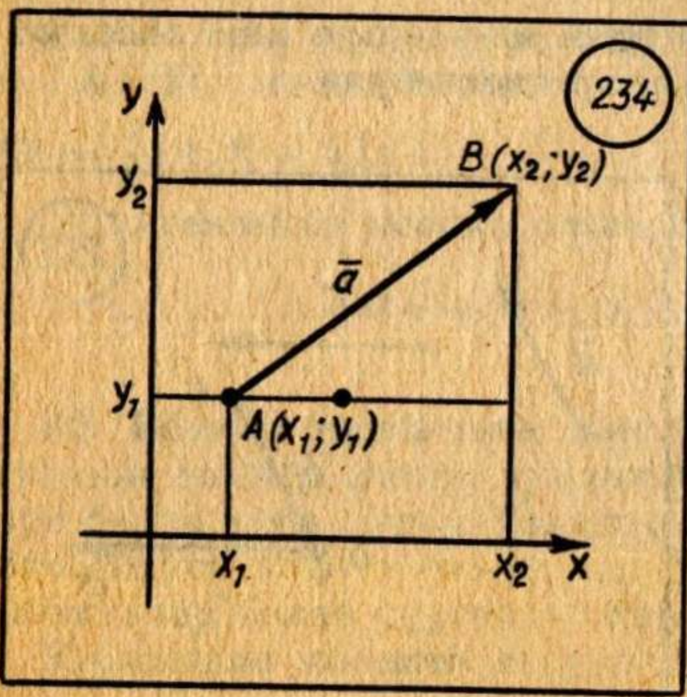
BAC почмагы нуль булмаган AB һәм AC векторлары арасындагы почмак дип атала. Теләсә нинди ике a һәм b *векторлары арасындагы почмак* дип уртак башлангычлы һәм әлеге векторларга тигез векторлар арасындагы почмак атала. Бердәй юнәлгән векторлар арасындагы почмак нульгә тигез дип исәпләнә.

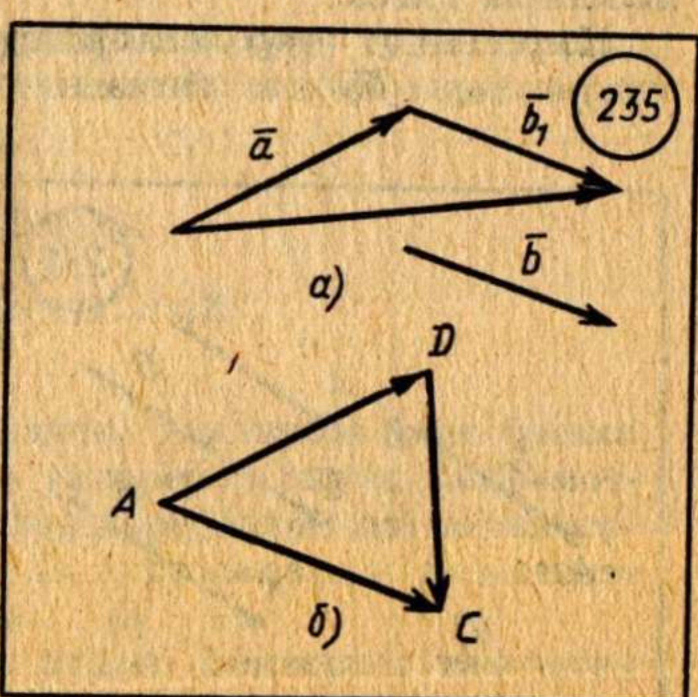
233 нче рәсемдә a һәм b векторлары бирелгән. Бирелгән O ноктасыннан $OA=a$ һәм $OB=b$ векторларын салабыз. Ул вакытта $\angle AOB$ a һәм b векторлары арасындагы почмак була.

81. Векторның координаталары. $A(x_1;\ y_1)$ ноктасы a векторының башлангычы, $B(x_2;\ y_2)$ ноктасы аның ахыры булсын (234 нче рәсем). $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ саннарын *векторның координаталары* дип атарбыз. Векторның координаталарын аның хәрефле тамгаланышы белән рәттән куярбыз, бу очракта $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ яки $(\overline{a_1;\ a_2})$ рәвешендә генә язарбыз. Нуль векторның координаталары нульгә тигез.

Ике нокта арасындагы ераклык формуласыннан (66 нчы п. кара) векторның абсолют зурлыгы $(\overline{a_1;\ a_2})$ нең $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ га тигезлеге килеп чыга.

234 нче рәсемдә $\overline{AB}$ векторының координаталары a_1 һәм a_2, монда $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$.


234


235

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Пространствода башы $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ноктасында, ахыры $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ноктасында булган векторның координаталары дип x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 саннары атала. Мондый теореманы исбатларга мөмкин:

Т.6.1. Тигез векторларның тиңдәшле координаталары тигез. Һәм киресенчә: векторларның тиңдәшле координаталары тигез булса, векторлар тигез була.

§ 22. Векторлар өстендә операцияләр

82. Векторларның суммасы. Яссылыкта координаталары $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$ булган $\bar{c}$ векторы координаталары $(a_1;\ a_2)$ һәм $(b_1;\ b_2)$ булган a һәм b *векторларының суммасы* дип атала, ягъни $\bar{a}(a_1;\ a_2)+\bar{b}(b_1;\ b_2)=\bar{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Теләсә нинди $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}(c_1;\ c_2)$ векторлары өчен

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},\quad \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

Т.6.2. Теләсә нинди A, D, C нокталары өчен $AD+DC=AC$ векторлы тигезлеге дөрес.

Бу теорема ирекле a һәм b векторларының суммасын төзүнең түбәндәге ысулын бирә. a векторының ахырыннан b векторына тигез булган b_1 векторын салырга кирәк. Ул вакытта башлангычы a векторының башлангычы белән, ә ахыры b_1 векторының ахыры белән тәңгәл килә торган вектор a һәм b векторларының суммасы була (235 нче рәсем, *а*). Ике векторны кушуның мондый ысулы *өчпочмак кагыйдәсе* дип атала.

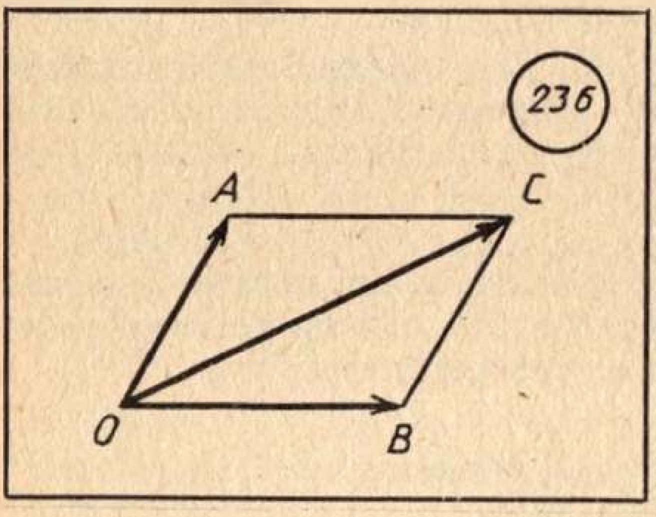
$\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$ векторлы тигезлеге дөрес, монда A, B, C һәм D — $ABCD$ параллелограммының түбәләре. Бу векторларны кушуның тагын бер кагыйдәсе — *параллелограмм кагыйдәсе*.

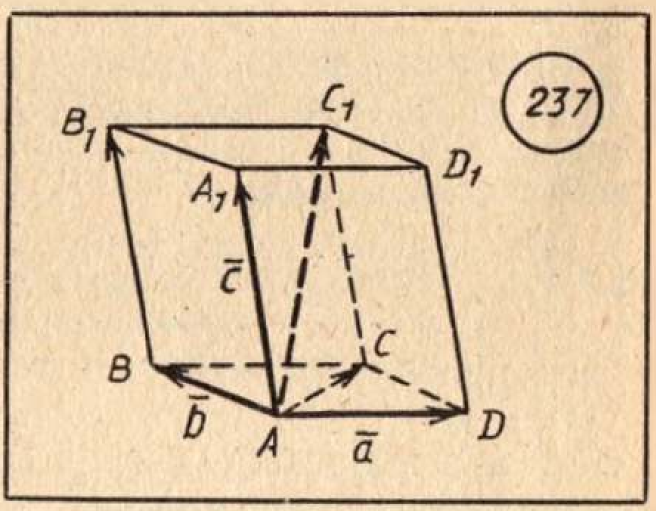
Әгәр $\overline{OA}$ һәм $\overline{OB}$ векторлары бирелсә, ул вакытта OC векторы $\overline{OA}$ һәм $\overline{OB}$ векторларының суммасы булыр, монда $OACB$ — параллелограмм (236 нчы рәсем).

Яссылыкта $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ һәм $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ векторларының аермасы дип b векторы белән суммасы a векторын бирә торган $c(c_1;\ c_2)$ векторы атала, ягъни $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ векторының координаталары түбәндәгеләр:

$$c_1=a_1-b_1,\quad c_2=a_2-b_2.$$

Әгәр уртак башлангычлы $\overline{AC}$ һәм $\overline{AD}$ векторлары бирелсә, ул вакытта $\overline{DC}$ векторы $\overline{AC}$ һәм $\overline{AD}$ векторларының аермасы була (235 нче рәсем, *б*):





$$AC - AD = DC.$$

Бу кагыйдәне векторлар аермасын тапканда кулланырга кирәк:

$\bar c(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ векторы $\bar a(a_1;\ a_2;\ a_3)$ һәм $\bar b(b_1;\ b_2;\ b_3)$ ***векторларының пространствода суммасы*** дип атала.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ векторлы тигезлеге дә яссылыктагы кебек үк исбатлана.

Бер турыга параллель булмаган ике векторның суммасы өчен пространствода параллелограмм кагыйдәсе саклана.

Бер яссылыкта параллель булмаган өч векторның суммасы ***параллелепипед кагыйдәсе*** буенча табыла. 237 нче рәсемдә $\overline{AC_1}$ векторы бер ноктадан (A) салынган $\bar a$, $\bar b$ һәм $\bar c$ векторларының суммасына тигез, бу вакытта AC_1 кисемтәсе $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының диагонале була.

83. Векторны санга тапкырлау. Коллинеар векторлар.

$(\overline{a_1,\ a_2})$ векторы белән λ санының тапкырчыгышы дип $(\overline{\lambda a_1,\ \lambda a_2})$ атала, ягъни $(\overline{a_1,\ a_2})\lambda=(\overline{\lambda a_1,\ \lambda a_2})$.

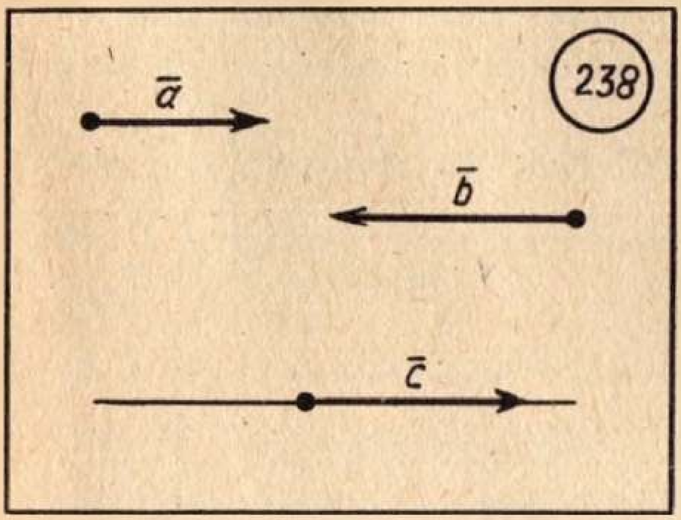
Векторны санга тапкырлау гамәле билгеләмәсеннән мондый нәтиҗә чыга: теләсә нинди a векторы һәм λ, μ саннары өчен

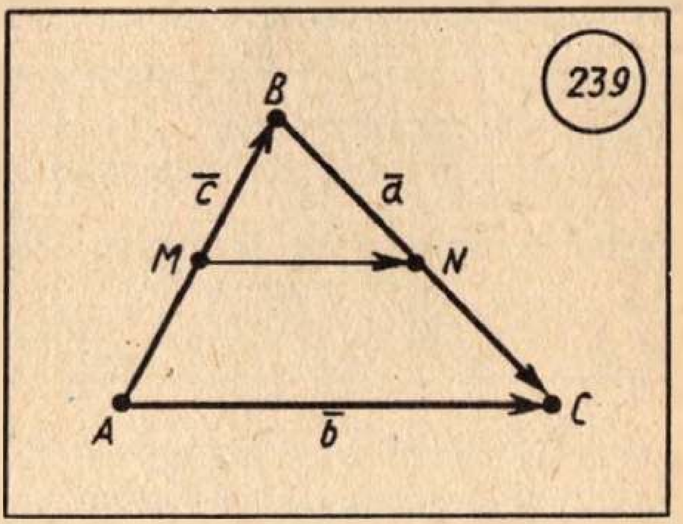
$$(\lambda+\mu)\bar a=\lambda\bar a+\mu\bar a.$$

Теләсә нинди $\bar a$ һәм $\bar b$ векторлары һәм λ саны өчен

$$\lambda(\bar a+\bar b)=\lambda\bar a+\lambda\bar b.$$

Т.6.3. $\lambda\bar a$ векторының абсолют зурлыгы $|\lambda|\,|\bar a|$ га тигез. Әгәр $\lambda>0$ булса, $\lambda\bar a$ векторының юнәлеше $\bar a$ векторының юнәлеше белән ($\bar a\neq 0$ булганда) туры килә һәм, әгәр $\lambda<0$ булса, $\bar a$ векторының юнәлешенә капма-каршы була.





Әгәр векторның абсолют зурлыгы бергә тигез булса, ул *берәмлек* вектор дип атала. Юнәлешләре уңай координаталы ярымкүчәрләренең юнәлешләре белән туры килгән берәмлек векторлар *координаталы векторлар* яки *орталар* дип атала.

Координаталы векторларны яссылыкта x күчәрендә $\bar e(1;\ 0)$ дип һәм y күчәрендә (0; 1) дип атау кабул ителгән. Теләсә нинди $\bar a(a_1;\ a_2)$ векторын

$$\bar a(a_1;\ a_2)=a_1\bar e_1+a_2\bar e_2$$

рәвешендә күрсәтеп була.

$\bar a(a_1;\ a_2;\ a_3)$ векторы белән λ санының тапкырчыгышы дип пространствода $(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$ векторы атала. Яссылыктагы кебек үк $\lambda\bar a$ векторының абсолют зурлыгы $|\lambda|\cdot|\bar a|$ га тигез, әгәр $\lambda>0$ булса, $\lambda\bar a$ векторының юнәлеше $\bar a$ $(a\neq 0)$ векторының юнәлеше белән туры килә, әгәр $\lambda<0$ булса, a векторының юнәлешенә капма-каршы була.

Вектор өчен пространствода түбәндәге таркату дөрес булыр:

$$\bar a(a_1;\ a_2;\ a_3)=a_1\bar e_1+a_2\bar e_2+a_3\bar e_3,$$

биредә $\bar e(1;\ 0;\ 0)$, $\bar e_2(0;\ 1;\ 0)$, $\bar e_3(0;\ 0;\ 1)$ — координаталы векторлар.

Параллель турыларда яки бер турыда яткан нульдән үзгә булган ике вектор коллинеар векторлар дип атала. 238 нче рәсемдә $\bar a$ һәм $\bar b$, $\bar b$ һәм $\bar c$ векторлары коллинеар.

Т.6.4. **Коллинеар векторларның тиңдәшле координаталары пропорциональ була. Һәм киресенчә: әгәр ике векторның тиңдәшле координаталары пропорциональ икән, алар коллинеар була.**

1 нче мисал. Өчпочмакның урта сызыгы аның өченче ягына параллель һәм ул якның яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү. $\triangle ABC$ ны карыйк (239 нчы рәсем). $\overline{c}=\overline{AB}$, $\overline{a}=\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{AC}$. Ул вакытта өчпочмак кагыйдәсе буенча $\overline{c}+\overline{a}=\overline{b}$ (п. 82).

M һәм N ABC өчпочмагында AB һәм BC якларының урталары булсын, ул вакытта $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=$

$$=\frac{1}{2}\overline{c}+\frac{1}{2}\overline{a}=\frac{1}{2}(\overline{c}+\overline{a})=\frac{1}{2}\overline{b}.$$

$\overline{AC}=\overline{b}$ һәм $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{b}$, шуңа күрә $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Шулай итеп, $\overline{MN}$ векторы $\overline{AC}$ белән бердәй юнәлгән, димәк, $AC \parallel MN$. $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ булганлыктан, $MN=\frac{1}{2}AC$.

2 нче мисал. Түбәндәге векторлар коллинеармы:
а) $\overline{a}(3;\ 6;\ 8)$ һәм $\overline{b}(6;\ 12;\ 16)$; б) $\overline{c}(1;\ -1;\ 3)$ һәм $\overline{d}(2;\ 3;\ 15)$;
в) $\overline{i}(1;\ 0;\ 0)$ һәм $\overline{k}(0;\ 1;\ 0)$; г) $\overline{m}(0;\ 0;\ 0)$ һәм $\overline{n}(5;\ 7;\ -3)$;
д) $\overline{p}\left(\frac{1}{3};\ -1;\ -5\right)$ һәм $\overline{q}(-1;\ -3;\ -15)$?

Чишү. а) $\overline{a}(3;\ 6;\ 8)$ векторының координаталары $\overline{b}(6;\ 12;\ 16)$ векторының координаталарына пропорциональ, чөнки $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=k$. Шуңа күрә $\overline{a}=k\overline{b}$, һәм, димәк, $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары коллинеар.

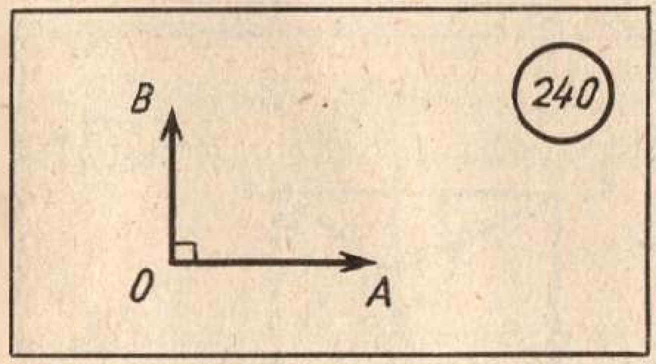
б) $\overline{c}(1;\ -1;\ 3)$ векторының координаталары $d(2;\ 3;\ 15)$ векторының координаталарына пропорциональ түгел, мәсәлән, $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$, шуңа күрә $\overline{c}$ һәм $\overline{d}$ векторлары коллинеар түгел. Чыннан да, әгәр $\overline{c}$ һәм $\overline{d}$ векторлары коллинеар дип уйласак, $\overline{c}=k\overline{d}$ булырдай k саны бар. Ләкин андый очракта c векторының координаталары $\overline{d}$ векторының координаталарына пропорциональ була, ә бу мәсьәләнең шартына каршы килә. Калган очракларда шулай ук карала.

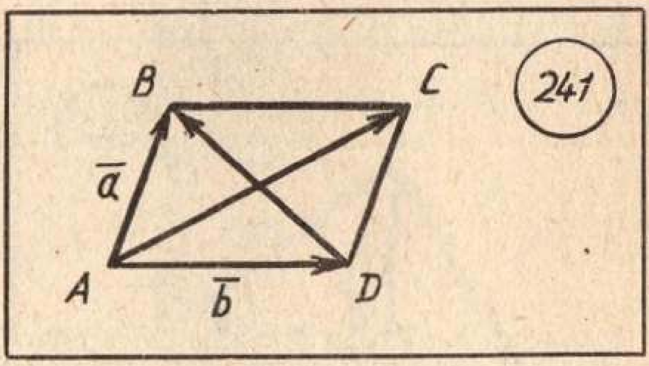
84. Векторларны скаляр тапкырлау. $a_1b_1+a_2b_2$ саны $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ һәм $\overline{b}(b_1,\ b_2)$ векторларының яссылыкта *скаляр тапкырчыгышы* дип атала. Векторларның скаляр тапкырчыгышын язу өчен саннар тапкырчыгышындагы кебек үк язма кулланыла. $\overline{a}\cdot\overline{a}$ скаляр тапкырчыгышы $\overline{a}^2$ дип тамгалана. $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$ икәне үзеннән-үзе аңлашыла.

Векторларны скаляр тапкырлауның билгеләмәсеннән теләсә нинди $\overline{a}(a_1,\ a_2)$, $\overline{b}(b_1,\ b_2)$, $\overline{c}(c_1,\ c_2)$ векторлары өчен

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{ac}+\overline{bc}$$

икәне килеп чыга.





Т.6.5. Векторларның скаляр тапкырчыгышы аларның абсолют зурлыклары белән алар арасындагы почмак косинусының тапкырчыгышына тигез.

$\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары бирелсен һәм α алар арасындагы почмак булсын, ул вакытта $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=AB\cdot CD\cdot\cos\alpha$, моннан $\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{AC\cdot CD}$.

6.5 теоремасыннан үзара перпендикуляр булган ике векторның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез дигән нәтиҗә чыга. Һәм киресенчә: әгәр нульдән үзгә векторларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез икән, векторлар перпендикуляр була.

240 нчы рәсемдә $\overline{OA}$ һәм $\overline{OB}$ векторлары сурәтләнгән, биредә $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$. Әгәр $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$ булса, алар арасындагы почмак 90° ка тигез, ягъни әлеге векторлар перпендикуляр турыларда яталар.

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ саны $a(a_1;\ a_2;\ a_3)$ һәм $b(b_1;\ b_2;\ b_3)$ векторларының *пространствода скаляр тапкырчыгышы* дип атала. Ике векторның пространствода скаляр тапкырчыгышы өчен 6.5 теоремасы дөрес.

1 нче мисал. $\overline{a}(1;\ 4)$ һәм $\overline{b}(-3;\ 2)$ векторлары бирелгән. $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ векторы $\overline{b}$ векторына перпендикуляр булырдай λ санын табыгыз.

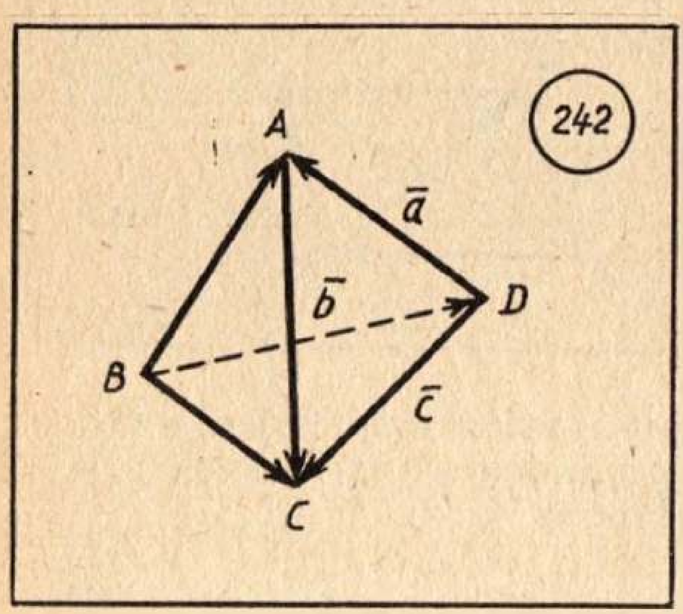
Чишү. Әгәр $\overline{a}+\overline{\lambda b}$ һәм $\overline{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы 0 гә тигез булса, алар перпендикуляр була.

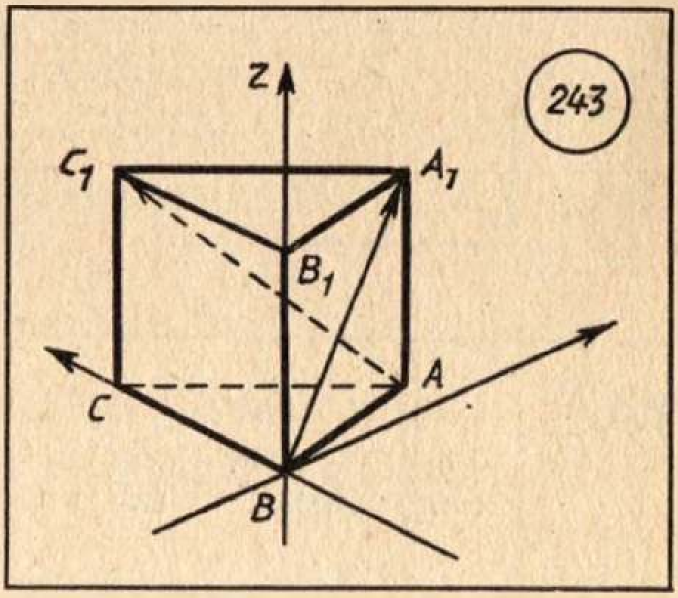
$\overline{a}+\overline{\lambda b}$ векторының координаталары $1-3\lambda$ һәм $4+2\lambda$, ул вакытта $\overline{a}+\overline{\lambda b}$ һәм $\overline{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы түбәндәгегә тигез:

$$(1-3\lambda)(-3)+(4+2\lambda)\cdot 2=5+13\lambda,$$

$$5+13\lambda=0,\ \text{ягъни}\ \lambda=-\frac{5}{13}.$$

Шулай итеп, $\lambda=-\frac{5}{13}$ булганда $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ һәм $\overline{b}$ векторлары перпендикуляр.





2 нче мисал. Параллелограмм диагональьләренең квадратлары суммасы аның барлык якларының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатларга.

Чишү. $ABCD$ — параллелограмм булсын (241 нче рәсем). $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$ булсын, өстәвенә $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|=a$, $|\overline{AD}|=|\overline{BC}|=b$.

Векторларны кушу һәм алу кагыйдәләре буенча (п. 82)

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}, \quad \overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD},$$
$$\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}, \quad \overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}.$$

Скаляр квадратның үзлекләрен файдаланып, табабыз: $\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2+\bar{a}^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=2\bar{a}^2+2\bar{b}^2$, ягъни $AC^2+DB^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

3 нче мисал. $ABCD$ тетраэдрында капма-каршы AD һәм BC, шулай ук BD һәм AC кабыргалары үзара перпендикуляр. Капма-каршы CD һәм AB кабыргаларының шулай ук үзара перпендикуляр икәнен исбатларга.

Чишү. $\overline{DA}=\bar{a}$, $\overline{BD}=\bar{b}$, $\overline{DC}=\bar{c}$ булсын (242 нче рәсем). Моннан $\overline{BA}=\bar{b}+\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{c}-\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{c}+\bar{b}$. Шарт буенча $AD\perp BC$ һәм $BD\perp AC$, шуңа күрә $\overline{DA}\perp\overline{BC}$ һәм $\overline{BD}\perp\overline{AC}$. Димәк, $\bar{a}(\bar{c}+\bar{b})=0$ һәм $\bar{b}\cdot(\bar{c}-\bar{a})=0$, моннан $-\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ һәм $\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{a}$. Бу ике тигезлектән $-\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ яки $(\bar{b}+\bar{a})\cdot\bar{c}=0$ килеп чыга. Ләкин $\bar{b}+\bar{a}=\overline{BA}$, $\bar{c}=\overline{DC}$, шуңа күрә $\overline{BA}\cdot\overline{DC}=0$, һәм, димәк, $AB\perp CD$.

4 нче мисал. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек дөрес призма бирелгән, анда $AA_1:AB=\sqrt{2}$, (243 нче рәсем). AC_1 һәм A_1B турылары арасындагы ераклыкны табарга.

Чишү. $AB=a$ булсын, ул вакытта $AA_1=a\sqrt{2}$. 243 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә итеп, турыпочмаклы координаталар системасы кертәбез. Ул вакытта A, B, A_1, C_1 түбәләренең координаталары $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$, $C_1(0;$ $a;$ $a\sqrt{2})$ булыр (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Моннан AC_1 һәм BA_1 векторларының координаталарын табабыз.

$$\overline{AC_1}\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right),\ \overline{BA_1}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right).$$

$\overline{AC_1}$ һәм $\overline{BA_1}$ векторлары AC_1 һәм BA_1 турыларында яталар, алар арасындагы эзләнелә торган почмакны φ дип билгелик. 6.5 теоремасы буенча табабыз:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{BA_1}}{AC_1\cdot BA_1}=\frac{-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2+2a^2}}=\frac{1}{2},$$

моннан $\varphi=60^\circ$.

КУШЫМТАЛАР

ТӨП ФОРМУЛАЛАР ҺӘМ БӘЙЛӘНЕШЛӘР

АЛГЕБРА ҺӘМ АНАЛИЗ БАШЛАНГЫЧЛАРЫ

I. Алгебраның төп законнары

Теләсә нинди реаль a, b, c саннары өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес:

$a+b=b+a$ *(кушуның урын алыштыру законы),*

$a+(b+c)=(a+b)+c$ *(кушуның оештыру законы),*

$a+0=a$,

$a+(-a)=0$,

$ab=ba$ *(тапкырлауның урын алыштыру законы),*

$a(bc)=(ab)c$ *(тапкырлауның алыштыру законы),*

$a(b+c)=ab+ac$ *(тапкырлауның кушуга карата тарату законы),*

$a\cdot 1=a$,

$a\cdot\frac{1}{a}=1 \ (a\neq 0)$.

II. Калдыклы бүлү

Әгәр m, n, p, r — натураль саннар, өстәвенә m — бүленүче, n — бүлүче, p — өлеш һәм r — калдык $(r<n)$ булса, ул вакытта

$$m=np+r.$$

III. Санлы тигезсезлекләр

Әгәр $a>b$ булса, $b<a$ була.

Әгәр $a>b$ һәм $b>c$ булса, $a>c$ була.

Әгәр $a>b$ булса, $a+c>b+c$ була.

Әгәр $a>b$ һәм $c>0$ булса, $ac>bc$ була.

Әгәр $a>b$ һәм $c<0$ булса, $ac<bc$ була.

Әгәр $a>b$ һәм $c>d$ булса, $a+c>b+d$ була.

Әгәр $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, өстәвенә $a>b$ һәм $c>d$ булса, $ac>bd$ була.

Әгәр $a>b>0$ һәм n — натураль сан булса, $a^n>b^n$ була.

IV. Реаль санның модуле һәм модульләрнең үзлекләре

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{әгәр } a \geqslant 0 \text{ булса,} \\ -a, & \text{әгәр } a < 0 \text{ булса} \end{cases}$$ *(модульнең билгеләмәсе)*

$|a| \geqslant 0$, $|a| = |-a|$,

$|ab| = |a| \cdot |b|$, $|a|^2 = a^2$,

$\dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

V. A һәм B нокталары арасындагы ераклык ρ (A; B)

1) $A(a)$ һәм $B(b)$ булганда координаталы турыда:

$$\rho(A;\ B) = |a - b|;$$

2) $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2,\ y_2)$ булганда координаталы яссылыкта:

$$\rho(A;\ B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y^2)^2}.$$

VI. Тапкырлаучыларга таркату

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$,
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$,
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, биредә x_1 һәм x_2 — $ax^2 + bx + c = 0$ тигезләмәсенең тамырлары,
$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

VII. Арифметик тамыр һәм аның үзлекләре

Әгәр $a \geqslant 0$ булса, $\sqrt[n]{a} = x$: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^n = a$ *(арифметик тамырның билгеләмәсе)* икәнен аңлата.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \qquad \sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \qquad \sqrt{a^2} = |a|.$$

VIII. Рациональ күрсәткечле дәрәҗә

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}}$, $a^1 = a$ *(натураль күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсе)*,

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, монда $a \geqslant 0$ *(уңай вакланма күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсе)*,

$a^0=1$, монда $a\neq 0$ *(нуль күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсе),*

$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$, монда $a>0$ *(тискәре рациональ күрсәткечле дәрәҗә билгеләмәсе),*

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2},\qquad (a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1 r_2},$$
$$a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2},\qquad (ab)^r=a^r b^r,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}.$$

IX. $ax^2+bx^2+c=0$ квадрат тигезләмәсе

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *(квадрат тигезләмә тамырларының формуласы),*

$x_{1,2}=\frac{\sqrt{k^2-ac}}{a}$, монда $k=\frac{b}{2}$ *(b — җөп сан булган очракта квадрат тигезләмә тамырларының формуласы).*

Виет теоремасы. Әгәр x_1 һәм x_2 $x^2+px+q=0$ *китерелгән квадрат тигезләмәсенең тамырлары булса, ул вакытта*

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1x_2=q.$$

X. Уңай санның стандарт рәвеше

$$a=a_1\cdot 10^n,$$

монда $1\leqslant a<10$, n — бөтен сан (a санының тәртибе).

XI. Хаталар

Әгәр a — α санының якынча кыйммәте булса, ул вакытта $|\alpha-a|$ — *абсолют хата,*

$\frac{|\alpha-a|}{|a|}\cdot 100\%$ — *чагыштырма хата.*

XII. Логарифмнар

$\log_a b=x$ язылышы $a^x=b$ икәнне аңлата; монда $a>0$, $a\neq 1$ (логарифмның билгеләмәсе).

$\lg b-\log_{10} b$ өчен кыскача язылыш (унарлы логарифм).
$\lg 1=0$, $\lg 10=1$, $\lg 100=2$, $\lg 1000=3$, ..., $\lg 10^n=n$.
$\lg 0{,}1=-1$, $\lg 0{,}01=-2$, $\lg 0{,}001=-3$, ..., $\lg 10^{-n}=-n$.
$\ln x-\log_e x$ өчен кыскача язылыш (натураль логарифм).
$e=2{,}7182818284590\ldots$; $\ln e=1$, $\ln 1=0$.

$a^{\log_a b}=b,\ 10^{\lg b}=b,\ e^{\ln b}=b,$

$\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2,$

$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2,$

$\log_a x_1^r=r\log_a x_1\ (x_1>0,\ x_2>0),$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ *(яңа нигезгә күчү формуласы),*

$\log_a b=\log_{a^k} b^k\ (k\neq 0).$

XIII. Арифметик прогрессия

$a_{n+1}=a_n+d$ *(арифметик прогрессиянең билгеләмәсе),*

$a_n=a_1+d(n-1)$ *(n нчы буын формуласы)*

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ *(характеристик үзлеге),*

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ *(беренче n буыннарының суммасы формуласы).*

XIV. Геометрик прогрессия

$b_{n+1}=b_nq,\ b_1\neq 0,\ q\neq 0$ *(геометрик прогрессиянең билгеләмәсе),*

$b_n=b_1q^{n-1}$ *(n нчы буын формуласы),*

$b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$ *(характеристик үзлеге),*

$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ *(беренче n буыннарының суммасы формуласы),*

$S=\frac{b_1}{1-q}$ *($|q|<1$ булганда чиксез геометрик прогрессиянең суммасы формуласы).*

XV. Тригонометрия

1. Тригонометрик функцияләрнең үзлекләре:

$$\sin(-x)=-\sin x,$$
$$\cos(-x)=\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x,$$
$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\ k\in \mathbf{Z},$$
$$\cos(x+2\pi k)=\cos x,\ k\in \mathbf{Z},$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x,\ k\in \mathbf{Z},$$
$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x,\ k\in \mathbf{Z}.$$

2. Тригонометрик функцияләрнең кайбер почмакларының кыйммәтләре таблицасы:

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Искәрмә. Почмакны үлчәгәндә градуслы һәм радианлы үлчәм арасында бәйләнеш:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

3. Бер үк аргументның тригонометрик функцияләрен бәйли торган формулалар:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Икеләтелгән почмак формулалары:

$$\sin^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

5. Дәрәҗәне киметү формулалары:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

6. Аргументларны кушу формулалары:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

7. Тригонометрик функцияләрнең суммасын тапкырчыгышка үзгәртү формулалары:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

8. Тригонометрик функцияләрнең чирекләрдәге тамгалары:

Функция	**Чирек**			
	I	**II**	**III**	**IV**
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

9. Китерү формулалары:

Функция	***t* аргументы**						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$.	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

10. Иң гади тригонометрик тигезләмәләрне чишү:

$\sin x = a,\ |a| \leqslant 1,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$
$\cos x = a,\ |a| \leqslant 1,\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$
$\operatorname{tg} x = a,\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$
$\operatorname{ctg} x = a,\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

11. Кире тригонометрик функцияләр:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

XVI. $y = f(x)$ функциясе графигының асимптоталары

Әгәр $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ булса, $y = b$ — *горизонталь асимптота.*

Әгәр $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ булса, $x = a$ — *вертикаль асимптота.*

XVII. Чыгарылма

$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *(чыгарылма билгеләмәсе).*

1. Дифференциаллау кагыйдәләре:

$$(u + v)' = u' + v',\ (Cu)' = Cu',$$
$$(uv)' = u'v + uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

2. Дифференциаллау формулалары:

$C' = 0,$	$(\sin x)' = \cos x,$
$(kx + b)' = k,$	$(\cos x)' = -\sin x,$
$(x^r)' = rx^{r-1},$ $(e^x)' = e^x,$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$
$(a^x)' = a^x \ln a,$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x},$
$(\ln x)' = \frac{1}{x},$	$(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$	$(\operatorname{arctg} x)' = (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$

3. $y = f(x)$ функциясе графигына орынма тигезләмәсе:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

биредә $x = a$ — орыну ноктасының абсциссасы.

XVIII. Башлангыч функция һәм интеграл

Әгәр $F'(x) = f(x)$ булса, $F(x)$ — $f(x)$ өчен башлангыч функция була *(башлангыч функциянең билгеләмәсе).*

1. Башлангыч функцияне исәпләү кагыйдәләре.

Әгәр $F(x)$ — $f(x)$ өчен башлангыч функция, ә $H(x)$ $h(x)$ өчен башлангыч функция булса, ул вакытта

$F(x) + H(x)$ — $f(x) + h(x)$ өчен башлангыч функция була.

$kF(x)$ — $kf(x)$ өчен башлангыч функция.

$\frac{1}{2}F(kx + b)$ — $f(kx + b)$ өчен башлангыч функция.

2. Башлангыч функцияләр таблицасы (таблицада һәр функция өчен башлангыч функцияләрнең берсе бирелгән).

Функция	Башлангыч функция
$f(x) = k$	$F(x) = kx$
$f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$

Функция	Башлангыч функция
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

3. Интегралны исәпләү:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ *(Ньютон-Лейбниц формуласы).*

4. $x = a$, $x = b$ (монда $a < b$) турылары һәм $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (монда $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) функцияләренең графиклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапециянең мәйданын $[a;\ b]$ да исәпләү:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

ГЕОМЕТРИЯ

I. Геометрия аксиомалары

Нокта һәм турылар өчен берсе икенчесенеке булуның төп үзлекләре

А — I$_1$. Туры нинди генә булмасын, шул турыныкы булган нокталар да, аныкы булмаган нокталар да бар.
А — I$_2$. Теләсә нинди ике нокта аша туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

Туры һәм яссылыктагы нокталарның үзара торышының төп үзлекләре

А — II$_1$. Турыдагы өч ноктаның берсе, һәм бары тик берсе генә, калган икесе арасында ята.
А — II$_2$. Туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә.

Кисемтәләрне һәм почмакларны үлчәүнең төп үзлекләре

А — III$_1$. Һәр кисемтәнең нульдән зуррак билгеле бер озынлыгы була. Кисемтәнең озынлыгы аның теләсә нинди ноктасы белән бүленүдән килеп чыккан өлкәләре озынлыкларының суммасына тигез.
А — III$_2$. Һәр почмакның нульдән зуррак билгеле бер градуслы үлчәме бар. Җәелгән почмак 180° ка тигез. Почмакның градуслы үлчәме аның яклары арасыннан үтүче теләсә нинди нур белән бүлүдән килеп чыккан почмакларның градуслы үлчәмнәре суммасына тигез.

Кисемтәләр һәм почмаклар салуның төп үзлекләре

А — IV$_1$. Теләсә нинди ярымтурыда, аның башлангыч ноктасыннан башлап, бирелгән озынлыкта кисемтә салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.
А — IV$_2$. Теләсә нинди ярымтурыдан бирелгән ярымъяссылыкка градуслы үлчәме 180° тан кечерәк булган почмак салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

Бирелгән өчпочмакка тигез өпочмак булуы

А — IV$_3$. Өчпочмак нинди генә булмасын, бирелгән ярымтурыга карата күрсәтелгән тәртиптә урнашкан аңа тигез өчпочмак бар.

Параллель турыларның төп үзлеге

A — V. Яссылыкта бирелгән турыда ятмаган нокта аша, шул турыга параллель итеп, бер генә туры үткәрергә мөмкин.

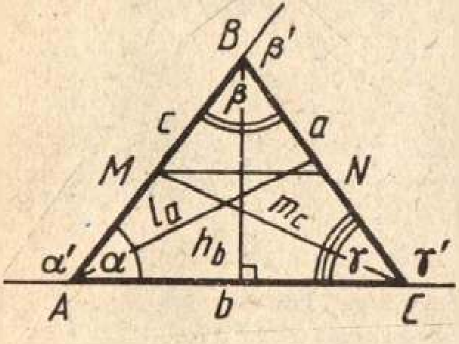
Пространстводa яссылыкларның төп үзлекләре

C_1. Яссылык нинди генә булмасын, шул яссылыкныкы булган нокталар да, аныкы булмаган нокталар да бар.

C_2. Әгәр төрле ике яссылыкның уртак ноктасы булса, алар туры буйлап кисешәләр.

C_3. Әгәр төрле ике турының уртак ноктасы булса, алар аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

II. Өчпочмаклар



a, b, c — өчпочмакның яклары.

α, β, γ — өчпочмакның эчке почмаклары.

α', β', γ' — өчпочмакның тышкы почмаклары.

h_a, h_b, h_c — өчпочмакның биеклекләре, алар өчпочмакның түбәләреннән капма-каршы тиңдәшле ятучы a, b, c якларын эченә алган турыларга төшерелгәннәр.

m_a, m_b, m_c — өчпочмакның медианалары, алар өчпочмакның түбәләрен каршы ятучы a, b, c якларының урталары белән тоташтыралар.

l_a, l_b, l_c — өчпочмакның биссектрисалары, алар өчпочмакның түбәләрен каршы ятучы a, b, c якларының нокталары белән тоташтыралар.

MN — өчпочмакның урта сызыгы.

P — өчпочмакның периметры.

p — өчпочмакның ярымпериметры.

R — өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы.

r — өчпочмакка камаулы әйләнәнең радиусы.

$S_{\triangle ABC}$ — ABC өчпочмагының мәйданы.

Өчпочмакның почмаклары суммасы

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Өчпочмакның тышкы почмакларының үзлекләре

$$\alpha'=\beta+\gamma,\ \beta'=\alpha+\gamma,\ \gamma'=\alpha+\beta,$$

$$\alpha'>\beta,\ \alpha'>\gamma,\ \beta'>\alpha,\ \beta'>\gamma,\ \gamma'>\beta.$$

Өчпочмак тигезсезлеге

$$a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b.$$

Өчпочмакның яклары һәм почмаклары арасындагы бәйләнешләр

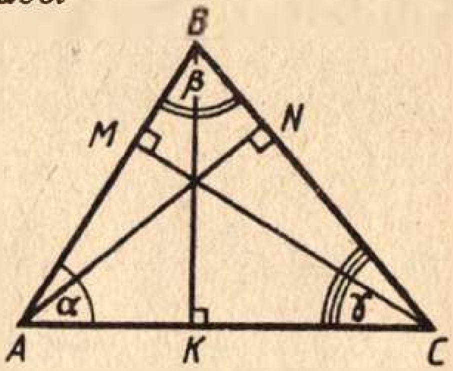
Әгәр $c<a$ булса, $\gamma<\alpha$ була. Әгәр $a>c$ булса, $\alpha>\gamma$ була.
Әгәр $c<b$ булса, $\gamma<\beta$ була. Әгәр $a<b$ булса, $\alpha<\beta$ була.
Әгәр $\alpha<\beta$ булса, $a<b$ була. Әгәр $\gamma<\alpha$ булса, $c<a$ була.
Әгәр $\beta>\gamma$ булса, $b>c$ була. Әгәр $\alpha>\gamma$ булса, $a>c$ була.

Синуслар теоремасы

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Косинуслар теоремасы

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$



Өчпочмакның периметры һәм ярымпериметры

$$P=a+b+c,\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Өчпочмакның урта сызыгының үзлекләре

$$MN\parallel AC,\quad MN=\frac{b}{2}.$$

Өчпочмакның мәйданы

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\quad S=\frac{1}{2}bh_b,\quad S=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha;$$

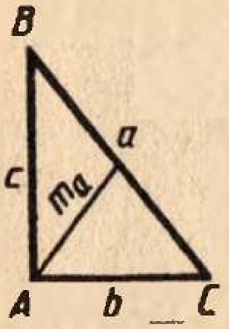
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(Герон формуласы)*

Тигезьянлы өчпочмак

$$a=c,\ \angle\alpha=\angle\gamma,$$
$$h_b=m_b=l_b$$

Тигезьяклы өчпочмак

$$a=b=c,\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ;$$
$$h_a=l_a=m_a,\ h_b=l_b=m_b,\ h_c=l_c=m_c;$$
$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Турыпочмаклы өчпочмак

$\alpha = 90^\circ$, b, c — катетлар, a — гипотенуза,
$a^2 = b^2 + c^2$ *(Пифагор теоремасы);*

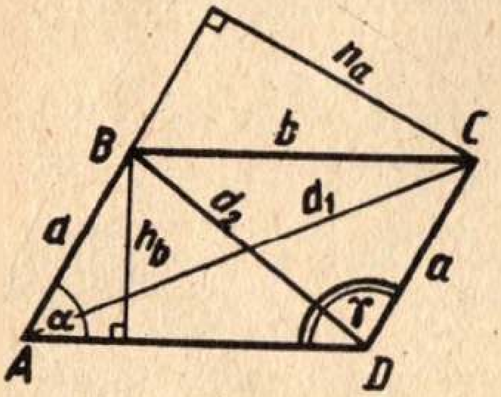
$$R = \frac{a}{2} = m_a, \quad S = \frac{1}{2} bc,$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{a}, \ \cos\gamma = \frac{b}{a}, \ \operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b},$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}, \ \cos\beta = \frac{c}{a}, \ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}.$$

III. Дүртпочмаклар

Параллелограмм



a, b — параллелограммның яклары.

h_a, h_b — параллелограммның түбәләреннән параллелограммның a, b якларын эченә алган турыларга төшерелгән параллелограммның биекләкләре.

d_1, d_2 — параллелограммның диагональләре.

α, γ — параллелограммның почмаклары,

$\alpha + \gamma = 180^\circ$.

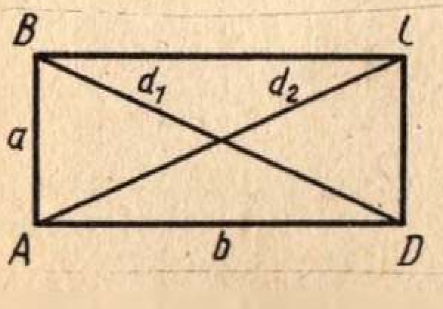
Параллелограммның мәйданы

$$S = ah_a, \quad S = bh_b, \quad S = ab\sin\alpha.$$

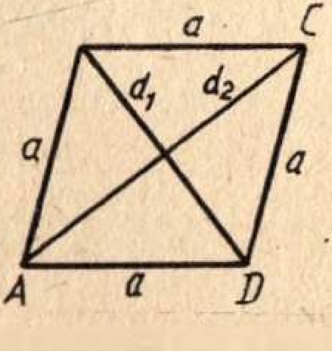
Параллелограммның яклары һәм диагональләре арасындагы бәйләнеш

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

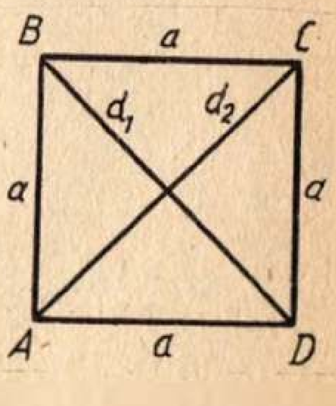
Турыпочмаклык



Ромб



Квадрат

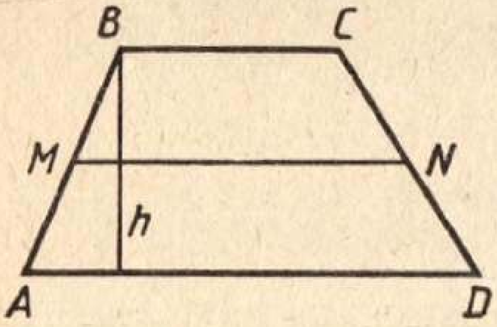


$\alpha=\gamma=90^\circ$,
$d_1=d_2$,
$S=ab$,
$d_1^2=a^2+b^2$.

$d_1\perp d_2$,
$S=a^2\sin\alpha$,
$S=\frac{1}{2}d_1d_2$,
$d_1^2+d_2^2=4a^2$.

$\alpha=\gamma=90^\circ$,
$d_1=d_2,\ d_1\perp d_2$,
$S=a^2$,
$d_1=a\sqrt{2}$.

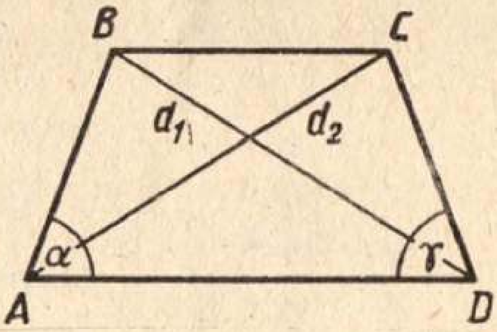
Трапеция



$MN=\frac{a+b}{2}$ — трапециянең урта сызыгы;

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

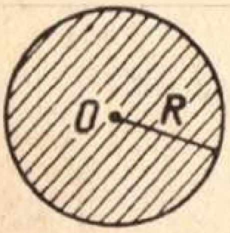
Тигезьянлы трапеция

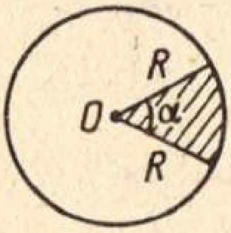


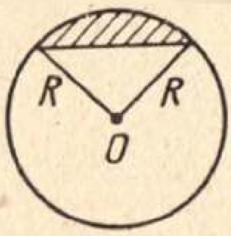
$AB=CD$,
$\alpha=\gamma$

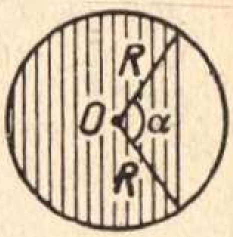
$d_1=d_2$.

IV. Әйләнә һәм түгәрәк

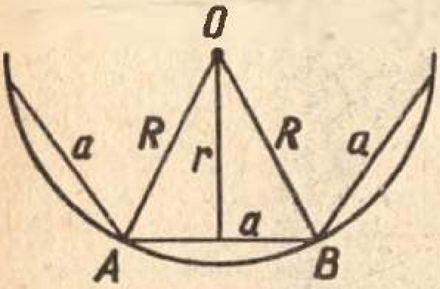








R — әйләнә (түгәрәк) радиусы,
$C=2\pi R$ — әйләнә озынлыгы,
$l=\frac{\pi r\alpha}{180}$ — дуга озынлыгы,
$S=\pi R^2$ — түгәрәк мәйданы,
$S_{\text{сект}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$ — түгәрәк сектор мәйданы,
$S_{\text{сегм}}=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_\triangle$ — түгәрәк сегмент мәйданы.



V. Төзек күппочмаклар

$$S=\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{360^\circ}{n},$$

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},\quad r=\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Төзек күппочмакның төре	α	R	r	Почмакларның суммасы
Өчпочмак	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	180°
Дүртпочмак	90°	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	360°
Алтыпочмак	120°	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	720°

VI. Җисем өслекләренең күләмнәре һәм мәйданнары

Авыш призма

1. Авыш призманың күләме

$$V = S_{\text{пк}}a,$$

монда $S_{\text{пк}}$ — авыш призманың перпендикуляр кисем мәйданы.

Авыш призманың ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = P_{\text{пк}} \cdot a,$$

монда $P_{\text{пк}}$ — авыш призманың перпендикуляр кисем периметры, a — ян кабырга.

Авыш призманың тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}} = S_{\text{ян}} + 2S_{\text{нигез}},$$

монда $S_{\text{ян}}$ — авыш призманың ян өслеге мәйданы, $S_{\text{нигез}}$ — аның нигезенең мәйданы.

Туры призма

Туры призманың күләме

$$V = S_{\text{нигез}}a,$$

монда $S_{\text{нигез}}$ — туры призманың нигез мәйданы, a — ян кабырга.

Туры призманың ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = P_{\text{нигез}}a,$$

монда $P_{\text{нигез}}$ — туры призманың нигез периметры, a — ян кабырга.

Туры призманың тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}} = S_{\text{ян}} + 2S_{\text{нигез}},$$

монда $S_{\text{ян}}$ — туры призманың ян өслеге мәйданы, $S_{\text{нигез}}$ — нигез мәйданы.

Турыпочмаклы параллелепипед

Турыпочмаклы параллелепипед күләме

$$V = abc,$$

монда a, b, c — турыпочмаклы параллелепипедның үлчәмнәре.

Турыпочмаклы параллелепипедның ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = 2c(a + b),$$

монда a, b — нигез яклары, c — турыпочмаклы параллелепипедның ян кабыргасы.

Турыпочмаклы параллелепипедның тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}} = 2(ab + bc + ac),$$

Куб

$$V = a^3,\ S_{\text{ян}} = 4a^2,\ S_{\text{т}} = 6a^2,$$

монда a — кубның кабыргасы.

Пирамида

Пирамиданың күләме

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{нигез}} H,$$

монда $S_{\text{нигез}}$ — пирамиданың нигез мәйданы, H — биеклеге.

Пирамиданың ян өслеге мәйданы аның ян кырларының мәйданнары суммасына тигез.

Пирамиданың тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}} = S_{\text{ян}} + S_{\text{нигез}},$$

монда $S_{\text{ян}}$ — пирамиданың ян өслеге мәйданы, $S_{\text{нигез}}$ — нигез мәйданы.

Төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = \frac{1}{2} P_{\text{нигез}} l,$$

монда $P_{\text{нигез}}$ — төзек пирамиданың нигез периметры, l — аның апофемасы.

Кисек пирамида

Кисек пирамиданың күләме

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

монда S_1, S_2 — кисек пирамиданың нигез мәйданнары, ә H — аның биеклеге.

Кисек пирамиданың ян өслеге мәйданы аның ян кырларының мәйданнары суммасына тигез.

Кисек пирамиданың тулы өслеге мәйданы

$$S_m = S_{\text{ян}} + S_1 + S_2,$$

монда $S_{\text{ян}}$ — пирамиданың ян өслеге мәйданы, S_1, S_2 — нигезләренең мәйданнары.

Төзек кисек пирамиданың ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l,$$

монда P_1, P_2 — нигезләренең периметрлары, ә l — аның апофемасы.

Цилиндр

Цилиндрның күләме

$$V = \pi R^2 H,$$

монда R — цилиндр нигезенең радиусы, ә H — аның биеклеге.

Цилиндрның тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}} = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

монда R — цилиндр нигезенең радиусы, H — аның биеклеге.

Конус

Конусның күләме

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

монда R — конус нигезенең радиусы, H — аның биеклеге.

Конусның ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = \pi R \cdot L$$

монда R — конус нигезенең радиусы, L — аның төзүчесе.

Конусның тулы өслеге мәйданы

$$S_m = \pi R(R + L),$$

монда R — конус нигезенең радиусы, ә L — аның төзүчесе.

Кисек конус

Кисек конусның күләме

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

монда R, r — кисек конус нигезләренең радиуслары, H — аның биеклеге.

Кисек конусның ян өслеге мәйданы

$$S_{\text{ян}} = \pi L(R + r),$$

монда R, r — кисек конус нигезләренең радиуслары, L — аның төзүчесе.

Кисек конусның тулы өслеге мәйданы

$$S_{\text{т}}=\pi L(R+r)+\pi R^2+\pi r^2,$$

монда R, r — кисек конус нигезләренең радиуслары, L — аның төзүчесе.

Сфера һәм шар

Шарның күләме

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

монда R — шар радиусы.

Сфера мәйданы (шар өслеге мәйданы)

$$S=4\pi R^2,$$

монда R — сфера радиусы.

Шар сегменты күләме

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right),$$

монда H — шар сегментының биеклеге, R — шар радиусы.

Шар секторының күләме

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot H,$$

монда H — тиңдәшле шар сегментының биеклеге, R — шар радиусы.

АТАМАЛАР КҮРСӘТКЕЧЕ

Абсолют зурлык
  векторның абсолют зурлыгы 383
  санның абсолют зурлыгы 36
Абсцисса 355
Авышма 275
Аерма
  арифметик прогрессиянең аермасы 203
  векторлар аермасы 385
  комплекслы саннар аермасы 49
  саннар аермасы 12
Аксиома 259
Алу
  гади вакланмаларны алу 21
  комплекслы саннарны алу 50
  рациональ аңлатмаларны алу 64
  унарлы вакланмаларны алу 24
Аналитик бирелеш
  санлы эзлеклелекнең аналитик бирелеше 202
  функциянең аналитик бирелеше 71
Апофема
  төзек кисек пирамиданың апофемасы 336
  төзек пирамиданың апофемасы 336
Аргумент 70
  өстәмә аргумент 157
Асимптота
  вертикаль асимптота 215
  горизонталь асимптота 211
Аңлатма
  алгебраик аңлатма 53
  бөтен алгебраик аңлатма 52
  вакланмалы алгебраик аңлатма 53
  иррациональ алгебраик аңлатма 53
  иярешле аңлатма 70
  рациональ алгебраик аңлатма 53
  санлы аңлатма 12
  трансцендент аңлатма 117
  тригонометрик аңлатма 122
Аңлатмаларның тиңдәш кыйммәтләре 54

Башлангыч функция 244
Башлангыч
  векторның башлангычы 384
  координаталарның башлангычы 73
  нурның башлангычы 263
Бербуын 56
Бердәй тигез аңлатмалар 54
Бердәйлек 54
Биеклек
  конус биеклеге 340
  параллелограмм биеклеге 294
  пирамида биеклеге 334
  призма биеклеге 332
  трапеция биеклеге 297
  өчпочмак биеклеге 277
Билге
  ике яссылыкның параллельлек билгесе 322
  параллелограмм билгесе 294
  турыларның параллельлек билгесе 274
  туры һәм яссылыкның параллельлек билгесе 320
  туры һәм яссылыкның перпендикулярлык билгесе 324
  яссылыкларның перпендикулярлык билгесе 318
Биссектриса
  почмак биссектрисасы 267
  өчпочмак биссектрисасы 278
Бүленү билгеләре 13
Бүлү
  гади вакланмаларны бүлү 21
  калдыклы бүлү 12
  комплекслы саннарны бүлү 50
  рациональ саннарны бүлү 65
  унарлы вакланмаларны бүлү 25
Бүлүче
  иң зур уртак бүлүче 15
  санның бүлүчесе 12
  уртак бүлүче 15

Вакланма
  аралаш вакланма 18
  гади вакланма 17
  кыскартылмас вакланма 19
  рациональ вакланма 63
  унарлы вакланма 22
  чиксез унарлы вакланма 27
  чиксез унарлы периодик вакланма 28
  чиксез унарлы саф периодик вакланма 28
  чиксез унарлы периодик катнаш вакланма 28
  ялгыз вакланма 18
Вакланма буыннарының тамгаларын үзгәртү 19
Вакланмаларны уртак ваклаучыга китерү 19
Вакланманың ваклаучысы 17
Вакланманың санаучысы 17
Ваклаучыда иррациональлектән котылу 70
Вектор
  берәмлек-вектор 387
  нуль-вектор 384
Векторлар
  бер юнәлештәге векторлар 383
  капма-каршы юнәлештәге векторлар 383
  коллинеар векторлар 386
  тигез векторлар 383

Векторларның скаляр тапкырчыгышы
— пространстводагы скаляр тапкырчыгышы 389
— яссылыктагы скаляр тапкырчыгышы 389

Геометрия 257
  Евклид геометриясе 257
  Лобачевский геометриясе 272
Гипербола 83
Гипотенуза 282
Гомотетия 371
Градус 264
Градуслы үлчәм
  Дуганың градуслы үлчәме 270
  Почмакның градуслы үлчәме 266
График
  гармоник тирбәнешләр графигы 115
  даими функция графигы 78
  дәрәҗәле функция графигы 85
  ике үзгәрешлеле тигезләмә графигы 163
  квадратик функция графигы 107
  кире пропорциональлек графигы 83
  кире функция графигы 93
  күрсәткечле функция графигы 90
  логарифмик функциянең графигы 94
  так функциянең графигы 76
  тригонометрик функциянең графигы 98
  туры пропорциональлек графигы 79
  сызыкча функциянең графигы 80
  функциянең графигы 74
  җөп функциянең графигы 76
График юл белән чишү
  бер үзгәрешлеле тигезләмәне чишү 158
  бер үзгәрешлеле тигезсезлекне чишү 179
  икенче дәрәҗә бер билгесезле тигезсезлекне чишү 185
  тигезләмәләр системасын чишү 169
Графикны кысу 106
Графикны сузу 106
Группалау ысулы 59

Диагональ
  дүртпочмакның диагонале 293
  күппочмакның диагонале 300
  параллелограммның диагонале 294
  призманың диагонале 332
  ромбның диагонале 296
  турыпочмаклыкның диагонале 296
Диаметр
  түгәрәк диаметры 264
  шар диаметры 341
  әйләнә диаметры 264
Диаметраль яссылык 342
Дифференциаллау 221
  катлаулы функцияне дифференциаллау 223
  сумманы дифференциаллау 221
  тапкырчыгышны дифференциаллау 221
  өлешне дифференциаллау 221
Додекаэдр 337
Дәрәҗә 15
  бербуынның дәрәҗәсе 55
  вакланма күрсәткечле дәрәҗә 42
  иррациональ күрсәткечле дәрәҗә 47
  күпбуынның дәрәҗәсе 60
  натураль күрсәткечле дәрәҗә 15
  нуль күрсәткечле дәрәҗә 39
  рациональ күрсәткечле дәрәҗә 42
  тискәре бөтен күрсәткечле дәрәҗә 39
Дүртпочмак 293
  кабарынкы дүртпочмак 293
  кабарынкы булмаган дүртпочмак 293

Ераклык
  чалышма турылар арасындагы ераклык 321
  координаталар турысында нокталар арасындагы ераклык 37
  ноктадан турыга кадәр ераклык 275
  ноктадан яссылыкка кадәр ераклык 325
  нокталар арасында ераклык 261
  параллель турылар арасында ераклык 275
  турыдан аңа параллель булган яссылыкка кадәр ераклык 327

Ике санның арифметик уртасы 199
Ике санның геометрик уртасы 199
Ике үзгәрешлеле сызыкча ике тигезләмә системасын тикшерү 170
Икосаэдр 337
Интеграл 248
Интервал 35
Ирекле буын
  күпбуынның ирекле буыны 60
  тигезләмәнең ирекле буыны 133
Исбатлау 259

Кабырга
  күпкырлыкның кабыргасы 330
  пирамиданың ян кабыргасы 332
  призманың ян кабыргасы 332
  өчкырлы почмакның кабыргасы 330
Кагыйдә
  параллелепипед кагыйдәсе 385
  параллелограмм кагыйдәсе 385
  өчпочмак кагыйдәсе 385
Координата векторлары 384
Координата күчәрләре 73
Координата чирекләре 353

- Координаталар турысының юнәлеше 31
- Косинус
  - кысынкы почмак косинусы 305
  - почмак косинусы 96
  - санның косинусы 96
- Коэффициент
  - бербуын коэффициенты 55
  - гомотетия коэффициенты 371
  - кире пропорциональлек коэффициенты 82
  - охшашлык коэффициенты 378
  - пропорциональлек коэффициенты 79
  - үзгәрешленең коэффициенты 164
- Критик нокта 230
- Кыйммәт
  - алгебраик аңлатманың кыйммәте 54
  - ноктада функция чыгарылмасының кыйммәте 219
  - санлы аңлатманың кыйммәте 12
  - функциянең кыйммәте 71
  - функциянең иң зур кыйммәте 231
  - функциянең иң кечкенә кыйммәте 231
  - хәрефнең кыйммәте 17
- Кыйммәтле цифрлар 24
- Кагыйдәләр
  - башлангыч функцияне исәпләү кагыйдәләре 246
  - интеграл исәпләү кагыйдәләре 251
- Калдык 12
- Катет 282
- Квадрат 296
- Квадрат өчбуын 60
- Квадрат өчбуынның дискриминанты 134
- Киметүче 12
- Кимүче 12
- Кисемтә 261
  - юнәлешле кисемтә 382
  - туры белән кисешмәүче кисемтә 265
  - туры белән кисешүче кисемтә 265
- Кисемтәнең очы 263
- Кисүче 273
- Комплекслы нуль 48
- Комплекслы санның алгебраик формасы 49
- Комплекслы санның уйланма берәмлеге 50
- Конус
  - төзек конус 340
  - кисек конус 340
- Координаталар
  - векторның координаталары 384
  - пространствода Декарт координаталары 355
  - кисемтә уртасының координаталары 357
  - пространствода ноктаның координаталары 356
  - яссылыкта Декарт координаталары 356
  - яссылыкта ноктаның координаталары 356
- Кыр
  - икекырлы почмакның кыры 333
  - күпкырлы почмакның кыры 333
  - күпкырлыкның кыры 333
  - өчкырлы почмакның кыры 333
- Кыскарту
  - гади вакланмаларны кыскарту 19
  - рациональ вакланмаларны кыскарту 62
- Куб 333
- Кушу
  - векторларны кушу 385
  - гади вакланмаларны кушу 20
  - комплекслы саннарны кушу 50
  - рациональ вакланмаларны кушу 64
  - унарлы вакланмаларны кушу 24
- Кушуның оештыру үзлеге 11, 38
  - урын алыштыру үзлеге 11, 38
- Кушылучылар 11
- Күләм
  - кисек конусның күләме 351
  - конусның күләме 350
  - кубның күләме 348
  - пирамиданың күләме 348
  - призманың күләме 349
  - туры параллелепипедның күләме 348
  - шар сегментының күләме 351
  - шар секторының күләме 352
  - шарның күләме 351
  - цилиндрның күләме 350
  - әйләнүче җисемнең күләме 350
- Күпбуын 56
  - беренче дәрәҗә күпбуын 60
  - икенче дәрәҗә күпбуын 60
  - *n*-нчы дәрәҗә күпбуын 60
  - өченче дәрәҗә күпбуын 60
- Күпбуынның өлкән буыны 60
- Күпкырлык 331
  - кабарынкы күпкырлык 331
  - төзек күпкырлык 336
- Күппочмак 300
  - кабарынкы күппочмак 300
  - төзек күппочмак 301
  - яссы күппочмак 300
  - әйләнәгә камалган күппочмак 302
  - әйләнәне камаучы күппочмак 302
- Күчәр киseme
  - конусның киseme 340
  - цилиндрның киseme 340
- Күчәр
  - абсциссалар күчәре 73
  - конусның күчәре 340
  - ординаталар күчәре 73
  - параболаның симметрия күчәре 109
  - фигураның симметрия күчәре 375
  - цилиндрның күчәре 339
  - әйләнү күчәре 375
- Линейка 287

Логарифм 117
  дәрәҗә логарифмы 11
  натураль логарифм 95
  тапкырчыгышның логарифмы 117
  унарлы логарифм 120
  өлешнең логарифмы 117
Логарифмланучы сан 117
Логарифмлау 119

Максимум 229
Метод
  аралыклар методы 189
  каршы куеп исбатлау методы 258
  тигезсезлекне исбатлау методы 199
  тигезсезлекне аерманың тамгасы буенча исбатлау методы 199
  тигезләмә чишү методы 142
  тигезләмәләр системасын чишү методы 166
  — — кушу юлы белән чишү методы 166
  — — алыштырып кую юлы белән чишү методы 166
  — — тапкырлау һәм бүлү юлы белән чишү методы 171
  — — яңа үзгәрешләләр кертеп чишү методы 143
  тигезләмәне график юл белән чишү методы 159
  — дәрәҗәгә күтәреп чишү методы 148
  — тапкырлаучыларга таркатып чишү методы 142
  — яңа үзгәрешле кертеп чишү методы 143
Минимум 229
Модуль
  вектор модуле 383
  сан модуле 36
Мәйдан
  гади фигура мәйданы 311
  квадрат мәйданы 312
  конусның тулы өслеге мәйданы 354
  конусның ян өслеге мәйданы 354
  параллелограмм мәйданы 312
  пирамиданың тулы өслеге мәйданы 353
  — ян өслеге мәйданы 353
  призманың тулы өслеге мәйданы 352
  — ян өслеге мәйданы 352
  ромб мәйданы 312
  трапеция мәйданы 314
  турыпочмаклык мәйданы 312
  түгәрәк мәйданы 315
  түгәрәк секторының мәйданы 315
  — сегментының мәйданы 315
  цилиндрның тулы өслеге мәйданы 354
  — ян өслеге мәйданы 354
  өчпочмак мәйданы 313
  әйләнү җисеменең өслек мәйданы 353

Натураль саннан квадрат тамыр алу 45
Нигез
  авышма нигезе 275
  дәрәҗә нигезе 15, 39
  конус нигезе 340
  кисек пирамиданың нигезе 335
  логарифмның нигезе 118
  перпендикулярның нигезе 275
  пирамиданың нигезе 334
  призманың нигезе 332
  тигезьянлы өчпочмакның нигезе 281
  трапециянең нигезе 297
  цилиндрның нигезе 339
Нокта 258
  ике нокта арасындагы нокта 261
  ноктага карата бирелгән ноктага симметрик нокта 369
  туры өстендә ятучы нокта 258
  — — ятмаучы нокта 259
  турыга карата бирелгән ноктага симметрик нокта 369
  турыларның кисешү ноктасы 259
  чик нокта 330
  яссылык һәм сфераның кисешү ноктасы 343
  яссылыкта ятмаучы нокта 318
  — ятучы нокта 318
  эчке нокта 330
  әйләнәләрнең кисешү ноктасы 277
Ноктаның тирәсе 200
Нокталарның геометрик урыны
  пространстводагы геометрик урыны 346
  яссылыктагы геометрик урыны 291
Нур 35
  ачык нур 35
Ньютон биномы 61

Озынлык
  дуга озынлыгы 304
  кисемтә озынлыгы 261
  сынык сызык озынлыгы 299
  әйләнә озынлыгы 303
Октаэдр 337
Ордината 355
Орта 387
Орынма
  конус яссылыгына орынма 340
  функциянең графигына орынма 223
  цилиндр өслегенә орынма 224
  шар өслегенә орынма 342
  әйләнәгә орынма 276
Охшаш
  — бербуыннар 56
  — фигуралар 379
  — өчпочмаклар 379

Парабола 74
  куб парабола 84
Параллелепипед 331
  туры параллелепипед 332

Параллель күчерү
  пространствода параллель күчерү 381
  яссылыкта параллель күчерү 381
Параметр 160
Период
  төп функциянең периоды 77
  функциянең периоды 77
  чиксез унарлы периодик вакланманың периоды 28
Перпендикуляр 274
  кисешүче ике турының урта перпендикуляры 275
  урта перпендикуляр 275
Пирамида 334
  кисек пирамида 336
  конуска камалган пирамида 340
  конусны камаучы пирамида 341
  төзек пирамида 335
  төзек кисек пирамида 336
Планиметрия 257
Потенцирлау 119
Почмак 266
  бору почмагы 374
  ике вектор арасындагы почмак 384
  ике яссылык арасындагы почмак 323
  икекырлы почмак 330
  икекырлы почмакның сызыкча почмагы 330
  кабарынкы дүртпочмакның почмагы 293
  — күппочмакның почмагы 300
  кысынкы почмак 266
  күпкырлы почмак 330
  туры почмак 266
  яссы почмак 267
  яссылык һәм туры арасындагы почмак 325
  яссылыкта чалышма турылар арасындагы почмак 321
  — турылар арасындагы почмак 269
  әйләнә эченә камалган почмак 269
  әйләнү почмагы 375
  өчкырлы почмак 330
  өчпочмакның тышкы почмагы 282
  — эчке почмагы 282
  үзәк почмак 269
  җәелгән почмак 266
  җәенке почмак 266
Почмаклар
  вертикаль почмаклар 268
  тигез почмаклар 279
  чиктәш почмаклар 268
  эчке капма-каршы ятучы почмаклар 273
  эчке якташ почмаклар 273
Почмаклык 286
Почмакның радианлы үлчәме 304
Почмакча коэффициент
  орынманың почмакча коэффициенты 224
  турының почмакча коэффициенты 81
Прогрессия
  арифметик прогрессия 203
  геометрик прогрессия 205
Проекция
  авышма проекциясе 275
  турының яссылыкка проекциясе 326
Пропорция 38
Пропорциональ урта 307
Пропорциональлек
  кире пропорциональлек 82
  туры пропорциональлек 79
Пропорциянең кырый буыны 38
  — урта буыны 38
Процент 26
Призма
  авыш призма 333
  туры призма 333
  төзек призма 333
  цилиндрга камалган призма 339
  цилиндрны камаучы призма 339
Призманың диагональ кисеме 333
Радиан 304
Радиус
  башлангыч радиус 95
  түгәрәк радиусы 264
  цилиндр әйләнәсенең радиусы 338
  шарның радиусы 341
  әйләнә радиусы 264
Санлы нур 36
  — аралык 36
  санлы эзлеклелек 202
  даими санлы эзлеклелек 203
  кими баручы санлы эзлеклелек 203
  үсә баручы санлы эзлеклелек 203
Санлы эзлеклелекнең
  — — буыны 202
  — — рекуррент юл белән бирелүе 202
Саннар
  бөтен саннар 31
  гади саннар 14
  иррациональ саннар 31
  катнаш саннар 18
  капма-каршы саннар 30
  комплекслы саннар 49
  комплекслы-иярешле саннар 51
  натураль саннар 11
  рациональ саннар 31
  реаль саннар 32
  тискәре саннар 31
  төзелмә саннар 14
  уйланма саннар 50
  уңай саннар 30
  үзара гади саннар 15
Санның
  — артыгы белән алынган унарлы якынлашуы 44
  — бөтен өлеше 39
  — вакланмалы өлеше 39
  — киме белән алынган унарлы якынлашуы 44
  — якынча кыйммәте 43
Симметрия
  ноктага карата симметрия 368
  турыга карата симметрия 369
  яссылыкка карата симметрия 370

- Синус
  - кысынкы почмакның синусы 305
  - почмакның синусы 96
  - санның синусы 96
- Система
  - тигезләмәләр системасы 136
  - тигезсезлекләр системасы 180, 196
- Стандарт рәвеш
  - бербуынның стандарт рәвеше 55
  - күпбуынның стандарт рәвеше 56
  - уңай санның стандарт рәвеше 40
- Стереометрия 257
- Сумма
  - векторлар суммасы 385
  - интеграль сумма 246
  - комплекслы саннарның суммасы 48
  - саннар суммасы 11
  - чиксез геометрик прогрессиянең суммасы 210
- Сфера 341

- Тамга
  - интеграл тамгасы 249
  - төгәл булмаган тигезсезлек тамгасы 33
  - төгәл тигезсезлек тамгасы 33
  - якынча тигезсезлек тамгасы 43
- Тамыр
  - арифметик тамыр 40
  - квадрат тамыр 41
  - квадрат тигезләмә тамыры 132
  - квадрат өчбуын тамыры 60
  - күпбуын тамыры 60
  - тигезләмә тамыры 132
  - тигезләмәнең чит тамыры 138
  - тискәре санның так дәрәҗәсе тамыры 41
- Тамырасты саны 40
- Тангенс
  - кысынкы почмак тангенсы 305
  - почмакның тангенсы 96
  - санның тангенсы 96
- Тапкырлау
  - бербуыннарны тапкырлау 55
  - векторны санга тапкырлау 386
  - гади вакланмаларны тапкырлау 21
  - комплекслы саннарны тапкырлау 50
  - рациональ вакланмаларны тапкырлау 65
  - унарлы вакланмаларны тапкырлау 24
- Тапкырлауның
  - — кушуга карата тарату законы 11, 38
  - — оештыру законы 11, 38
  - — урын алыштыру үзлеге 11, 38
- Тапкырлаучылар 11
  - өстәмә тапкырлаучылар 63
- Тапкырлаучыларга таркату
  - квадрат өчбуынны тапкырлаучыларга таркату 60
  - күпбуынны тапкырлаучыларга таркату 58
  - натураль санны тапкырлаучыларга таркату 14
- Тапкырлаучыны тамыр тамгасы астыннан чыгару 68
- Тапкырлык
  - геометрик прогрессия тапкырлыгы 205
  - гади вакланмаларның иң кечкенә уртак тапкырлыгы 19
  - гади вакланмаларның уртак тапкырлыгы 20
  - рациональ вакланмаларның уртак тапкырлыгы 63
- Тапкырчыгыш
  - бербуыннарның тапкырчыгышы 55
  - вектор белән санның тапкырчыгышы 386
  - комплекслы саннарның тапкырчыгышы 48
  - саннарның тапкырчыгышы 11
- Теорема
  - Виет теоремасы 135
  - ике перпендикуляр турында теорема 325
  - косинуслар теоремасы 308
  - Пифагор теоремасы 283
  - синуслар теоремасы 308
  - сумманың бүленүчәнлеге турында теорема 13
  - тапкырчыгышның бүленүчәнлеге турында теорема 13
  - Фалес теоремасы 272
  - чикләмәләр турында теорема 209
  - өч перпендикуляр турында теорема 327
- Тетраэдр 335
- Тигез
  - — вакланмалар 18
  - — векторлар 383
  - — кисемтәләр 279
  - — комплекслы саннар 48
  - — почмаклар 279
  - — фигуралар 376
  - — өчпочмаклар 280
- Тигезкөчле
  - — тигезсезлекләр 178
  - — тигезләмәләр 132
  - — тигезләмәләр системалары 165
- Тигезсезлек
  - вакланмалы сызыкча тигезсезлек 182
  - икенче дәрәҗә тигезсезлек 184
  - иррациональ тигезсезлек 193
  - Коши тигезсезлеге 199
  - күрсәткечле тигезсезлек 191
  - логарифмик тигезсезлек 192
  - модульле тигезсезлек 187
  - саннар тигезсезлеге 33
  - сызыкча тигезсезлек 180
  - тригонометрик тигезсезлек 195
  - өчпочмаклар тигезсезлеге 278

- Тигезсезлекләрне исбатлау 199
- Тигезләмә
  - бер үзгәрешлеле тигезләмә 131
  - — — сызыкча тигезләмә 132
  - биквадрат тигезләмә 144
  - бөтен тигезләмә 138
  - вакланмалы тигезләмә 141
  - график орынмасының тигезләмәсе 225
  - ике үзгәрешлеле тигезләмә 163
  - — — сызыкча тигезләмә 164
  - иррациональ тигезләмә 147
  - квадрат тигезләмә 133
  - китерелгән квадрат тигезләмә 134
  - күрсәткечле тигезләмә 149
  - логарифмик тигезләмә 150
  - параметрлы тигезләмә 161
  - пространствода фигураның тигезләмәсе 364
  - рациональ тигезләмә 141
  - сфера тигезләмәсе 365
  - тригонометрик тигезләмә 152
  - тулы булмаган квадрат тигезләмә 134
  - туры тигезләмәсе 360
  - яссылык тигезләмәсе 365
  - яссылыкта фигураның тигезләмәсе 364
  - әйләнә тигезләмәсе 360
  - үзгәрешле ваклаучыда булган тигезләмә 139
- Тирбәнешләр
  - гармоник тирбәнешләр 115
  - синусоидаль тирбәнешләр 115
- Тирбәнешнең
  - — амплитудасы 115
  - — башлангыч фазасы 115
  - — ешлыгы 115
- Транзитивлык 35
- Транспортир 266
- Трапеция 297
  - кәкре сызыклы трапеция 250
  - тигезьянлы трапеция 297
- Тулы квадрат аеру 113
- Туры 258
  - координаталар турысы 30
  - санлы туры 33
  - яссылыкка перпендикуляр туры 324
- Туры параллелепипедның үлчәнешләре 334
- Туры өстендә ноктаның координатасы 30
- Туры һәм яссылыкның параллельлеге 320
- Турылар
  - кисешүче турылар 259
  - параллель турылар 270
  - перпендикуляр турылар 274
  - чалышма турылар 320
- Турыпочмаклы өчпочмакларның тигезлек билгеләре 283
- Турыпочмаклык 296
- Тәртип
  - арифметик гамәлләрнең тәртибе 12
  - санның тәртибе 41
- Төзүче
  - конусның төзүчесе 339
  - цилиндрның төзүчесе 339
- Төзүгә карата иң гади мәсьәләләр 288
- Төп геометрик фигуралар
  - пространствода 318
  - яссылыкта 258
- Төп үзлек
  - башлангыч функциянең төп үзлеге 245
  - гади вакланманың төп үзлеге 18
  - рациональ вакланманың төп үзлеге 62
- Түбә
  - дүртпочмакның түбәсе 293
  - — капма-каршы түбәләре 293
  - — чиктәш түбәләре 293
  - конусның түбәсе 339
  - күпкырлыкның түбәсе 331
  - күппочмакның түбәсе 300
  - параболаның түбәсе 109
  - пирамиданың түбәсе 334
  - почмакның түбәсе 265
  - сынык сызыкның түбәсе 300
  - өчкырлы почмакның түбәсе 331
  - өчпочмак түбәсе 277
- Уйланма берәмлек 49
- Унарлы логарифмның
  - — — мантиссасы 121
  - — — характеристикасы 121
- Урта сызык
  - трапециянең урта сызыгы 298
  - өчпочмакның урта сызыгы 278
- Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару 58
- Фигура
  - геометрик фигура 257
  - гомотетик фигуралар 371
  - охшаш фигуралар 378
  - тигез фигуралар 376
  - турыга карата симметрияле фигура 369
  - төп геометрик фигуралар 258
  - яссылыкка карата симметрияле фигура 370
  - үзәк симметрияле фигура 369
- Физик мәгънәсе
  - икенче чыгарылманың физик мәгънәсе 223
- Формула
  - арифметик прогрессиянең *n*-нчы буыны формуласы 204
  - арифметик прогрессиянең *n* буыны сум-

  - масы формуласы 204
  - геометрик прогрессиянең n буыны суммасы формуласы 206
  - — — n-нчы буыны формуласы 206
  - Герон формуласы 313
  - координаталар яссылыгында ике нокта арасындагы ераклык формуласы 359
  - Ньютон — Лейбниц формуласы 250
  - пространствода ике нокта арасындагы ераклык формуласы 359
  - чиксез геометрик прогрессия буыннары суммасы формуласы 210
- Формулалар
  - аргументларны кушу һәм алу формулалары 122
  - дифференциаллау формулалары 220
  - дәрәҗәне кимету формулалары 127
  - икеләтелгән аргумент формулалары 126
  - китерү формулалары 124
  - кыскача тапкырлау формулалары 57
  - тригонометрик функцияләр суммасын тапкырчыгышка әйләндерү формулалары 128
- Функция
  - даими функция 78
  - дәрәҗәле функция 88
  - интервалда өзлексез функция 216
  - квадратик функция 107
  - катлаулы функция 223
  - кайтма функция 92
  - кими баручы функция 77
  - кире функция 92
  - кисемтәдә өзлексез функция 216
  - күрсәткечле функция 90
  - логарифмик функция 93
  - монотон функция 77
  - ноктада дифференциалланучы функция 220
  - — өзлексез функция 216
  - периодик функция 76
  - сызыкча функция 80
  - так функция 74
  - тригонометрик функция 97
  - үсә баручы функция 77
  - җөп функция 75
- Функциянең
  - — даимилек шарты 238
  - — ноктада үзгәрү тизлеге 223
  - — иң зур кыйммәте 232
  - — иң кечкенә кыйммәте 232
  - санлы эзлеклелекнең чикләмәсе 207
  - функциянең чикләмәсе 213
  - — ноктада чикләмәсе 214
- Чишү
  - бер үзгәрешлеле тигезсезлекне чишү 178
- Функцияне таблица рәвешендә күрсәтү 72

- Характерлаучы үзлек
  - арифметик прогрессияне характерлаучы үзлек 204
  - геометрик прогрессияне характерлаучы үзлек 206
- Хата
  - абсолют хата 43
  - чагыштырма хата 43
- Хорда 264
- Хәрәкәт
  - — композициясе 375

- Цилиндр 337
  - туры цилиндр 338
- Циркуль 287

- Чик
  - түгәрәкнең чиге 264
  - өлкәнең чиге 330
- Чикләмә
  - интегралның югарыгы чикләмәсе 249
  - — түбәнге чикләмәсе 249
  - — — тигезләмәне чишү 131
  - ике үзгәрешлеле тигезсезлекне чишү 196
  - — — тигезләмәне чишү 164
  - тигезсезлекләр системасын чишү 181
  - — җыелмасын чишү 182
  - тигезләмәләр системасын чишү 165
  - өчпочмакларны чишү 309
- Чыгарылма 219
  - икенче чыгарылма 224
- Чыгарылманың геометрик мәгънәсе 225

- Шар 331
- Шарның
  - — диаметраль капма-каршы нокталары 342
  - — катламы 343
  - — сегменты 343
  - — секторы 343
- Экстремумнар 230
- Экстремумның
  - — кирәкле шарты 230
  - — җитәрлек шарты 231

- Як
  - дүртпочмакның ягы 293
  - күппочмакның ягы 300
  - почмакның ягы 266
  - өчпочмакның ягы 278
- Ян
  - тигезьянлы өчпочмакның яны 281
  - трапециянең яны 297
- Яссылык
  - координата яссылыгы 73
  - саннар яссылыгы 73
  - фигураның симметрия яссылыгы 371
- Яссылыклар
  - кисешүче яссылыклар 319
  - параллель яссылыклар 323
  - перпендикуляр яссылыклар 328
- Яссылыкта төзүләр 286

Ярыминтервал 35
Ярымкүчәр
  тискәре ярымкүчәр 355
  уңай ярымкүчәр 355
Ярымтуры
  бер юнәлештәге ярымтурылар 383
  капма-каршы юнәлештәге ярымтурылар 383
  өстәмә ярымтурылар 263
Ярымтурының башлангыч ноктасы 263

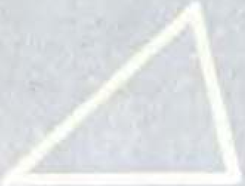
Әйләнә дугасы 267
Әйләнәгә
  — тышкы орыну 276
  — эчке орыну 276
Әйләнү 374

Өлеш 12
  комплекслы санга бүлүдән табылган өлеш 49
Өлкә
  алгебраик аңлатманың билгеләнү өлкәсе 53
  күппочмаклар өлкәсе 300
  тигезләмәнең билгеләнү өлкәсе 139
  функциянең билгеләнү өлкәсе 71
  — кыйммәтләре өлкәсе 71
Өстәмә
  — нурлар 263
  — тапкырлаучылар 20
  — ярымтурылар 263
Өчпочмак
  — медианасы 278
  тигезьяклы өчпочмак 281
  тигезьянлы өчпочмак 281
  турыпочмаклы өчпочмак 282
  әйләнәне камаучы өчпочмак 285
  әйләнәгә камалган өчпочмак 285
Өчпочмакларның тигезлек билгеләре 280

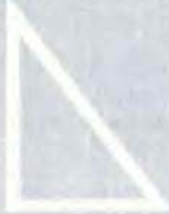
Үзгәрешле 17
  бәйле үзгәрешле 70
  бәйсез үзгәрешле 70
Үзгәрешленең билгеләнү өлкәсе 53
Үзлек
  кисемтәләр үлчәүнең үзлеге 261
  нокталарның һәм турыларның яссылыкта урнашулары үзлеге 261
  нокталарның яссылыкта урнашулары үзлеге 258
  почмаклар үлчәүнең үзлеге 267
  пространствода яссылыклар үзлеге 318
Үзлекләр
  арифметик гамәлләрнең үзлекләре 11, 38
  — прогрессиянең үзлекләре 204
  — тамырларның үзлекләре 41
  геометрик прогрессиянең үзлекләре 206
  логарифмнарның үзлекләре 117
  модульләрнең үзлекләре 36
  натураль күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлекләре 39
  рациональ күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре 42
  реаль күрсәткечле дәрәҗәләрнең үзлекләре 48
  санлы тигезсезлекләрнең үзлекләре 34
Үзәк
  гомотетия үзәге 371
  параллелепипедның симметрия үзәге 333
  түгәрәк үзәге 264
  фигураның симметрия үзәге 369
  шар үзәге 341
  әйләнә үзәге 264
Үлчәү берәмлекләре
  күләм үлчәү берәмлекләре 348
  мәйдан үлчәү берәмлекләре 311
Үсемтә
  аргументның үсемтәсе 218
  функциянең үсемтәсе 219

Җисем
  гади җисем 330
  әйләнү җисеме 330
Җыелма
  бер үзгәрешлеле тигезсезлекләр җыелмасы 182
  тигезләмәләрнең ике системасы җыелмасы 168
  тигезләмәләр җыелмасы 168

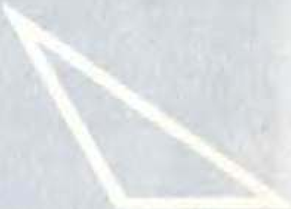
ӨЧПОЧМАКЛАР



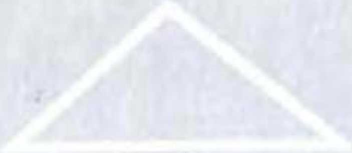
КЫСЫНКЫПОЧМАКЛЫ



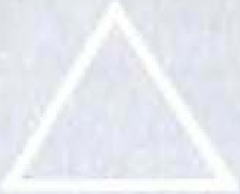
ТУРЫПОЧМАКЛЫ



ҖӘЕНКЕПОЧМАКЛЫ

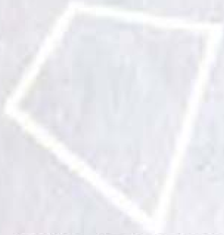


ТИГЕЗЬЯНЛЫ

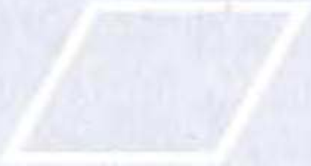


ТИГЕЗЬЯКЛЫ

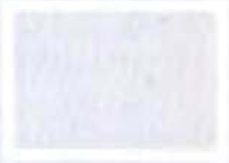
ДҮРТПОЧМАКЛАР



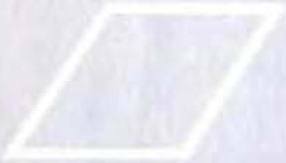
КАБАРЫНКЫ ДҮРТПОЧМАК



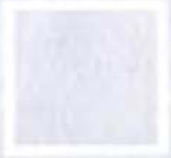
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



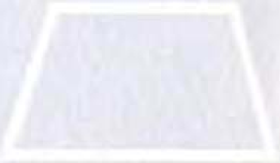
ТУРЫПОЧМАКЛЫК



РОМБ

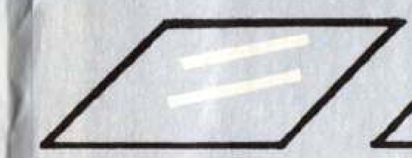


КВАДРАТ

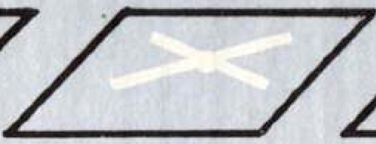


ТРАПЕЦИЯ

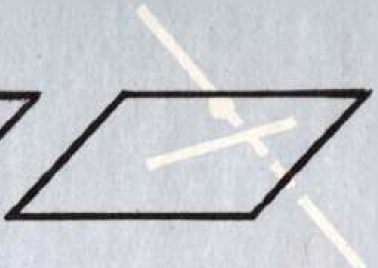
ТУРЫЛАР ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ПРОСТРАНСТВОДА ҮЗАРА ТОРЫШЛАРЫ



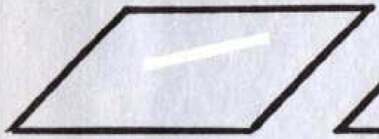
ПАРАЛЛЕЛЬ ТУРЫЛАР



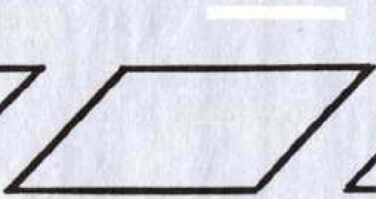
КИСЕШҮЧЕ ТУРЫЛАР



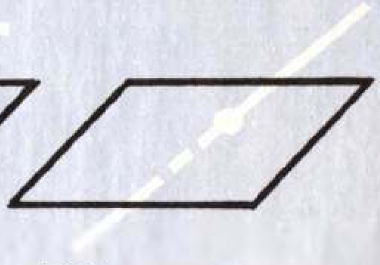
ЧАЛЫШМА ТУРЫЛАР



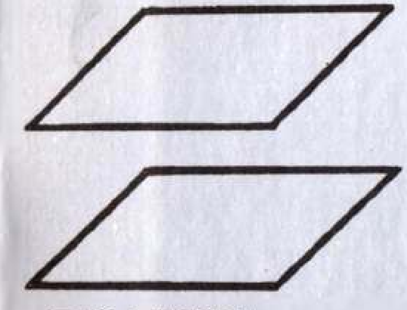
ТУРЫ ЯССЫЛЫКТА ЯТА



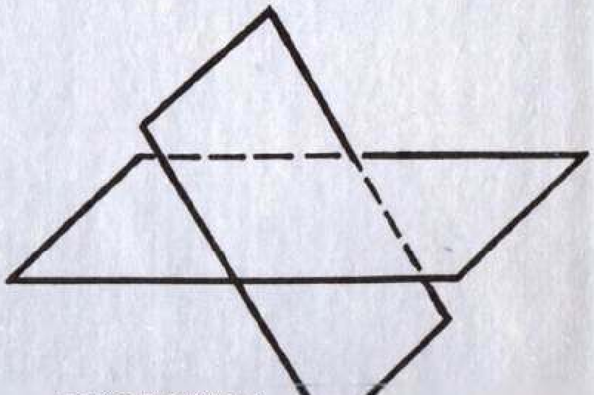
ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫК ПАРАЛЛЕЛЬ



ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫК КИСЕШӘ



ПАРАЛЛЕЛЬ ЯССЫЛЫКЛАР



КИСЕШҮЧЕ ЯССЫЛЫКЛАР